УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Ю. Александров, А. П. Жабко, А. А. Косов

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию

Аннотация. Изучаются некоторые классы нелинейных управляемых механических систем. Предложены новые способы построения стабилизирующих управлений заданной структуры при наличии запаздывания в канале обратной связи. По сравнению со случаем линейных систем, принципиальная особенность результатов, полученных для систем, находящихся под действием существенно нелинейных сил, заключается в том, что асимптотическая устойчивость имеет место для любых значений запаздывания.
Ключевые слова: механические системы, запаздывание, устойчивость, стабилизация, функции Ляпунова.
Annotation. A certain classes of nonlinear controllable mechanical systems are investigated. New approaches for the construction of stabilizing control of the given structure under the delay feedback are suggested. Compared with the case of linear systems, the principal distinctive feature of results obtained for systems subjected to essentially nonlinear forces is that the asymptotic stability holds for any value of delay.
Keywords: mechanical systems, delay, stability, stabilization, Lyapunov functions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Движения широкого класса механических систем описываются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_E+Q_U, \qquad (1)$$

где q и $\dot q$ – n-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей соответственно, T – кинетическая энергия системы, а стоящие в правых частях обобщенные силы представляют собой сумму сил, действующих на систему в ее естественном состоянии (т.е. при отсутствии управления), и управляющих сил [1, 2]. Будем считать, что система имеет положение равновесия $q=\dot q=0$, которое рассматриваем как невозмущенное движение, и основной целью исследования полагаем стабилизацию (обеспечение асимптотической устойчивости) этого положения равновесия относительно всех обобщенных координат q и скоростей $\dot q$.

При рассмотрении задачи стабилизации следует учитывать, что имеющиеся исполнительные органы не всегда обеспечивают возможность реализации управляющих сил произвольной структуры. Таким образом, возникает необходимость решения задачи стабилизации за счет сил иной структуры по сравнению с действующими на систему в ее естественном состоянии [3].

Во многих прикладных задачах действующие на механическую систему силы зависят не только от текущих значений обобщенных координат и скоростей, но и от предыстории процесса. Такие системы могут описываться дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом [2, 4, 5]. При их исследовании требуется учитывать влияние запаздывания на устойчивость решений. Известно, что введение даже малого запаздывания может привести к потере устойчивости [5].

Следует также отметить, что стабилизирующие управления формируются по принципу обратной связи на основе доступной измерению информации. Поскольку измерительное устройство на объекте управления и управляющее устройство, где формируется управляющий сигнал, могут быть разнесены в пространстве на значительное расстояние, то возникает запаздывание в канале обратной связи, которое может быть не малым и принимать различные значения при изменении названного расстояния [2, 6]. Поэтому актуальной является задача нахождения таких стабилизирующих обратных

Работа выполнена при частичной поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 107

связей, которые обеспечат устойчивость решений при любых значениях запаздывания.

В настоящей статье рассматриваются некоторые классы нелинейных механических систем с запаздывающим аргументом. Основным аппаратом исследования является метод функций Ляпунова в форме, предложенной Б. С. Разумихиным [7]. Разработаны способы построения стабилизирующих положения равновесия до асимптотической устойчивости законов управления, в которых допускается запаздывание в канале обратной связи. По сравнению со случаем линейных систем, принципиальная особенность результатов, полученных для систем, находящихся под действием существенно нелинейных сил, заключается в том, что асимптотическая устойчивость имеет место для любых значений запаздывания.

2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗА СЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим задачу стабилизации системы с заданными линейными диссипативными силами с полной диссипацией, нелинейными потенциальными силами и произвольными неконсервативными позиционными силами за счет управляющих потенциальных сил при наличии запаздывания в канале обратной связи. Пусть система (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi_1(q(t))}{\partial q}- \\ -P(t,q(t))q(t)-B\dot q(t)+Q_U. \qquad (2)$$

Здесь B – постоянная симметрическая положительно определенная матрица; потенциал $\Pi_1(q)$ – дважды непрерывно дифференцируемая однородная порядка $\mu+1$, $\mu>1$, функция обобщенных координат; неконсервативные позиционные силы определяются непрерывной кососимметрической матрицей $P(t,q)$.

Будем считать, что исследуемая механическая система подчинена голономным стационарным связям. Тогда ее кинетическая энергия представляет собой квадратичную форму относительно обобщенных скоростей: $T(q,\dot q)=1/2\,\dot q^T A(q)\dot q$. Для кинетической энергии здесь и далее предполагаются выполненными оценки $k_1\|\dot q\|^2\le T(q,\dot q)\le k_2\|\dot q\|^2$, $\left\|\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right\|\le k_3\|\dot q\|$, $\left\|\frac{\partial T}{\partial q}\right\|\le k_4\|\dot q\|^2$, k_1,k_2,k_3,k_4 – положительные постоянные.

Пусть при $Q_U\equiv 0$ положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (2) неустойчиво. В частности, неустойчивость будет иметь место в случае, когда неконсервативные силы отсутствуют, а потенциал не имеет минимума в положении равновесия [1].

Кроме того, предположим, что в некоторой окрестности точки $q=0$ и при всех $t\ge 0$ справедливо неравенство $\|P(t,q)q\|\le p_1\|q\|^\sigma$, $p_1>0$, $\sigma>1$.

Возьмем произвольную дважды непрерывно дифференцируемую однородную порядка $\mu+1$ положительно определенную функцию обобщенных координат $\Pi_2(q)$ и выберем управление в виде

$$Q_U=-\frac{\partial \Pi(q(t-\tau))}{\partial q}, \\ \Pi(q)=\Pi_2(q)-\Pi_1(q), \qquad (3) \\ \tau=const>0.$$

Здесь появление запаздывания в аргументе у обобщенных координат обусловлено задержкой на обработку измерений текущих значений координат при формировании управляющего сигнала.

Таким образом, система (2), замкнутая управлением (3), имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=-B\dot q(t)-\frac{\partial \Pi_2(q(t-\tau))}{\partial q}- \\ -P(t,q(t))q(t)-\left[\frac{\partial \Pi_1(q(t))}{\partial q}-\frac{\partial \Pi_1(q(t-\tau))}{\partial q}\right]. \qquad (4)$$

Теорема 1. Если $2\sigma>\mu+1$, то положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (4) асимптотически устойчиво при любом значении $\tau>0$.

Доказательство. Рассмотрим в качестве функции Ляпунова выражение

$$V(q,\dot q)=\frac{1}{2}q^T Bq+q^T\frac{\partial T}{\partial \dot q}+\beta T. \qquad (5)$$

Здесь β – положительный параметр. Получим

$$\dot V\,|_{(4)}=-(\mu+1)\Pi_2(q(t))-\beta\dot q^T(t)B\dot q(t)+ \\ +2T(q(t),\dot q(t))+q^T(t)\frac{\partial T(q(t),\dot q(t))}{\partial q}- \\ -\beta\dot q^T(t)\frac{\partial \Pi_2(q(t))}{\partial q}-\beta\dot q^T(t)P(t,q(t))q(t)+ \\ +\left(q(t)+\beta\dot q(t)\right)^T\times\left(\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q}-\frac{\partial \Pi(q(t-\tau))}{\partial q}\right).$$

Для функции $V(q,\dot q)$ и ее производной в силу системы (4) справедливы оценки

$$a_1\left(\| q \|^2 + \beta \| \dot q \|^2\right) - k_3 \| q \| \| \dot q \| \le V(q,\dot q) \le$$
$$\le a_2\left(\| q \|^2 + \beta \| \dot q \|^2\right) + k_3 \| q \| \| \dot q \|,$$
$$\dot V\big|_{(4)} \le -a_3\left(\| q(t) \|^{\mu+1} + \beta \| \dot q(t) \|^2\right) +$$
$$+2k_2 \| \dot q(t) \|^2 + k_4 \| q(t) \| \| \dot q(t) \|^2 +$$
$$+a_4\beta \| q(t) \|^{\mu} \| \dot q(t) \| + \beta p_1 \| q(t) \|^{\sigma} \| \dot q(t) \| +$$
$$+(\| q(t) \| + \beta \| \dot q(t) \|)\left\| \frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} - \frac{\partial \Pi(q(t-\tau))}{\partial q} \right\|,$$

где положительные постоянные a_1, a_2, a_3, a_4 не зависят от выбора значения параметра β.

Покажем, что существует число $\beta_0 > 0$ такое, что при всех $\beta \ge \beta_0$ функция $V(q,\dot q)$ удовлетворяет требованиям теоремы 31.4 из работы [4] об асимптотической устойчивости систем с запаздыванием.

Задаем числа $\alpha > 1$ и $\delta > 0$. Предположим, что при $\xi \in [t-\tau, t]$ выполнены соотношения $\| q(\xi) \| < \delta$, $\| \dot q(\xi) \| < \delta$, $V(q(\xi), \dot q(\xi)) < \alpha V(q(t), \dot q(t))$. Тогда при достаточно больших значениях β и всех $\xi \in [t-\tau, t]$ имеем

$$\frac{a_1}{2}\left(\| q(\xi) \|^2 + \beta \| \dot q(\xi) \|^2\right) \le$$
$$\le V(q(\xi), \dot q(\xi)) \le$$
$$\le 2a_2\left(\| q(\xi) \|^2 + \beta \| \dot q(\xi) \|^2\right),$$

$$\| q(\xi) \| < 2\sqrt{\frac{\alpha a_2}{a_1}}\left(\| q(t) \| + \sqrt{\beta} \| \dot q(t) \|\right),$$
$$\| \dot q(\xi) \| < 2\sqrt{\frac{\alpha a_2}{a_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \| q(t) \| + \| \dot q(t) \|\right). \qquad (6)$$

Используя неравенства (6) и формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$\left\| \frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} - \frac{\partial \Pi(q(t-\tau))}{\partial q} \right\| =$$
$$= \tau \left\| \frac{\partial^2 \Pi(q(t-\theta\tau))}{\partial q^2} \dot q(t-\theta\tau) \right\| \le$$
$$\le c\left(\| q(t) \|^{\mu-1} + \beta^{\frac{\mu-1}{2}} \| \dot q(t) \|^{\mu-1}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \| q(t) \| + \| \dot q(t) \|\right).$$

Здесь $c > 0$, $0 < \theta < 1$.

Следовательно [8, с. 187–191], положительные числа β_0 и δ_0 можно выбрать так, чтобы при $\beta \ge \beta_0$ и $0 < \delta < \delta_0$ выполнялось неравенство

$$\dot V(q(t), \dot q(t)) \le -\frac{a_3}{2}\left(\| q(t) \|^2 + \beta \| \dot q(t) \|^2\right).$$

Значит [4, с. 185–186], положение равновесия $q = \dot q = 0$ уравнений (4) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 утверждает, что асимптотическая устойчивость положения равновесия может иметь место и в случае, когда порядок неконсервативных сил меньше порядка однородности потенциальных сил.

Пример 1. Рассмотрим движение материальной точки единичной массы в трехмерном пространстве, пусть x и $\dot x$ – координаты и скорости точки соответственно. Будем считать, что на точку действуют ортогональная к радиус-вектору сила $P(x) = -\|x\|^{\sigma-1}(r \times x)$ и сила сопротивления $D(\dot x) = -b\dot x$. Здесь $b > 0$ и $\sigma \ge 1$ – некоторые положительные числа, а r – постоянный ненулевой вектор. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot x + b\dot x + \|x\|^{\sigma-1}(r \times x) = Q_U. \qquad (7)$$

В качестве управления выберем направленную к началу координат силу

$$Q_U = -k\|x(t-\tau)\|^{\mu-1} x(t-\tau),\ k > 0,\ \mu > 1,$$

формируемую по измерениям координат с некоторым запаздыванием τ.

Из теоремы 1 следует, что если $\mu > 1$, $2\sigma > \mu + 1$, то положение равновесия $x = \dot x = 0$ системы (7) будет асимптотически устойчивым при любом векторе r и любой величине запаздывания $\tau > 0$. Заметим, что в случае линейных позиционных сил $(\mu = \sigma = 1)$, во-первых, в зависимости от выбора вектора r, положение равновесия может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым и, во-вторых, устойчивость при произвольном значении запаздывания гарантировать нельзя.

3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ В СЛУЧАЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ МАТРИЦ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ И ЦИРКУЛЯРНЫХ СИЛ

Рассмотрим теперь случай, который отличается от рассмотренного в предыдущем разделе наличием в системе гироскопических сил с кососимметрической матрицей, пропорциональной матрице циркулярных сил.

Считаем, что система (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi_1(q(t))}{\partial q}- \\ -P(t,q(t))q(t)-B\dot q(t)-G\dot q(t)+Q_U. \qquad (8)$$

Здесь кососимметрическая матрица G гироскопических сил определяется по формуле $G=\beta P(t,q)$, где β – постоянный положительный параметр, а все остальные обозначения те же, что в системе (2).

Стабилизирующее управление по-прежнему выбираем в виде (3).

Теорема 2. Для любого $\tau>0$ существует $\beta_0>0$ такое, что при всех $\beta\ge\beta_0$ положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (8), замкнутой управлением (3), будет асимптотически устойчивым.

Доказательство. Снова рассмотрим функцию Ляпунова (5). Дифференцируя ее в силу замкнутой системы, получаем

$$\dot V=-(\mu+1)\Pi_2(q(t))-\beta\dot q^T(t)B\dot q(t)+ \\ +2T(q(t),\dot q(t))+q^T(t)\frac{\partial T(q(t),\dot q(t))}{\partial q}- \\ -\beta\dot q^T(t)\frac{\partial \Pi_2(q(t))}{\partial q}+\left(q(t)+\beta\dot q(t)\right)^T\times \\ \times\left(\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q}-\frac{\partial \Pi(q(t-\tau))}{\partial q}\right).$$

Следовательно, справедливы оценки

$$a_1\left(\|q\|^2+\beta\|\dot q\|^2\right)-k_3\|q\|\|\dot q\|\le V(q,\dot q)\le \\ \le a_2\left(\|q\|^2+\beta\|\dot q\|^2\right)+k_3\|q\|\|\dot q\|,$$

$$\dot V\le -a_3\left(\|q(t)\|^{\mu+1}+\beta\|\dot q(t)\|^2\right)+ \\ +2k_2\|\dot q(t)\|^2+k_4\|q(t)\|\|\dot q(t)\|^2+ \\ +a_4\beta\|q(t)\|^{\mu}\|\dot q(t)\|+(\|q(t)\|+ \\ +\beta\|\dot q(t)\|)\left\|\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q}-\frac{\partial \Pi(q(t-\tau))}{\partial q}\right\|,$$

где положительные постоянные a_1, a_2, a_3, a_4 не зависят от выбора значения параметра β.

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 1, нетрудно показать, что для любого фиксированного $\tau>0$ найдется число $\beta_0>0$ такое, что при всех $\beta\ge\beta_0$ функция $V(q,\dot q)$ удовлетворяет требованиям теоремы 31.4 из работы [4]. Следовательно, положение равновесия $q=\dot q=0$ замкнутой системы будет асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что в теореме 2 неконсервативная компонента силового поля может быть даже линейной и иметь неограниченно растущий со временем коэффициент, она не компенсируется и ничем не подавляется, поскольку порядок однородности потенциальной компоненты может быть как угодно высоким.

4. СТАБИЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

Пусть система (1) имеет вид

$$A_0\ddot q(t)+(hB+G)\dot q(t)=Q_U. \qquad (9)$$

Здесь A_0 и B – постоянные симметрические положительно определенные матрицы соответственно инерциальных характеристик и диссипативных сил; G – постоянная неособая кососимметрическая матрица гироскопических сил; h – большой положительный параметр.

При отсутствии управления ($Q_U\equiv 0$) положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (9) устойчиво, но не является асимптотически устойчивым. Требуется построить закон управления в виде обратной связи, обеспечивающий асимптотическую устойчивость этого положения равновесия.

В данном разделе будем считать, что имеющиеся исполнительные органы таковы, что управляющими являются неконсервативные силы, причем задержки при обработке сигналов приводят к запаздыванию в контуре управления. Таким образом,

$$Q_U=R(q(t-\tau)), \qquad (10)$$

где

$$q^TR(q)=0, \qquad (11)$$

а $\tau>0$ – постоянное запаздывание.

Теорема 3. Пусть $R(q)$ – непрерывно дифференцируемая однородная порядка $\mu>1$ вектор-функция, удовлетворяющая условию (11), для которой функция $q^TGB^{-1}R(q)$ положительно определена. Тогда существует число $h_0>0$ такое, что при $h\ge h_0$ положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (9), замкнутой управлением (10), будет асимптотически устойчивым при любом значении $\tau>0$.

Доказательство. В работе [9] получены условия асимптотической устойчивости положений равновесия нелинейных механических систем с запаздываниями в позиционных силах. Покажем, что при достаточно больших значениях h замкнутая система удовлетворяет требованиям теоремы 1 из [9].

Рассмотрим две изолированные подсистемы

$$A_0\dot z(t)=-(hB+G)z(t), \qquad (12)$$

$$(hB + G)\dot{y}(t) = R(y(t)). \quad (13)$$

С помощью функции Ляпунова $V_1(z) = z^T A_0 z$ нетрудно проверить, что подсистема (12) асимптотически устойчива при любом $h > 0$.

Подсистему (13) можно представить в виде

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{h} B^{-1} R(y(t)) - \frac{1}{h^2} B^{-1} G B^{-1} R(y(t)) + + \frac{1}{h^2} (hB + G)^{-1} \left(GB^{-1}\right)^2 R(y(t)).$$

Рассмотрим положительно определенную функцию $V_2(y) = y^T B y$. Существует число $h_0 > 0$ такое, что при $h \geq h_0$ производная функции $V_2(y)$ в силу (13) отрицательно определена. Значит, нулевое решение этой системы будет асимптотически устойчивым.

Таким образом, если h достаточно велико, то выполнены все условия теоремы 1 из работы [9], откуда следует асимптотическая устойчивость положения равновесия замкнутой системы. Теорема доказана.

Замечание 3. В частности, функцию $R(q)$, удовлетворяющую условиям теоремы 3, можно выбрать в виде $R(q) = a \| q \|^{\mu - 1} Gq$, где $a > 0$, $\mu > 1$.

5. ОДНООСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В качестве приложения предложенных в настоящей статье подходов рассмотрим задачу управления вращательным движением твердого тела.

Пусть задано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O, расположенной в его центре инерции. Предположим, что с телом связаны оси $Oxyz$, которые служат главными центральными осями этого тела. Уравнения вращательного движения под действием момента M имеют вид

$$\Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta \omega(t) = M, \quad (14)$$

где ω – вектор угловой скорости, $\Theta = \mathrm{diag}\{A, B, C\}$ – тензор инерции тела, A, B, C – главные центральные моменты инерции [6].

Пусть имеются два орта r и s. Вектор s будем считать неизменным в абсолютном пространстве, вектор r – постоянным в твердом теле. Тогда вектор s вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\omega$. Следовательно,

$$\dot{s}(t) = -\omega(t) \times s(t). \quad (15)$$

Предположим, что момент M складывается из момента сил сопротивления M_c и управляющего момента M_u : $M = M_c + M_u$. Момент сил сопротивления будем считать заданным формулой $M_c = -B\omega$, где B – постоянная симметрическая положительно определенная матрица.

Управляющий момент M_u требуется выбрать по принципу обратной связи ($M_u = M_u(\omega, s)$) так, чтобы обеспечить одноосную стабилизацию твердого тела в заданном направлении вектора s [6]: система уравнений (14), (15) должна иметь асимптотически устойчивое положение равновесия $\omega = 0$, $s = r$.

Известно [6], что для решения поставленной задачи момент M_u можно определить по формуле $M_u = -as \times r$, $a = const > 0$. Предположим теперь, что задержки при измерении координат вектора $s(t)$, передаче измеряемых значений в управляющее устройство, формировании управляющего сигнала и его передаче на исполнительное устройство приводят к запаздыванию в канале обратной связи. Поэтому в управлении вместо $s(t)$ будет реально использоваться $s(t - \tau)$, где $\tau > 0$ – постоянное запаздывание. Тогда при линейном управляющем моменте существуют значения τ, при которых положение равновесия замкнутой системы является неустойчивым [5].

Выберем теперь нелинейный закон управления

$$M_u = -a \| s \times r \|^{\mu - 1} (s \times r),$$

где $a > 0$, $\mu > 1$.

Таким образом, рассмотрим систему, состоящую из динамических уравнений

$$\Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta \omega(t) = = -B\omega(t) - a \| s(t - \tau) \times r \|^{\mu - 1} \times \times (s(t - \tau) \times r) \quad (16)$$

и кинематических уравнений (15).

Теорема 4. Положение равновесия $\omega = 0$, $s = r$ системы (15), (16) асимптотически устойчиво при любом значении $\tau > 0$.

Доказательство. Функцию Ляпунова строим в виде

$$V(\omega, s) = \frac{\beta}{2} \omega^T \Theta \omega + \frac{1}{2} \| s - r \|^2 + +(s \times r)^T B^{-1} \Theta \omega, \quad \beta = const > 0.$$

Дифференцируя ее в силу системы (15), (16), имеем

$$\dot{V} = -\beta\omega^T(t)B\omega(t) - a \| s(t-\tau) \times$$
$$\times r \|^{\mu-1} (s(t)\times r)^T B^{-1}(s(t-\tau)\times r) -$$
$$-\beta a \| s(t-\tau)\times r \|^{\mu-1} \omega^T(t)(s(t-\tau)\times r) -$$
$$-((\omega(t)\times s(t))\times r)^T B^{-1}\Theta\omega(t) -$$
$$-(s(t)\times r)^T B^{-1}(\omega(t)\times \Theta\omega(t)).$$

Таким образом, справедливы оценки

$$a_1\left(\beta \| \omega \|^2 + \| s-r \|^2\right) - a_3 \| \omega \| \times$$
$$\times \| s-r \| \le V(\omega,s) \le$$
$$\le a_2\left(\beta \| \omega \|^2 + \| s-r \|^2\right) + a_3 \| \omega \| \| s-r \|,$$
$$\dot{V} \le -a_4\left(\beta \| \omega(t) \|^2 + \| s(t)\times r \|^{\mu+1}\right) +$$
$$+a_5(\| \omega(t) \|^2 \| s(t)-r \| + \| \omega(t) \|^2 +$$
$$+\beta \| \omega(t) \| \| s(t)\times r \|^{\mu}) +$$
$$+a_6\left(\| s(t)-r \| + \beta \| \omega(t) \|\right)\times$$
$$\times\Big\| \| s(t-\tau)\times r \|^{\mu-1} (s(t-\tau)\times r) -$$
$$- \| s(t)\times r \|^{\mu-1} (s(t)\times r)\Big\|.$$

Здесь a_i, $i = 1,\dots,6$, – положительные постоянные, не зависящие от выбранного значения параметра β.

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 1, получаем, что если β достаточно велико, то функция $V(\omega,s)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 31.4 из работы [4]. Следовательно, положение равновесия $\omega = 0$, $s = r$ уравнений (15), (16) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложены новые способы построения стабилизирующих управлений заданной структуры для некоторых классов нелинейных механических систем с запаздывающим аргументом.

Следует отметить, что построенные в разделах 2, 4 и 5 управления обеспечивают асимптотическую устойчивость положений равновесия рассматриваемых систем для любого значения запаздывания, в то время как в разделе 3 диапазон допустимых запаздываний зависит от коэффициента пропорциональности β.

Анализ доказательств теорем 1–4 показывает, что они остаются справедливы, когда запаздывание является непрерывной ограниченной и неотрицательной функцией времени. Кроме того, результаты данной работы могут быть распространены на нелинейные механические системы с распределенным запаздыванием, а также на некоторые другие типы существенно нелинейных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

2. *Воротников В. И., Румянцев В. В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.

3. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Доклады АН СССР. 1952. Т. 86. 1. С. 31–34.

4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

5. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

7. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 500–512.

8. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судостроение, 1959.

9. *Александров А. Ю., Жабко А. П., Косов А. А.* Об устойчивости и стабилизации нелинейных механических систем с запаздыванием // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7. 4. С. 121–126.

Александров Александр Юрьевич – заведующий кафедрой управления медико-биологическими системами СПбГУ, д.ф.-м.н., профессор. Тел. 8-812-428-45-08. E-mail: alex43102006@yandex.ru

Жабко Алексей Петрович – заведующий кафедрой теории управления СПбГУ, д.ф.-м.н., профессор. Тел. 8-812-428-48-68. E-mail: zhabko@apmath.spbu.ru

Aleksandrov Alexander Yurjevich – Dr. Sc. (Phys. & Math.) Full Prof., Head of Dept. of Medical and Biological Systems Control of St. Petersburg State University. Tel. 8-812-428-45-08. E-mail: alex43102006@yandex.ru

Zhabko Alexey Petrovich – Dr. Sc. (Phys. & Math.) Full Prof., Head of Dept. of Control Theory of St. Petersburg State University. Tel. 8-812-428-48-68. E-mail: zhabko@apmath.spbu.ru

Косов Александр Аркадьевич – ведущий научный сотрудник института Динамики систем и теории управления СО РАН, к.ф.-м.н, доцент. Тел. 8-3952-42-71-00. E-mail: aakosov@yandex.ru.

Kosov Alexander Arkadjevich – Ph. D. (Phys. & Math.) Ass. Prof., leading researcher of Institute of System Dynamic and Control Theory, Siberian Branch of RAS. Tel. 8-3952-42-71-00. E-mail: aakosov@yandex.ru