УДК 519.86; 510:514

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская

Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I

Поступила в редакцию 15.09.2011 г.

Аннотация. В статье рассматриваются методы моделирования системных объектов посредством построения фрактальных множеств с помощью систем итерируемых функций. Проводится анализ полученных моделей с точки зрения промежуточных асимптотик.
Ключевые слова: моделирование системных объектов, фрактальный анализ, рандомизированные системы интерированных функций.
Annotation. The article considers methods of modeling of system objects by means of construction of fractal sets with the help of iterated functions systems. The analysis of the received models from the point of view of intermediate asymptotic is carried out.
Key words: modeling of system objects, fractal analysis, random systems of interated functions

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрение классификационной задачи как задачи системного анализа подразумевает выявление механизмов формирования структур таких объектов [1]. Фрактальный подход, реализованный посредством рандомизированных систем итерированных функций (РСИФ), позволяет моделировать целостный характер системы и хорошо отражает стохастический характер взаимосвязей отдельных её элементов. Математические аспекты этого подхода первоначально были развиты Хатчинсоном [2]. Однако проведенные исследования выполнены, как правило, в рамках классического подхода, т.е. без исследования свойств предельных переходов и промежуточных результатов выполнения РСИФ. В нашей работе мы предлагаем рассмотреть результаты выполнения РСИФ с двух различных точек зрения – классической и конструктивной. Так, например, исследуя вопросы сходимости указанной РСИФ, мы будем каждый раз оговаривать особо, имеем ли мы дело с актуальной бесконечностью, т.е. уже состоявшейся и реализованной, или бесконечность рассматривается как потенциальная, как возможность в принципе продолжать вычисления как угодно долго. Другими словами, результат исследования в некоторой степени будет определяться тем, с каких позиций проводится анализ – используется ли конструктивный подход, или рассмотрение проходит в рамках классического анализа – с позиций, скажем, наивной теории множеств. Предлагаемый нами подход, при котором мы попытаемся учитывать обе различные точки зрения, описывает поведение моделируемой системы в тех частных, но крайне важных с практической точки зрения условиях, когда решение перестает зависеть от деталей начальных и граничных условий, но система еще далека от предельных состояний. Фактически, получаемые в ходе реализации РСИФ множества – это некоторое промежуточно-асимптотическое решение.

1. РЕАЛИЗАЦИИ РАНДОМИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Для конкретной реализации РСИФ предлагается использовать следующую процедуру [3]. Предположим, что задано значение некоторого параметра μ и в евклидовом пространстве R^P задано некоторое множество точек $Z = \left\{Z_j\right\}_{j=1}^{K}$, которое будем называть протофракталом. Произвольным образом определяется начальная точка $X_0 \in R^P$. Для получения точек моделируемого множества последовательно выполняются следующие операции:

1. Случайным образом выбирается точка протофрактала $Z_j^{(R)} \in Z$;

2. Вычисляются координаты точки $X_1 = \left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1P}\right)$ по формуле

$$x_{1i} = \frac{x_{0i} + \mu z_j^{(1)}}{1+\mu},\ (i=1,2\ldots,\ P).$$

В дальнейшем полученная точка X_1 принимается за исходную, и пункты 1–2 повторяются столько раз, сколько точек генерируемого множества необходимо получить. В результате выполнения такой процедуры будет построено множество точек, $E_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$, которое будем называть предфракталом, – по аналогии с определением предкомпакта. Термином фрактал традиционно будем обозначать предельное множество. Представленную выше итерированную процедуру в дальнейшем будем обозначать F1.

Построение точек предфрактала можно организовать и другим способом. Для удобства и без ограничения общности рассмотрим выполнение этой процедуры в одномерном случае. Пусть $X_0 = (x_0)$ – начальная точка процедуры, которая может быть взята произвольно. Тогда последовательное выполнение итерированной процедуры можно представить следующим образом:

$$x_1 = \frac{x_0 + \mu z_j^{(1)}}{1+\mu} = \frac{1}{1+\mu}\left(x_0 + \mu z_j^{(1)}\right) = \xi\gamma_0,$$

где $\mu = \dfrac{1}{1+\mu}$, $\gamma_0 = x_0 + \mu z_j^{(1)}$,

$$x_2 = \frac{x_1 + \mu z_j^{(2)}}{1+\mu} = \frac{1}{1+\mu}\left(x_1 + \mu z_j^{(2)}\right) = \xi(\xi\gamma_0 + \gamma_1),$$

где $\gamma_1 = \mu z_j^{(2)}$;

$$x_3 = \frac{x_2 + \mu z_j^{(3)}}{1+\mu} = \frac{1}{1+\mu}\left(x_2 + \mu z_j^{(3)}\right) = \xi\left(\xi(\xi\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2\right),$$

где $\gamma_3 = \mu z_j^{(3)}$;

....

$$x_n = \xi\left(\ldots\xi\left(\xi(\xi\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2\right) + \ldots + \gamma_{n-1}\right).$$

Полученное выражение представляет собой запись схемы Горнера для многочлена n-ой степени от переменной ξ без свободного члена с коэффициентами $\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_0$, которые получены путем случайного отбора из совокупности точек протофрактала $Z = \{Z_j\}_{j=1}^{K}$ на каждом шаге, умноженные на коэффициент μ. Раскрыв скобки, получим следующее равенство

$$x_n = \gamma_0\xi^n + \gamma_1\xi^{n-1} + \gamma_2\xi^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1}\xi = \xi\sum_{m=0}^{n-1}\gamma_m\xi^{n-m-1}. \quad (1)$$

Перепишем (1), изменив порядок суммирования и оценим полученную сумму сверху

$$x_n = \xi\sum_{m=0}^{n-1}\mu z_j^{(n-1-m)}\xi^m = \frac{\mu}{1+\mu}\sum_{m=0}^{n-1} z_j^{(n-1-m)}\xi^m \le \frac{\mu}{1+\mu}M\sum_{m=0}^{n-1}\xi^m, \quad (2)$$

где $M = \max_j |z_j|$, $0 < \xi < 1$ при $\mu \ge 1$.

Для значения x_n можно получить более точную оценку, перегруппировав члены ряда и приведя подобные относительно Z_j

$$x_n = \frac{1}{1+\mu}\sum_{m=0}^{n-1}\mu z_j^{(n-1-m)}\xi^m = \frac{\mu}{1+\mu}\left(z_1\sum_i \xi^i + z_2\sum_j \xi^j + \cdots z_K\sum_l \xi^l\right)$$

или

$$x_n = z_1\frac{\mu}{1+\mu}\sum_i \xi^i + z_2\frac{\mu}{1+\mu}\sum_j \xi^j + \ldots + z_k\frac{\mu}{1+\mu}\times\sum_l \xi^l = \sum_{j=1}^{K} z_j a_j, \quad (3)$$

где $a_j = \dfrac{\mu}{1+\mu}\sum_j \xi^j$, $a_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$ причем $\sum_{j=1}^{K} a_j = 1$, а суммирование в отдельных слагаемых ведется по числу выбранных алгоритмом в п.2 точкам протофрактала.

Следовательно, построение предфрактала при заданном множестве $Z = \{Z_j\}_{j=1}^{K}$, распределении вероятностей значений $p_j = P\{Z = Z_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$ и значении μ фактически сводиться к выполнению следующих действий:

1. В соответствии с распределением $p_j = P\{Z_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$ вычисляются K сумм, образованных из элементов абсолютно сходящегося ряда вида

$$\mu\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\mu)^s} = 1.$$

Полученные K значений записываются в строку как элементы матрицы $A = \|a_{ij}\|_{N\times K}$, где N – число требуемых точек предфрактала, K –

число точек протофрактала. Правило отнесения i-го члена ряда к какому-либо слагаемому, $\{p_j\}_{j=1}^{K}$ может быть, вообще говоря, произвольным.

2. Полученная в результате вычислений матрица A умножается на матрицу $Z_{K\times N}$, составленную из точек протофрактала. Результат произведения – матрица $X = A \times Z$ будет представлять собой список координат точек предфрактала X в заданном пространстве.

Таким образом, если организована матрица $A = \|a_{ij}\|_{N\times K}$, то построение предфрактала сводится к перемножению матриц. Такой способ построения предфрактального множества в дальнейшем будем обозначать F2.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ И ПЕРЕЧИСЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВ, ПОЛУЧЕННЫХ РСИФ

Рассмотрим вопрос о разрешимости фрактального множества точек. Другими словами, задача будет заключаться в том, чтобы по заданной точке $\hat{X}$ можно было бы решить вопрос о ее принадлежности множеству X, т.е. определить является ли множество $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ разрешимым.

Для определения принадлежности точки $\hat{X}$ к множеству X удобно считать, что $\hat{X}$ получена в ходе выполнения процедуры F2. В этом случае согласно (3) имеет место следующее представление

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{K} a_i Z_i,$$

где $\forall a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{K} a_i = 1$.

Утверждение. Для того, чтобы набор $a = \{a_i\}$ был набором, полученным посредством F2, необходимо и достаточно, чтобы среди его элементов существовал доминирующий элемент [5], т.е. элемент $a_j > \sum_{i\neq j}^{K} a_i$, величина которого превосходит сумму всех остальных.

► ***Необходимость***. Пусть $\mu > 1$ и имеет место равенство

$$\mu \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu)^s} = 1. \tag{4}$$

Тогда первый член этого ряда равен $\dfrac{\mu}{1+\mu}$, а сумма оставшихся членов ряда

$$\mu \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu)^s} = \frac{1}{1+\mu}.$$

При указанном значении μ очевидно выполнение неравенства

$$\frac{\mu}{(1+\mu)} \geq \frac{1}{(1+\mu)}.$$

Достаточность. Пусть элементы $a = \{a_i\}$ являются суммами случайно отобранных элементов ряда (5) и величина a_j является доминирующей

$$a_j > \sum_{i\neq j}^{K} a_i. \tag{5}$$

Покажем, что в этом случае значение параметра μ можно определить так, что соответствующая процедура F2 будет приводить к выполнению соотношения (6).

Действительно, из условия доминирования и соотношения $a_j + \sum_{i\neq j}^{K} a_i = 1$ следует, что $\sum_{i\neq j}^{K} a_i < 1/2$, а соответственно $a_j \geq 1/2$. В случае, если набор $a = \{a_i\}$ получен посредством процедуры F2, в a_j должен входить первый член ряда (4). Чтобы убедиться в этом рассмотрим величину первого члена этого ряда как функцию параметра μ

$$f(\mu) = \frac{\mu}{1+\mu}.$$

Очевидно, что $f(1)=1/2$, $f'(\mu) > 0$, и, следовательно, при $\mu \geq 1$ значение первого члена ряда будет не меньше 1/2 и условие (5) будет всегда выполняться. ►

Таким образом, чтобы получить все точки предфрактала, относящиеся к Z_m, достаточно зафиксировать доминирующую компоненту a_m и произвольным образом формировать оставшиеся компоненты из членов ряда (4). При этом очевидно, что все перестановки элементов $a_i\ (i \neq m)$ образуют группу преобразований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практическое применение результатов РСИФ при моделировании системных объектов в значительной мере зависит от основных свойств множеств, получаемых в ходе выполнения соответствующей процедуры. Однако присущие результатам те или иные свойств в значительной мере определяются интерпретацией вычислительного эксперимента. В случае, когда результирующее множество рассматривается с точки зрения конструктивного подхода, полученное в результате численной реализации РСИФ множество является счетным множеством нулевой лебеговой меры; последовательностью, расположенной внутри линейной оболочки точек протофрактала.

В то же время, предельное множество – фрактал, является множеством, имеющим мощность континуума; совершенным множеством, т.е. компактным и замкнутым, в общем случае имеющим отличную от нуля лебегову меру [4].

Конечный выбор свойств модели определяется целесообразностью использования результатов моделирования в конкретных системных исследованиях. Так, использование процедур F1 или F2 для задач аппроксимации предполагает рассмотрение свойств предфракталов. В то же время сравнение двух различных фрактальных моделей часто требует знания предельных свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буховец А.Г.* Классификационная задача как задача системного анализа / Буховец А.Г. // – Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии», 2006, № 1, С. 23–31.

2. *Hutcthinson J.E.* Fractals and Self Similararity. Indiana University Mathematics Journal, vol. 30, #5, 1981, pp. 713–747.

3. *Буховец А.Г.* Моделирование фрактальных структур данных / Буховец А.Г., Буховец Е.А. // – Системы управления и информационные технологии, № 3(33), 2008, С. 4–7.

4. *Буховец А.Г.* Использование фрактальных моделей в задачах классификации / Буховец А.Г., Бирючинская Т.Я., Буховец Е.А. // Системы управления и информационные технологии. 2009, 3.1(37), С. 117–121.

5. *Буховец А.Г.* Модели, учитывающие влияние доминирующего фактора / Буховец А.Г., Бирючинская Т.Я., Кораблина Н.А. // Экономическое прогнозирование: модели и методы. Материалы VI Международной научно – практической конференции 6 апреля 2010 г. – Воронеж: ВГУ, 2010. – ч.1, С. 61 – 66.

6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.,Мир, 1967, 251 с.

Буховец А. Г. – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и математических методов в экономике Воронежского государственного аграрного университета имени Императора Петра I. E-mail: abuhovets@mail.ru.

Бирючинская Т. Я. – старший преподаватель кафедры прикладной математики и математических методов в экономике Воронежского государственного аграрного университета имени Императора Петра I. E-mail: grinch.2002@mail.ru

Bukhovetc A. G. – Dr.Sci.Tech., senior lecturer, professor of the Chair of Applied Mathematics and Mathematical Methods in Economy. E-mail: abuhovets@mail.ru.

Biryuchinskay T. Y. – senior teacher of the Chair of Applied Mathematics and Mathematical Methods in Economy. E-mail:grinch.2002@mail.ru