УДК 517.98

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 14.12.2011 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи управления системами со спектральным параметром и разрывным оператором в гильбертовых пространствах. Достаточное условие непустоты множества допустимых пар «управление – состояние» в таких задачах получено методом регуляризации и теории топологической степени для многозначных компактных векторных полей. Общий результат может быть применен к задачам управления распределенными системами эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью с несимметричной дифференциальной частью.

Annotation. We consider control problems for systems with a spectral parameter and a discontinuous operator in Hilbert spaces. Using the regularization method and the topological degree theory for multivalued compact vector fields, the sufficient condition of non-emptiness for the set of the acceptable «control – state» pairs is obtained. The general result may be applied to controlled problems of the distributed elliptic type systems with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity with a non-symmetrical differential part.

Ключевые слова: задачи управления, спектральный параметр, разрывный оператор, метод регуляризации, теория топологической степени, пара «управление – состояние».

Key words: control problems, spectral parameter, discontinuous operator, regularization method, topological degree theory, «control – state» pair.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] получены общие результаты об управляемых системах с разрывными операторами в банаховых пространствах. В этих работах установлены предложения о непустоте и слабой замкнутости множества допустимых пар «управление – состояние», приведены достаточные условия существования оптимальной пары «управление – состояние» для изучаемого класса задач управления методом монотонных операторов [1] и вариационным методом [1]. Полученные общие результаты из работ [1–4] применены к задачам управления распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Данная работа является продолжением этих исследований и посвящена разрешимости задачи управления для некоторого класса уравнений с разрывными операторами и дополнительным скалярным параметром, называемым спектральным.

В данной работе рассматривается задача управления нелинейной системой с разрывным оператором и спектральным параметром в гильбертовом пространстве. Рассматриваются уравнения с некоэрцитивным оператором, равным сумме линейного фредгольмова отображения нулевого индекса и разрывного компактного оператора. Найдено достаточное условие непустоты множества допустимых пар «управление – состояние» для таких задач – общая теорема о разрешимости уравнений с разрывными операторами. Полученная теорема доказывается с помощью регуляризации и теории топологической степени для многозначных компактных векторных полей [4] и развивает результаты работ [1]–[3]. При этом устанавливается существование таких решений абстрактных уравнений, которые являются точками непрерывности оператора уравнения. Полученная общая теорема может быть применена к исследованию управляемых распределенных систем эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью с несимметричной дифференциальной частью.

В отличие от работ [1], [2] в данной работе рассматриваемые уравнения состояния управляемой системы содержат спектральный параметр, коэрцитивность оператора в уравнении состояния не предполагается. Кроме того, в отличие от работ [1]–[3] рассматривается существенно другой класс задач управления для уравнений с разрывными операторами в гильбертовом пространстве. Ранее уравнения с разрывными операторами и спектральным параметром в банаховых пространствах рассматривались в работах [5]–[9].

1. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В гильбертовом пространстве H управляемая система описывается уравнением состояния

$$Au - \lambda Tu = Bv, \tag{1}$$

где $A: H \to H$ – линейное фредгольмово отображение нулевого индекса, что означает замкнутость области значений $R(A)$ оператора A, конечномерность ядра $\ker A$ и равенство размерностей $\ker A$ и $\ker A^*$; λ – положительный параметр; $T: H \to H$ разрывное, компактное отображение (т. е. множество TG предкомпактное в H для любого ограниченного подмножества G множества H), удовлетворяющее условию

$$\lim_{||u||\to+\infty} \frac{Tu}{||u||} = 0; \tag{2}$$

оператор $B: U \to H$ линейный и ограниченный, U – банахово пространство управлений; управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} – множество всех допустимых управлений для системы (1).

Отметим, что условие (2) выполняется, например, для ограниченного на H оператора T, т. е. такого отображения T, для которого существует постоянная $M > 0$ такая, что $||Tu|| \leq M \ \forall u \in H$.

Кроме того, предположим, что оператор A принадлежит классу $(S)_+$ [10], т. е. для любой последовательности $(u_n) \subset H$ из слабой сходимости u_n к u и неравенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(Au_n, u_n - u) \leq 0$ следует сильная сходимость (u_n) к u в H. Здесь и далее через (z,x) будем обозначать скалярное произведение элементов z,x из H. Потребуются следующие определения.

Определение 1. Оператор $T: H \to H$ называется *коэрцитивным*, если

$$(Tu,u) \geq c(||u||)\cdot||u|| \quad \forall u \in H,$$

где $c: R_+ \to R$ непрерывная на R_+ функция и $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = +\infty$. И *некоэрцитивным* в противном случае.

Определение 2. Элемент $u \in H$ называется *точкой разрыва* оператора $T: H \to H$, если найдутся последовательность $(u_n) \subset H$, сильно сходящаяся к u, и вектор $h \in H$ такие, что (Tu_n, h) не сходится к (Tu, h), т. е. u не является точкой деминепрерывности оператора T.

Определение 3. Элемент $u \in H$ называется *сильно регулярной точкой* для оператора $T: H \to H$, если существует $h \in H$ такой, что

$$\overline{\lim_{w\to0}}(T(u+w),h) < 0.$$

Определение 4. *Секвенциальным замыканием* локально ограниченного отображения $T: E_1 \to E_2$ (E_1, E_2 – банаховы пространства) называется отображение ST из E_1 в E_2 (вообще говоря, многозначное), значение STx ($x \in E_1$) которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в E_2 последовательностей вида (Tx_n), где $x_n \to x$ в E_1.

Определение 5. *Обобщенным решением* уравнения (1) при фиксированном управлении v называется элемент $u \in H$, удовлетворяющий включению

$$Au - Bv \in \lambda STu,$$

где ST – секвенциальное замыкание оператора T.

Определение 6. Упорядоченная пара $(\hat{v}, \hat{u})$ называется *допустимой парой «управление – состояние»* для системы (1), если $\hat{v} \in U_{ad}$, а $\hat{u}$ – обобщенное решение уравнения (1) при $v = \hat{v}$.

Определение 7. Элемент $u \in H$ называется *классическим решением* уравнения (1) при фиксированном управлении v, если $Au - Bv = \lambda Tu$.

Для уравнений с разрывными операторами решения рассматриваются как обобщенные, так и классические. Допускается, что для некоторых $v \in U_{ad}$ система (1) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения, т. е. возможен сингулярный случай [11].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A – линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H в пространство H, фредгольмов, нулевого индекса и принадлежит классу $(S)_+$;

2) отображение $T: H \to H$ разрывное, компактное и удовлетворяет условию (2);

3) существует линейный изоморфизм Λ между $\ker A$ и $\ker A^*$ такой, что для любой последовательности $(u_n) \subset H$ с $||u_n|| \to +\infty$ и $||u_n||^{-1} \cdot u_n \to v \in \ker A$ имеет место неравенство $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(Tu_n, \Lambda v) > 0$ или же для каждой такой последовательности $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(Tu_n, \Lambda v) < 0$;

4) любая точка разрыва оператора T сильно регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$;

5) оператор $B: U \to H$ линейный и ограниченный, пространство управлений U банахово, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$ непусто.

Тогда для любого управления $v \in U_{ad}$ существует классическое решение уравнения (1), являющееся точкой непрерывности оператора T.

Доказательство теоремы 1.

Как и в работе [4], при выполнении условий 1)–3) теоремы 1 и любом фиксированном управлении v (управление v существует, поскольку множество U_{ad} непусто в силу условия 5) теоремы 1), устанавливается, что

$$Au - Bv \in \lambda STu, \qquad (3)$$

где ST – секвенциальное замыкание оператора T. Данное включение означает, что найдется $u \in H$, которое является обобщенным решением уравнения (1). Таким образом, для любого $v \in U_{ad}$ существует обобщенное решение уравнения (1).

При выполнении условия 4) теоремы 1 и любом фиксированном управлении v, как и в работе [4], показывается, что u, удовлетворяющее (3), точка непрерывности оператора T. Для точки непрерывности u оператора T значение STu совпадает с Tu и в этом случае включение (3) совпадает с уравнением

$$Au - Bv = \lambda Tu,$$

т. е. u – классическое решение уравнения (1) и точка непрерывности оператора T.

Итак, для любого управления $v \in U_{ad}$ существует классическое решение уравнения (1), являющееся точкой непрерывности оператора T. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Пусть D – множество всех допустимых пар «управление – состояние» для системы (1). Тогда теорема 1 является достаточным условием непустоты множества D.

Замечание 2. Доказательство существования классических решений уравнения (1) потребовало дополнительных ограничений на точки разрыва оператора T – сильную регулярность точек разрыва оператора F_λ (условие 4) теоремы 1). В работах [5, 6, 8] рассматривались только обобщенные решения.

Замечание 3. В отсутствии управления ($v \equiv 0$) полученный общий результат (теорема 1) может быть применен для установления разрешимости уравнений со спектральным параметром и разрывным некоэрцитивным оператором в гильбертовом пространстве, где в отличие от работ [5]–[9] не предполагается квазипотенциальность оператора T, а в отличие от работ [6]–[9], кроме того, не требуется монотонность оператора уравнения.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ

Полученные в п. 1 общие результаты могут быть применены к нижеследующей задаче.

В ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$ рассматривается управляемая распределенная система вида

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u(x) = \\ = \lambda g(x,u(x)) + Bv(x),\ x \in \Omega, \qquad (4)$$

$$Gu|_\Gamma = 0, \qquad (5)$$

где L – равномерно эллиптический дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij}, b_j \in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega}), c \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; λ – положительный параметр; функция $g: \Omega \times R \to R$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на R разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ $\forall\, u \in R$, $g_-(x,u) = \varliminf_{\eta \to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup_{\eta \to u} g(x,\eta)$, $|g(x,u)| \le a(x)$ $\forall u \in R$, $a \in L_q(\Omega)$, $q > \dfrac{2n}{n+2}$; оператор $B: U \to L_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, U – банахово пространство управлений; функция $v(x)$ в уравнении (4) играет роль управления, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} – множество всех допустимых управлений для системы (4)–(5); граничное условие (5) является либо условием Дирихле $u(x)|_\Gamma = 0$, либо условием Неймана $\dfrac{\partial u}{\partial n_L}(x)|_\Gamma = 0$ с конормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial n_L}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n,x_j)$, n – внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n,x_j)$ – направляющие косинусы нормали n, либо третьим краевым условием $\dfrac{\partial u}{\partial n_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0$, в котором функция $\sigma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ.

В данном случае формальная самосопряженность дифференциального оператора L в уравнении (4) и коэрцитивность оператора краевой задачи (4)–(5) в рассматриваемых функциональных пространствах не предполагаются.

Применив теорему 1 к задаче (4)–(5), получим, что множество D всех допустимых пар «управление – состояние» для системы (4)–(5) непусто.

Замечание 4. Положив в уравнении (4) $v(x) \equiv 0$, т. е. исключив из рассмотрения управление, общий результат может быть применен для установления разрешимости основных краевых задач для уравнений эллитического типа со спектральным параметром и разрывными нелинейностями без предположения формальной самосопряженности дифференциальной части уравнения, где в отличие от работ [5, 6, 8] не требуется $b_j(x) \equiv 0$, $j = \overline{1,n}$.

Замечание 5. В предположении, что нелинейность $g(x,u)$ равна разности суперпозиционно измеримых функций $g_2(x,u)$ и $g_1(x,u)$, неубывающих по фазовой переменной u при почти всех $x \in \Omega$, методом верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями [12], может быть также установлена разрешимость задачи (4)–(5), что, однако, будет описывать в абстрактном случае класс операторных уравнений, отличный от рассмотренного в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павленко В.Н.* Метод монотонных операторов в задачах управления распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Известия вузов. – Математика. – 1993. – 8. – С. 49–54.

2. *Павленко В.Н.* Управление распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Челяб. гос. ун-та. – Сер. 3. Математика. Механика. – 1999. – 2(5). – С. 56–67.

3. *Потапов Д.К.* Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами // Труды ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17. – 1. – С. 190–200.

4. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54. – 3. – С. 349–363.

5. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – 4. – С. 911–919.

6. *Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // Вестн. С.-Петерб. ун-та. – Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2004. – Вып. 4. – С. 125–132.

7. *Potapov D.K.* Spectral problems for equations with discontinuous monotone operators // J. Math. Sciences. – 2007. – Vol. 144. – № 4. – P. 4232–4233.

8. *Потапов Д.К.* Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. – СПб.: ИБП, 2008. – 99 с.

9. *Потапов Д.К.* Оценка бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами // Уфимск. матем. журн. – 2011. – Т. 3. – 1. – С. 43–46.

10. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка // Итоги науки и техн. – Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т. 37. – С. 3–87.

11. *Лионс Ж.Л.* Управление сингулярными распределенными системами. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

12. *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Известия вузов. – Математика. – 1998. – 11. – С. 69–76.

Потапов Дмитрий Константинович – кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики – процессов управления, доцент кафедры высшей математики; Институт бизнеса и права, доцент, заведующий кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин. Тел.: 8-905-256-03-10 E-mail: potapov@apmath.spbu.ru, dkpotapov@mail.ru

Potapov Dmitry Konstantinovich – the candidate of physical and mathematical sciences, the St.-Petersburg state university, faculty of applied mathematics – managerial processes, the senior lecturer of chair of higher mathematics; business and right Institute, the senior lecturer managing chair of the general mathematical and natural-science disciplines. Tel.: 8-905-256-03-10 E-mail: potapov@apmath.spbu.ru, dkpotapov@mail.ru