УДК 519.112.71

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЁХИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

О. А. Медведева, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.10.2011 г.

Аннотация. В работе рассматривается многокритериальная трёхиндексная задача о назначениях. Предлагается алгоритм решения, в основе которого лежит переход к двойственной задаче с последующим использованием метода Удзавы.
Ключевые слова: дискретная оптимизация, задача о назначениях, многокритериальная задача, двойственная задача, алгоритм решения.
Annotation. In the work the multicriteria three-index assignment problem is considered. The solution algorithm where translation to a dual problem is assumed as a basis is offered. Udzava method is used to tackle the given problem.
Key words: discrete optimisation, assignment problem, multicriterion problem, dual problem, solution algorithm.

Рассматриваемая задача возникает, например, при комплектовании штатов на нескольких предприятиях одновременно. Как правило, при этом каждое предприятие стремится минимизировать затраты, связанные с приёмом на работу. Часто возникает ситуация, в которой не каждый претендент умеет делать любую из предложенных работ.

Рассмотрим математическую формализацию задачи.

Пусть имеется K предприятий и m претендентов на $n_1, \ldots, n_K$ мест работы на каждом предприятии соответственно. Условие конкуренции предполагает, что количество претендентов больше числа предложенных мест, то есть $m > \sum_{k=1}^{K} n_k$.

Обозначим через

$$s_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й претендент умеет} \\ \text{делать } j\text{-ю работу на } k\text{-м предприятии}, \\ 0, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

где $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,n_k}$.

Известна стоимость c_{ijk} затрат, связанных с назначением i-ого претендента на j-ое место на k-ом предприятии. Требуется распределить претендентов по рабочим местам так, чтобы каждый нанятый претендент занял одно место, каждое место было занято одним претендентом и так, чтобы связанные с этим распределением затраты каждого предприятия были минимальными.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й претендент назначен} \\ \text{на } j\text{-е место на } k\text{-м предприятии}, \\ 0, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

Для формализации задачи введём переменные:
где $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,n_k}$.

Математическая модель задачи выглядит при этом следующим образом:

$$L_1(X_1) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_1} c_{ij1} x_{ij1} \to \min$$

$$\ldots$$

$$L_K(X_K) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_K} c_{ijK} x_{ijK} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} s_{ijk} x_{ijk} = 1, \ \forall j = \overline{1,n_k}, \\ \text{что } \sum_{i=1}^{m} s_{ijk} \geq 1, \ k = \overline{1,K}, \\ \sum_{j=1}^{n_k} s_{ijk} x_{ijk} \leq 1, \ i = \overline{1,m}, \ k = \overline{1,K}, \\ \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} \leq 1, \ i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

$$x_{ijk} = \{0,1\}, i = \overline{1,m}, \ k = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_k},$$

где $s_{ijk} = \{0,1\}, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_k}$.

Заметим, что в результате получена многокритериальная задача с ограничениями, аналогичными ограничениям задачи о назначениях. В дальнейшем предполагается использование венгерского метода. С этой целью перепишем задачу с учётом следующих изменений коэффициентов целевых функций.

Обозначим через

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}, \text{если } s_{ijk} = 1, \\ M, \text{если } s_{ijk} = 0, \end{cases}$$

$$i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,n_k},$$

где M – коэффициент штрафа, запрещающий назначение i-ого претендента на j-ую работу на k-ом предприятии в случае, если он не умеет её делать.

В результате задача перепишется в виде:

$$L_1(X_1) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_1} \bar{c}_{ij1} x_{ij1} \to \min$$

$$\ldots$$

$$L_K(X_K) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_K} \bar{c}_{ijK} x_{ijK} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = 1,\ \forall k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,n_k}, & (1) \\ \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} \le 1,\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,K}, & (2) \\ \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} \le 1,\ i = \overline{1,m}, & (3) \end{cases}$$

$$x_{ijk} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,n_k}.$$

Ограничения (2) являются следствием ограничений (3), однако для удобства дальнейшей алгоритмизации они не убираются из математической модели.

Требования (1) и (2) являются стандартными ограничениями задачи о назначениях, а ограничение (3) означает, что один и тот же претендент не может быть одновременно назначен на работу на нескольких предприятиях.

Вместо многокритериальной задачи рассмотрим задачу с целевой функцией следующего вида:

$$\min\left\{\max\left(L_1(X_1),\ldots,L_K(X_K)\right)\right\}.$$

Обозначим через μ выражение $\mu = \max\left(L_1(X_1),\ldots,L_K(X_K)\right)$. Кроме того, через S обозначит множество $\{x,y\}$, удовлетворяющих задаче о назначениях:

$$S = \left\{(x,y) : \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = 1, k = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_k}, \\ \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} \le 1, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,K}, \\ x_{ijk} = \{0,1\}, i = \overline{1,m}, \\ k = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_k}. \end{cases}\right\}$$

Задача при этом примет вид:

$$\mu \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_1} \bar{c}_{ij1} x_{ij1} - \mu \le 0,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_K} \bar{c}_{ijK} x_{ijK} - \mu \le 0,$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} \le 1, i = \overline{1,m},$$

$$x_{ijk} \in S, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_k},$$

$$\mu \ge 0.$$

Для алгоритмизации данной задачи предполагается использовать двойственный метод Удзавы. С этой целью перепишем задачу с помощью функции Лагранжа.

Функция Лагранжа для данной задачи может быть записана в виде:

$$\Phi(x,\mu,u,w) = \mu +$$
$$+u_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_1} \bar{c}_{ij1} x_{ij1} - \mu\right) + \ldots +$$
$$+u_K\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_K} \bar{c}_{ijK} x_{ijK} - \mu\right) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} w_i\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} - 1\right),$$
$$u, w \ge 0, x \in S, \mu \ge 0.$$

В результате исходная задача переписывается следующим образом

$$\min_{\substack{x\in S\\ \mu\ge 0}} \max_{u,w\ge 0} \Phi(x,\mu,u,w),$$

двойственная к ней имеет вид

$$\max_{u,w\ge 0} \min_{\substack{x\in S\\ \mu\ge 0}} \Phi(x,\mu,u,w) = \max_{u,w\ge 0} \omega(u,w).$$

Схема двойственного алгоритма Удзавы для решения подобных задач выглядит следующим образом [2]:

Шаг 0. Задать начальные значения $u^0 \ge 0, w^0 \ge 0, x^0, \mu^0, N = 0$.

Шаг 1. Вычислить

$$x^{N+1} = \arg\min_{x \in S} \Phi(x, \mu^N, u^N, w^N).$$

Проверка на останов. Если тест на останов выполнен, ты выписать ответ $X_k^* = X_k^{N+1}, k = \overline{1,K}$. Иначе вычислить μ^{N+1}.

Шаг 2. Вычислить u_k^{N+1}, w_i^{N+1} по формулам

$$u_k^{N+1} = \left[u_k^N + \alpha_k \hat{\nabla}_{uk} \omega(x^{N+1})\right]^+, k = \overline{1,K},$$

$$w_i^{N+1} = \left[w_i^N + \beta \hat{\nabla}_{wi} \omega(x^{N+1})\right]^+, \ i = \overline{1,m},$$

где через $\hat{\nabla}\omega$ обозначено соответствующее значение субградиента двойственной функции $\omega(\cdot)$.

Увеличить N на единицу. Переход к шагу 1.

Для реализации вычислительной схемы преобразуем функцию Лагранжа следующим образом

$$\Phi(x, \mu, u, w) = \mu +$$
$$+u_1 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_1} \bar{c}_{ij1} x_{ij1} - u_1 \mu + \ldots +$$
$$+u_K \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_K} \bar{c}_{ijK} x_{ijK} - u_K \mu +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_1} w_i x_{ij1} + \ldots$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_K} w_i x_{ijK} - \sum_{j=1}^{n} w_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_1} (u_1 \bar{c}_{ij1} + w_i) x_{ij1} + \ldots +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_K} (u_K \bar{c}_{ijK} + w_i) x_{ijK} +$$
$$\mu(1 - \sum_{k=1}^{K} u_k),$$
$$u, w \ge 0, \quad x \in S, \quad \mu \ge 0.$$

В результате на первом шаге алгоритма решаются следующие задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} (u_k^N \bar{c}_{ijk} + w_i^N) x_{ijk} \to \min_{x \in S}, \quad k = \overline{1,K}, \quad (4)$$

$$\mu(1 - \sum_{k=1}^{K} u_k) \to \min_{\mu \ge 0}, \quad (5)$$

где задачи, соответствующие пункту 1, являются задачами о назначениях с меняющимися в процессе работы алгоритма матрицами затрат.

Заметим, что в силу определения переменной μ справедливы ограничения

$$0 \le \mu \le \max(L_1(X_1^N), \ldots, L_K(X_K^N)).$$

Таким образом, задача по μ решается следующим образом:

$$\mu^N = 0, \text{если} \sum_{k=1}^{K} u_k < 1,$$

$$\mu^N - \forall \quad (\text{например, } \mu^N = \mu^{N-1}),$$

$$\text{если} \sum_{k=1}^{K} u_k = 1,$$

$$\mu^N = \max\left(L_1\left(X_1^N\right), \ldots, L_K\left(X_K^N\right)\right),$$

$$\text{если} \sum_{k=1}^{K} u_k > 1.$$

Окончательно алгоритм решения исходной задачи принимает следующий вид.

Модельная схема алгоритма:

1. Ввести начальные данные

$$u^0 \ge 0, w^0 \ge 0, N = 0,$$

$$\eta \ge 0, \alpha_1^N = \ldots = \alpha_K^N = \beta^N = \frac{1}{N+1}.$$

2. Решить K задач о назначениях (4).
3. Проверить выполнение неравенств

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} \le 1, \quad i = \overline{1,m}.$$

Если неравенства выполняются, то X_k^N, $k=1,\ldots,K$ являются оптимальными решениями, в противном случае переход к пункту 4.

4. Решить задачу по μ (5).
5. Пересчитать значения двойственных переменных по формулам

$$u_k^{N+1} = \left[u_k^N + \alpha_k^N (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \bar{c}_{ijk} x_{ijk}^N - \mu^N)\right]^+,$$
$$k = \overline{1,K},$$

$$w_i^{N+1} = \left[w_i^N + \beta^N (\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk}^N - 1)\right]^+,$$
$$i = \overline{1,m}.$$

Увеличить N на единицу. Перейти к пункту 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюгина О. А.* Комплектование штатов при наличии обучения / О. А. Малюгина, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова // Системное моделирование социально-экономических процессов : труды 32-ой Международной школы-семинара, Вологда, 5–10 октября 2009г. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2009. — Ч. III. — С. 425–427.

2. *Малюгина О. А.* Использование двойственных методов для решения одной многокритериальной задачи о назначениях / О. А. Малюгина, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова // Вестник Воронеж. гос.

ун-та. Серия : Системный анализ и информационные технологии. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2010. — № 1. — С. 31–34 .

3. *Медведев С. Н.* Использование адаптивных алгоритмов для решения трёхиндексной задачи о назначениях / С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова // Вестник факультета прикл. мат., информ. и мех. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2010. — Вып. 8. — С. 148–154.

4. *Корбут А.А.* Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн ; под ред. Д. Б. Юдина .— М. : Наука, 1969 .— 368 с.

Медведева Ольга Александровна – аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет, тел. 8 904 214 94 45, e-mail: romashka16.12@mail.ru

Медведев Сергей Николаевич – аспирант кафедры математического и прикладного анализа факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет, тел. 8 906 671 62 05, e-mail: S_N_Medvedev@mail.ru

Чернышова Галина Дмитриевна – доцент кафедры Математических методов исследования операций факультета ПММ, кандидат технических наук, Воронежский Государственный Университет, тел. 8 903 854 70 78, e-mail: chern@vsau.ru

Medvedeva Olga A. – post-graduate student, Voronezh State University, 8 904 214 94 45, e-mail: romashka16.12@mail.ru

Medvedev Sergey N. – post-graduate student, Voronezh State University, 8 906 671 62 05, e-mail: S_N_Medvedev@mail.ru

Tchernyshova Galina D. – docent, Cand.Tech. Sci., Voronezh State University, 8 903 854 70 78, e-mail: chern@vsau.ru