УДК 519.8

ДЕФАЗЗИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. Г. Матвеев*, М. Е. Семенов, О. И. Канищева**, Е. А. Абаполова****

**Воронежский государственный университет*
***Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)*

Поступила в редакцию 29.03.2011 г.

Аннотация. В работе приводится метод дефаззификации нечетких решений дифференциальных уравнений, правые части которых зависят от нечеткого параметра. Устанавливаются основные свойства наиболее надежных на α -уровне решений.
Ключевые слова: нечеткие параметры, дифференциальные уравнения, дефаззификация, α -уровень.
Annotation. The defuzzification method of fuzzy decisions of the differential equations with fuzzy parameter is resulted. The basic properties of the most reliable at α -level of decisions are established.
Key words: fuzzy parameter, differential equations, defuzzification, α -level.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений с нечеткими параметрами естественным образом возникают как математические модели динамических процессов, параметры которых либо неизвестны (имеется лишь априорная информация о диапазонах их значений), либо являются трудноформализуемыми функциями многих факторов (в том числе, возможно, и решений). Один из возможных подходов к таким уравнениям заключается в трактовке их параметров как реализаций некоторых случайных процессов [1]. В этом случае, обычно находят средние характеристики решений (как правило, моменты первого и второго порядка) при априори известных законов распределения [1]. Однако, зачастую возникают ситуации (например в метеорологии, экономике) когда в течении достаточно длительного времени параметры системы остаются стабильными, но не диагностируемыми. В этом случае из «физических соображений» их удобно трактовать как нечеткие.

Отдельный важный класс систем дифференциальных уравнений с нечеткими параметрами составляют математические модели систем автоматического регулирования и оптимального управления априорными неизвестными параметрами. Примеры таких процессов и систем в большом количестве содержатся в самых разных предметных областях [2]. В настоящей работе мы ограничимся лишь двумя.

Первый из них касается метеорологии. Известно [3], что зависимость атмосферного давления p от вертикальной координаты z в адиабатическом приближении определяется соотношением

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{H}p,\ p(z=0) = p_0, \tag{1}$$

где H – высота пограничного слоя атмосферы (вертикальный масштаб атмосферы). Параметр H практически невозможно точно определить: он зависит от многих факторов – температуры, плотности воздуха, преобладающих характеристик горизонтального движения воздушных масс и т. д. Поэтому естественно $\frac{1}{H}$ трактовать как нечеткий параметр с некоторой функцией принадлежности.

Второй пример – математическая модель задачи об оптимальном производстве, сбыте и хранении продукции в условиях неизвестных параметров функции спроса. Математическая модель этой задачи сводится к системе [4]:

$$\dot{x} = u - P,\ \ x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$\dot{v} = P - k_1 v,\ \ v(0) = v_0 \tag{4}$$

с функционалом качества

$$J = \int_0^T (c(t)\cdot P(t) - k_2 \cdot u(t) - \\ -k_3 \cdot x(t))dt \to \max, \tag{5}$$

означающим желание производителя максимизировать свою прибыль на временном интервале $[0,T]$. Здесь $x(t)$ – количество товара у производителя, $v(t)$ – количество товара у потребителя, $u=u(t)$ – темп производства ($u\in[0,u_0]$), $\mathrm{P}=\mathrm{P(t)}$ – темп продаж, $c(t)$ – цена единицы товара, k_1 – коэффициент потребления, k_2 – стоимость производства единицы товара, k_3 – коэффициент затрат на хранение единицы товара.

В простейшем случае темп продаж является линейной функцией цены

$$P = x(a-bc)\,. \tag{6}$$

При этом экспертные оценки, как правило, дают лишь диапазон значений a и b. Поэтому естественно их трактовать как нечеткие числа.

Дифференциальные уравнения с различными нечеткостями начали изучаться сравнительно недавно. Первые теоремы (о существовании и единственности) содержатся в работе [5]. Впоследствии нечеткие дифференциальные уравнения, трактуемые как нечеткие дифференциальные включения, изучались в работах [6–10]. В одной из первых работ [11], посвященных дифференциальным уравнениям с нечеткими параметрами содержится определение нечеткого решения, понимаемого как воронка решений, соответствующих множеству значений нечеткого параметра из носителя функции принадлежности. В настоящей работе мы будем следовать основным положениям этой статьи.

Как известно, нечеткие решения являются «надежными», в том смысле, что возможный (реализуемый) результат наверняка содержится в этом множестве, однако для практических целей важно иметь представление о среднем (наиболее надежном) решении. Его иногда можно получить с помощью процедуры дефаззификации. Известно несколько таких методов [12], отражающих в той или иной мере субъективные предпочтения ЛПР. Ниже предлагается новый метод дефаззификации решений дифференциальных уравнений, который, по мнению авторов, в меньшей степени субъективен по сравнению с упомянутыми выше.

В дальнейшем, одним из центральных будет вопрос о наиболее надежном решении на определенном уровне надежности $\alpha\in[0;1]$. Для решения поставленной задачи нам понадобятся некоторые вспомогательные построения.

1. α-МЕРА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть A – нечеткое множество (нечеткое число), определяемое своей функцией принадлежности $\mu_A(x)$ $(x\in R)$. α-уровнем (α-срезкой) множества A называется четкое множество: $A^\alpha \equiv \{x:\mu_A(x)\ge\alpha\}$.

В дальнейшем, будем предполагать, что носитель множества A ограничен. При выполнении неограничительного в прикладных задачах требования об измеримости по Лебегу функции $\mu_A(x)$ для любого $\alpha\in[0;1]$ определена мера $m(\alpha)\equiv m_A(A^\alpha)$.

α-мерой нечетного множества A назовем отображение отрезка $[0;1]$ в $R^1:\alpha\to m(\alpha)$. Меры нечетких множеств, традиционно используемые для решения прикладных задач, характеризуют, прежде всего, степень «размытости» или нечеткости множества [13]. Приведенное определение α-меры также содержит информацию о размытости, но помимо этого позволяет при выполнении некоторых предположений о функции принадлежности по α-мере восстанавливать нечеткие множества. Перечислим основные свойства α-меры:

1. Пусть задано нечеткое включение [11] $A\in\bigcup\limits_n A_n$, тогда для любого $\alpha\in[0;1]$

$$m_A(\alpha)\le\sum_n m_{A_n}(\alpha)\,. \tag{7}$$

Доказательство: Из определения нечеткого включения следует

$\mu_A(x)\le\mu_{\bigcup\limits_n A_n}(x)$ для всех $x\in R$. Тогда для любого $\alpha\in[0;1]$

$$m_A(\alpha)\le\sum_n m_{A_n}(\alpha)\,.$$

2. Если в условиях свойства 1. Нечеткие множества $\mathrm{A_n}$ не пересекаются, то соотношение (7) выполняется как равенство.

Действительно в этом случает для любого α четкие множества A_n^α не пересекаются и $A^\alpha=\bigcup\limits_n A_n^\alpha$. В силу свойства Лебеговой меры

$$m(A^\alpha)=\sum_n m_{A_n}(\alpha)\,.$$

3. Пусть $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n\subset\ldots$ – вложенные нечеткие множества с компактными носителями и непрерывными функциями принадлежности $\alpha_{A_n}(x)$ и $A\in\bigcap\limits_n A_n$. Тогда последовательность функций $m_{A_n}(\alpha)$ равномерно сходится к функции $m_A(\alpha)$ $(\alpha\in[0;1])$.

Доказательство: Установим сначала, равномерную сходимость $\mu_{A_n}(x) \Rightarrow \mu_A(x)$. Поточечная сходимость вытекает из условия. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, для любого x найдется такой номер $N = N(x,\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$ будет выполнено

$$\mu_A(x) \leq \mu_{A_n}(x) \leq \mu_A(x) + \varepsilon. \qquad (8)$$

Отметим, что соотношение (8) достаточно рассмотреть лишь на компактном носителе нечеткого множества A. В силу непрерывности $\mu_{A_n}(x)$ неравенство (8) будет выполнено на некотором интервале $S(x)$, содержащем точку x. Множество этих интервалов образует открытое покрытие множества A^0 – носителя $\mu_A(x)$. В силу его компактности и леммы Гейне-Бореля из множества $S(x)$ можно выделить конечное подпокрытие $S(x_1), S(x_2), ..., S(x_m)$. Из натуральных чисел $N(x_1,\varepsilon), N(x_2,\varepsilon), ..., N(x_m,\varepsilon)$ выберем максимальное – $N(\varepsilon)$, тогда в силу монотонного убывания последовательности $\mu_{A_n}(x)$ неравенство (8) будет выполнено сразу для всех $x \in R$ при $n \geq N(\varepsilon)$. Отметим, что тем самым доказана и непрерывность $\mu_A(x)$. Из равномерной сходимости $\mu_{A_n}(x) \Rightarrow \mu_A(x)$ следует, что для любого $\alpha \in [0;1]$ имеет место поточечная сходимость $m(A_n^\alpha) \to m(A^\alpha)$, кроме того выполняются неравенства $m(A_n^\alpha) \geq m(A_{n+1}^\alpha)$ для любого n – т е. последовательность функций $m(A_n^\alpha)$ монотонно убывает. В силу непрерывности $\mu_{A_n}(x)$ функции $m(A_n^\alpha)$ также непрерывны. Поэтому для завершения доказательства достаточно повторить приведенные выше рассуждения применительно к последовательности функций $m(A_n^\alpha)$.

4. Для любого $\alpha \in [0;1]$

$$m_{A\bigcup B}(\alpha) \geq \max\{m_A(\alpha); m_B(\alpha)\},$$

$$m_{A\bigcap B}(\alpha) \leq \min\{m_A(\alpha); m_B(\alpha)\}.$$

Эти неравенства являются прямым следствием определения α-меры и операций объединения и пересечения нечетких множеств.

2. ДЕФАЗЗИФИКАЦИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Для нахождения наиболее «надежных» значений нечетких параметров или чисел используется процедура дефаззификации. Отметим в этой связи метод, предложенный в [12], определяющий наиболее надежное значение нечеткого числа соотношением

$$< A >_\alpha = \int_0^1 AverageA^\alpha d\alpha,$$

где $AverageA^\alpha$ – некая интегральная характеристика A^α. В простейшем случае, трапециевидных нечетких чисел она выбиралась как полусумма значений аргументов функций принадлежности, принимающей значение $\alpha \in [0;1]$. Этот метод позволяет находить интегральное наиболее надежное значение нечеткого числа. В прикладных задачах часто требуется найти наиболее надежное значение на определенном уровне значимости $\alpha \in [0;1]$. В этом случае используются различные модификации метода центра тяжести:

$$< A >_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \alpha_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_A(x_i)}, \qquad (9)$$

где $x_i \in A^\alpha$. Выбор значений x_i всяких раз составляет отдельную задачу и, в известной мере, достаточно субъективен.

Несложно заметить, что при домножении числителя и знаменатель (9) на $\Delta x_i = \frac{m_A(\alpha)}{n}$ и соответствующем выборе точек x_i это соотношение превратится в отношение интегральных сумм функции $x \cdot \mu_A(x)$ и $\mu_A(x)$ на множестве A^α. В силу непрерывности $\mu_A(x)$ возможен предельный переход при $n \to \infty$, который приводит к соотношению:

$$< A >_\alpha = \frac{\int_{A^\alpha} x \cdot \mu_A(x)dx}{\int_{A^\alpha} \mu_A(x)dx}. \qquad (10)$$

Это соотношение будем считать определением среднего значения нечеткого числа A на α-уровне. Отметим, что если $\alpha = 1$, то соотношение (10) понимается в предельном смысле $\alpha \to 1$.

Простейшие свойства α-средних вытекают из определения:

1. При непрерывной $\mu_A(x)$ $< A >_\alpha$ непрерывно зависит от параметра α.

2. Если k – четкое число, то

$$< A + k >_\alpha = < A >_\alpha + k.$$

3. Для четкого числа k $< kA >_\alpha = k < A >_\alpha$.

В силу нелинейности по отношению к функции принадлежности для нечетких чисел аналогичные свойства выполняются невсегда.

4. Если $\mu_A(x)$ определяет симметричное нормальное треугольное нечеткое число, то для любого α $< A >_\alpha$ совпадает с его модой.

3. Дифференциальные уравнения с нечеткими параметрами и их дефаззификация

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = f(y, t, A),\ y(0) = y_0 \qquad (11)$$

с нечетким параметром A. Относительно функции $f : R^1 \times R^1 \times R^1 \to R^1$ будем предполагать выполненными следующие предположения:

1) Функция $f(y, t, x)$ непрерывна со своими производными f'_x и f'_y по совокупности переменных на множестве $G = R^1 \times [0; +\infty) \times A^0$ (напомним, что A^0 – компактное множество – носитель функции принадлежности $\mu_A(x)$.

2) Функция f глобально липшицуема по первому аргументу.

3) Для любого фиксированного $x \in A^0$ решение уравнения (11) существует, единственно и нелокально продолжимо в сторону бесконечного времени.

Следуя [11], нечетким решением уравнения (11) назовем множество четких решений

$$Y(t) \equiv \{y : y = \psi(t, x); \psi(0, x) = y_0)\}, \qquad (12)$$

уравнения (11) при всех $x \in A^0$.

При этом степенью надежности всякого решения из множества (12) будем считать соответствующее значение $\mu_A(x)$. Также, следуя [13], α-уровнем множества Y при всяком фиксированном t, назовем

$$Y^\alpha(t) \equiv \{y : y = \psi(t, x);\ x \in A^\alpha\}. \qquad (13)$$

Структура этого множества в общем случае может быть весьма сложной.

Для каждого $t > 0$ и каждого $\alpha \in [0;1]$ определим α-среднее решений уравнения (11):

$$y_\alpha(t) =< Y(t) >_\alpha = \frac{\int\limits_{A^\alpha} \psi(t, x) \cdot \mu_A(x) dx}{\int\limits_{A^\alpha} \mu_A(x) dx}. \qquad (14)$$

Эту функцию естественно трактовать как среднее (наиболее надежное значение) решения уравнения (11) на α-уровне. Эта формула, с учетом нормировки фактически определяет математическое ожидание решения во всякий момент $t \geq 0$.

Несложно показать, что функция $y_\alpha(t)$ непрерывна по совокупности переменных. Действительно, в работе [10] показано, что в сделанных предположениях Хаусдорфово расстояние $H[Y^\alpha(t), Y^{\alpha_1}(t)]$ непрерывно зависит от $\alpha - \alpha_1$. Из этого факта и непрерывной зависимости решений от параметра вытекает непрерывность $y_\alpha(t)$ (однако, дифференцируемость по параметру α имеет место не всегда).

В заключении рассмотрим один простой пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = Ay,\ y(0) = 1, \qquad (15)$$

где A – нечеткий параметр, функция принадлежности которого показана на рис. 1.

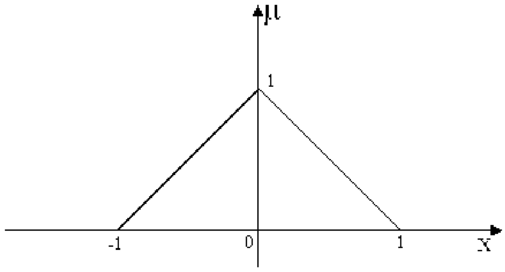

Рис. 1. Функция принадлежности параметра A

Уравнение (15) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1). В рассматриваемом случае множество G имеет вид

$$G = (0; e^T] \times [0; T] \times (-1; 1)$$

при $t \leq T$.

Нечетким решением уравнения (15) будет множество экспонент при всяком $t > 0$, принадлежащих отрезку $[e^{-t}; e^t]$. Несложные вычисления позволяют получить наиболее надежное решение на нулевом уровне:

$$y_0(t) = \frac{sh^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}.$$

Отметим, что $\lim\limits_{t \to +0} y_0(t) = 1$. Среднее значение на α-уровне $\alpha \in [0;1]$ будет определяться соотношением:

$$y_\alpha(t) = \left(\frac{\alpha}{t}\left(e^{t(1-\alpha)} - e^{t(\alpha-1)}\right) + \frac{sh^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} \right) \times \frac{1}{1-\alpha^2}. \qquad (16)$$

Значение $x = 0$ в рассматриваемом случае является наиболее надежным значением параметра A на любом α-уровне. Поэтому интересен вопрос о сходимости средних решений на α-уровне (16) к решению уравнения (15) при $x = 0$. В рассматриваемом случае эта сходимость имеет место:

$$\lim_{\alpha\to 1-0} y_\alpha(t) = 1.$$

При этом, очевидно, что равномерной на $[0;+\infty)$ сходимости не будет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод дефаззификации дифференциальных уравнений с нечеткими параметрами можно распространить на дифференциальные уравнения произвольного порядка и системы дифференциальных уравнений. Также можно считать нечеткими начальные условия соответствующих систем и уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний В. Г.* Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В. Г. Задорожний; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2000. – 368 с.

2. *Семенов Б. А.* Многокритериальная оптимизация на основе нечеткой логики / Б. А. Семенов, Т. М. Леденева // Системы управления и информ. технологии. – М. ; Воронеж : Науч. кн., 2009. – №1 (35). – С. 43-47.

3. *Матвеев Л. Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы / Л. Т. Матвеев. – СПб, Гидрометеоиздат, 2000. – 751 с.

4. *Семенов М. Е.* Оптимальное управление в задаче о выборе производственной и ценовой стратегии / М. Е. Семенов, Г. Н. Лебедев, М. Г. Матвеев // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 4.1 (38). – С. 71-73.

5. *Park J. Y.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations, Internat / J. Y. Park, H. K. Han//. J. Math. and Math. Sci., 22, No. 2 (1999), pp. 271-279.

6. *Kaleva O.* O notes on fuzzy differential equations / O. Kaleva // Nonlinear Analysis, 64 (2006), pp. 895-900.

7. *Kaleva O.* The Peano Theorem for fuzzy differential equations revisited / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems, 98 (1998), pp. 147-148.

8. *Lakshmikantham V.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi // Cambridge Scientific Publishers, Cambridge (2006), pp. 234-238.

9. *Kermani M. Afshar* Numerical method for fuzzy partial differential equations / M. Afshar Kermani, F. Saburi // Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 27, pp. 1299-1309.

10. *Arara A.* Fuzzy solutions for boundary value problems with integral boundary conditions / A. Arara, M. Benchohra // Acta math. univ. comenianae Vol. LXXV, 1(2006), pp. 119-126.

11. *Oberguggenberger M.* Differential Equations with Fuzzy Parameters . / M. Oberguggenberger, S. Pittschmann // Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems. 1999. V. 5. P. 181–202.

12. *Detyniecki M.* Ranking fuzzy numbers using alpha-weighted valuations / M. Detyniecki, R. R. Yager // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, vol. 8 (5), pp. 573 –592, 2001.

13. *Яхъяева Г. Э.* Нечеткие множества и нейронные сети / Г. Э. Яхъяева. – М.: Изд-во Интернет-университет информационных технологий – ИНТУИТ, 2006. – 320 с.

Матвеев Михаил Григорьевич – профессор, доктор технических наук. Воронежский государственный университет. E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Семенов Михаил Евгеньевич – профессор, доктор физико-математических наук. Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж). E-mail: mkl150@mail.ru

Абаполова Елена Александровна – аспирант. Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж). E-mail: abapolova@mail.ru

Matveev M. G. – prof. PHD. Voronezh State University. E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Semenov M. E. – prof. PHD. Military aviation engineering university (Voronezh)

Abapolova E. A. – Military aviation engineering university (Voronezh). E-mail: abapolova@mail.ru