

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СЕТЕВЫХ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

**В. В. Алексеев, А. М. Юсеф**

*Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)*

**Поступила в редакцию 26.04.2011 г.**

**Аннотация.** Надежностью сетевых информационных систем является главным определяющим фактором их эффективности. Типичный вид приложений в сетевых информационных системах имеет однородную распределенную аппаратно-программную структуру, где идентичные версии программного обеспечения функционируют на компьютерах одного вида. В данной статье разработана математическая модель оценки готовности такого вида систем. Разработанная модель учитывает отказы программного и аппаратного обеспечения узлов системы. Изложены результаты, полученные на основе разработанной модели.

**Ключевые слова:** сетевая информационная система, надежность аппаратно-программного обеспечения, готовность системы, марковская модель, кластерная система.

**Annotation.** Reliability of the networked information systems is a defining factor of their efficiency. The typical kind of application on networked information systems has a homogeneous distributed hardware-software structure, where identical copies of the distributed software run on computers of one kind. In given article the mathematical model of an estimation of availability of such kind of systems is developed. Both software and hardware failures of system's hosts are considered. The results received on the basis of developed model are stated.

**Key words:** networked information system, software/hardware reliability, system availability, markov model, clustered system.

### ВВЕДЕНИЕ

Сетевая информационная система (СИС) состоит из некоторых информационно-вычислительных подсистем, связанных между собой через сеть связи, через которую они могут совместно выполнять вычислительные функции. СИС имеет много достоинств по сравнению с централизованными системами с точки зрения производительности, эффективности и экономичности. Типичным приложением СИС является распределенное программное обеспечение (ПО), идентичные версии которого функционируют на каждом узле. Примерами таких приложений могут служить сетевые протоколы, сетевое ПО и распределенные системы управления базами данных.

СИС является одним из видов кластерной системы, состоящей из компьютеров (участников кластера), в которой участник кластера обеспечивает выполнение вычислительных

функций любого другого участника кластера. У кластера есть  $N$  узлов,  $k$  из которых ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) являются необходимыми для обеспечения нормального функционирования системы и  $N - k$  узлов являются резервными. В данной работе, объект разработанной модели является кластером с  $k$  необходимыми узлами и  $N - k$  избыточными узлами. Это подразумевает, что система отказывает, тогда, когда  $k + 1$  узлов отказывают, в любом другом случае система считается работоспособной.

Готовность СИС является наибольшим влияющим фактором на ее надежность и, следовательно, производительность. Она представляет собой долю времени, в которой СИС считается доступной для клиентов.

Однородной СИС является система, все элементы которой принадлежат к одному типу. Если идентичные версии распределенного ПО функционируют на однородной СИС, то в этом случае она называется однородной сетевой аппаратно-программной системой (ОСАПС). В этой статье, разработана обобщенная модель

оценки надежности ОСАПС через оценку ее готовности.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель готовности ОСАПС разработана в рамках некоторых предположений. Такие предположения считаются обычно принятыми и изложены, например в [1, 2].

Типичная топология сетевой информационной системы – однородная распределенная аппаратно-программная. Это подразумевает, что идентичные версии распределенного ПО (ПО<sub>1</sub>, ПО<sub>2</sub>, ПО<sub>3</sub>, ..., ПО<sub>N</sub>) функционируют на компьютерах или серверах одного вида. Рис. 1 показывает структуру типичной системы этого вида [3].

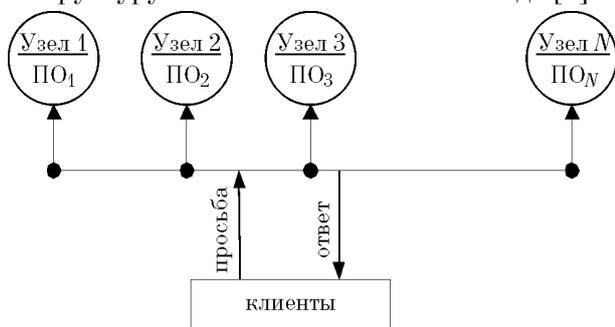


Рис. 1. Типичная структура ОСАПС

При разработке модели были выдвинуты следующие предположения:

- интенсивность отказов АО ( $\lambda_h$ ) всех элементов одинаковая. Другими словами, наработка АО всех элементов подчиняет экспоненциальному закону распределения;
- в каждом элементе функционирует одна версия того же самого ПО с функцией интенсивности отказов  $\lambda_s(t)$ , соответствующей используемой модели надежности ПО;
- ПО, как и АО, может находиться в одном из двух состояний: работоспособном и неработоспособном состоянии;
- время восстановления системы после программного или аппаратного отказа подчиняет экспоненциальному закону распределения с параметрами  $\mu_s$  для программного отказа и  $\mu_h$  для аппаратного отказа;
- все отказы ОСАПС (ПО или АО) взаимно независимы.

### МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОСАПС С ДВУМЯ УЗЛАМИ

Модель, состоит из двух узлов (элементов), один из них является необходимым ( $k = 1$ ). На

основе математического аппарата Маркова будем использовать дифференциальные уравнения Колмогорова для оценки вероятностей нахождения ОСАПС в каждом состоянии. ОСАПС состоит из двух узлов (узел 1, узел 2) и на них функционирует одинаковое ПО (ПО<sub>1</sub>, ПО<sub>2</sub>) как показывает рисунок 1 для  $N = 2$ .

В таблице 1 приведены возможные состояния ОСАПС. Рисунок 2 показывает такие состояния и переходы ОСАПС из одного состояния в другое.

Таблица 1. Возможные состояния ОСАПС для  $N = 2$  и  $k = 1$

состояние	Обозначение
0	все составляющие ОСАПС работоспособны (2 узла работоспособны).
1	1 АО неработоспособно (1 узел работоспособен, 1 узел неработоспособен).
2	2 АО неработоспособны (2 узла неработоспособны, т. е. отказ)
3	1 АО неработоспособно, 1 ПО неработоспособно (2 узла неработоспособны, т. е. отказ)
4	1 ПО неработоспособно (1 узел работоспособен, 1 узел неработоспособен).
5	2 ПО неработоспособны (2 узла неработоспособны, т. е. отказ)

Заметим, что узел находится в работоспособном состоянии, тогда, когда две его составляющие находятся в работоспособном состоянии. Отказ ПО или АО какого-либо узла приводит к отказу этого же узла в целом. Поэтому система переходит из состояния 4 в 3, и 1 в 3 с интенсивностями  $\lambda_h$ ,  $\lambda_s(t)$  соответственно. Обозначим  $p_i(t)$  – вероятность нахождения систем в состоянии  $i$  в момент времени  $t$ .

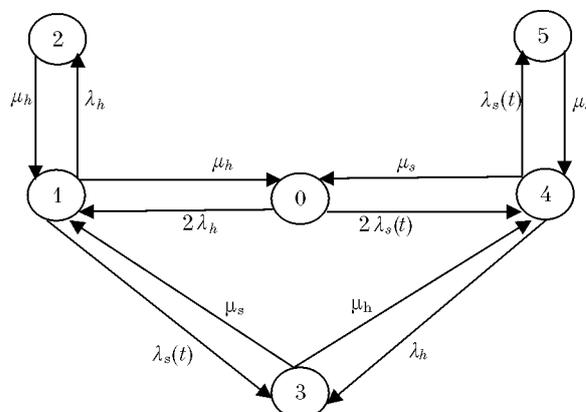


Рис. 2. Состояния и переходы ОСАПС из одного состояния в другое для  $N = 2$  и  $k = 1$ .

Для системы, представленной на рисунке 2 система дифференциальных уравнений Колмогорова будет иметь вид:

$$\begin{cases} p'_0(t) = \mu_h p_1(t) + \mu_s p_4(t) - (2\lambda_h + 2\lambda_s(t))p_0(t), \\ p'_1(t) = 2\lambda_h p_0(t) + \mu_h p_2(t) + \\ + \mu_s p_3(t) - (\mu_h + \lambda_h + \lambda_s(t))p_1(t), \\ p'_2(t) = \lambda_h p_1(t) + \mu_h p_2(t), \\ p'_3(t) = \lambda_s(t)p_1(t) + \lambda_h p_4(t) - (\mu_h + \mu_s)p_3(t), \\ p'_4(t) = 2\lambda_s(t)p_0(t) + \mu_h p_3(t) + \\ + \mu_s p_5(t) - (\mu_s + \lambda_h + \lambda_s(t))p_4(t), \\ p'_5(t) = \lambda_s(t)p_4(t) - \mu_s p_5(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием

$$p_0(0) = 1, p_j(0) = 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, 5. \quad (2)$$

Начальное условие (2) основано на предположение о том, что все узлы считаются работоспособными в начальный момент времени. Учитывая начальное условие, можно решить дифференциальные уравнения и получить численные результаты.

Готовность системы можно получить решением системы уравнений 1 применив, например, пакет прикладных программ MatLab. Так как система считается готовой, тогда, когда находится в состояниях 0, 1 и 4, то готовность системы в любой момент времени  $t$  определяется формулой

$$A(t) = p_0(t) + p_1(t) + p_4(t). \quad (3)$$

Практическая проблема заключается в определении числа остаточных ошибок в ПО в любой момент времени  $t$ . Для этой цели можно использовать одну из разработанных моделей надежности ПО, каждая из которых основана на различных предположениях.

### МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОСАПС С $N$ УЗЛАМИ

Обобщенная модель ОСАПС, состоит из  $N$  узлов,  $k$  из которых считаются необходимыми для обеспечения нормального функционирования системы. Рисунок 3 показывает часть переходов Марковского процесса ОСАПС с  $N$  узлами. На рисунке 3 обозначено  $(i, j)$  состояние системы, в котором  $i$  узлов отказывают из-за наступления аппаратного отказа и  $j$  узлов отказывают из-за наступления программного отказа.

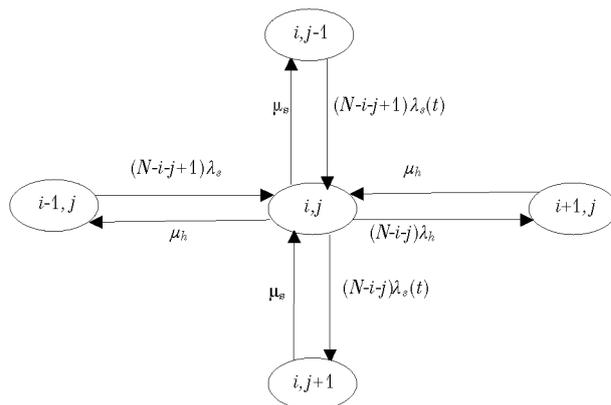


Рис. 3. Часть переходов Марковского процесса ОСАПС с  $N$  узлами

Уравнение Колмогорова, соответствующее вероятности нахождения системы в состоянии  $(i, j)$  в любой момент времени  $t$ , где  $i, j \neq 0, N - k; i + j \leq N - k$ , формируется следующим образом

$$\begin{aligned} p'_{i,j}(t) = & (N - i - j + 1)\lambda_h p_{i-1,j}(t) + \\ & + \mu_h p_{i+1,j}(t) + \mu_s p_{i,j+1}(t) - \\ & - (N - i - j + 1)\lambda_s(t) p_{i,j-1}(t) - k_{i,j} p_{i,j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} k_{i,j} = & (N - i - j)\lambda_h + \\ & + \mu_h + \mu_s + (N - i - j)\lambda_s(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Начальное условие:

$$p_{0,0}(0) = 1, p_{i,j}(0) = 0 \text{ для } i, j \neq 0.$$

Поставим уравнения Колмогорова для крайних состояний

$$\begin{aligned} p'_{0,0}(t) = & \mu_h p_{1,0}(t) + \mu_s p_{0,1}(t) - \\ & - N(\lambda_s(t) + \lambda_h) p_{0,0}(t), \\ p'_{0,j}(t) = & \mu_h p_{1,j}(t) + \mu_s p_{0,j+1}(t) + \\ & + (N - j + 1)\lambda_s(t) p_{0,j-1}(t) - \\ & - ((N - j)(\lambda_s(t) + \lambda_h) + \mu_s) p_{0,j}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $j = 1, 2, \dots, N - k$ ;

$$\begin{aligned} p'_{i,0}(t) = & \mu_h p_{i+1,0}(t) + \mu_s p_{i,1}(t) + \\ & + (N - i + 1)\lambda_h(t) p_{i-1,0}(t) - \\ & - ((N - i)(\lambda_s(t) + \lambda_h) + \mu_h) p_{i,0}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$i = 1, 2, \dots, N - k$ ;

$$\begin{aligned} p'_{N-k+1,0}(t) = & k\lambda_h p_{N-k,0}(t) - \mu_h p_{N-k+1,0}(t), \\ p'_{0,N-k+1}(t) = & k\lambda_s(t) p_{0,N-k}(t) - \mu_s p_{0,N-k+1}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Модель, определенная выражениями (1)–(3), является частным случаем обобщенной модели при  $N = 2$  и  $k = 1$ . Если обозначим воз-

возможные состояния для  $N = 2$  символами обобщенной модели, то получим эти уравнения.

Готовность ОСАПС в любой момент времени  $t$  определяется формулой

$$A(t) = \sum_{i+j < N-k+1} p_{i,j}(t). \quad (9)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведен численный пример, который показывает эффективность использования данной модели.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ ПО

Главной проблемой разработки этого типа моделей является необходимость моделирования интенсивности отказов ПО, как функции от времени, так как интенсивность отказов ПО изменяется в ходе процесса его отладки [4]. На самом деле любую модель надежности ПО можно использовать для данной цели. Мы предполагаем, что каждая версия ПО имеет экспоненциальную интенсивность отказов  $\lambda_s(t) = N_t \lambda$  в соответствии с моделью Джелинского – Моранды, где  $N_t$  – число остаточных ошибок в ПО в момент времени  $t$ ,  $\lambda$  – постоянная величина [3]. В соответствии с моделью Джелинского – Моранды предполагается, что ПО имеет начальное число ошибок  $N_0$ , от которого зависит значение  $\lambda$  – интенсивность отказов для каждой ошибки в ПО. Интенсивность отказов ПО в целом определяется  $\lambda$  вместе с  $N_t$ . Если  $m$  – число исправленных ошибок в момент времени  $t$ , то  $N_t = N_0 - m$  – число остаточных ошибок в ПО, т. е. интенсивность отказов ПО уменьшается на

$$\lambda_s(t) = \lambda(N_0 - m). \quad (10)$$

Проблемная ситуация в этом случае состоит в том, что интенсивность отказов ПО остается постоянной в интервале времени, в котором число остаточных ошибок не изменяется. Поэтому мы будем решать уравнение в каждом интервале времени, пока  $\lambda_s$  не изменяется и потом использовать результаты в качестве исходных условий следующего интервала. В конце концов мы получим  $p_{i,j}(t)$  всех возможных состояний, и следовательно готовность систем в любой момент времени.

В соответствии с моделью Джелинского – Моранды вероятность того, что число остаточных ошибок равно  $n$  в момент времени  $t$  дается следующей формулой

$$p_n(t) = \frac{N_0!}{n!(N_0 - n)!} e^{-n\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{N_0 - n}; \quad (11)$$

$$0 \leq n \leq N_0,$$

где  $N_0$  – число начальных остаточных ошибок в ПО,  $\lambda$  – постоянная величина.

На основе (11) можно оценить число остаточных ошибок ПО в любой момент времени.

### ОЦЕНКА ГОТОВНОСТИ СИСТЕМЫ В ЦЕЛОМ

Готовность системы в целом можно получить решением дифференциальных уравнений (4, 6–8). Предполагается, что интенсивность отказов АО  $0.02 \text{ ч}^{-1}$  и интенсивность отказов ПО на каждую ошибку  $0.006 \text{ ч}^{-1}$ . Интенсивность восстановления после аппаратного отказа  $0.1 \text{ ч}^{-1}$  и после программного отказа  $0.12 \text{ ч}^{-1}$ .

На Рисунке 4 приведены графики готовности ОСАПС с 3 узлами и  $k=1$  для различных значений  $N_0$  ( $N_0 = 10, 20, 60$ ). Этот рисунок показывает, что готовность системы достигает наименьшего значения на ранних этапах эксплуатации.

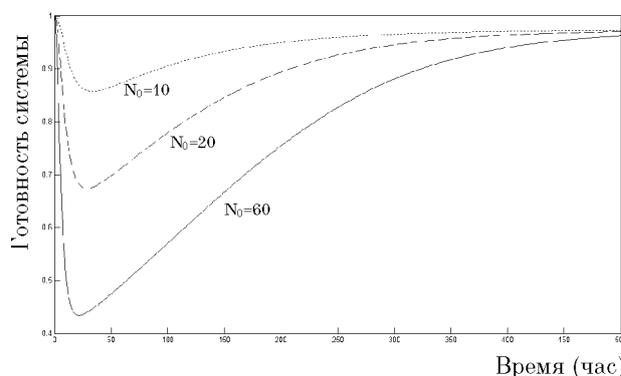


Рис. 4. Графики готовности ОСАПС с 3 узлами и  $k = 1$  для  $N_0 = 10, 20, 60$

Причина в том, что большое число ошибок ПО обнаруживается тогда, когда начинается процесс его тестирования. В процесс эксплуатации широкомасштабных систем, большинство таких ошибок следует из-за процесса тестирования системы в целом, т. е. когда всем разработанным блокам ПО нужно совместно функционировать. Готовность системы начинается увеличиться сразу после достижения её наименьшего значения и постепенно приближается к стационарному значению готовности системы через достаточно большой интервал

времени. Это объясняется тем, что обнаруженные на ранних этапах ошибки ПО исправляются, и следовательно, интенсивность отказов ПО становится меньше. Со временем все ошибки в ПО исправляются и ПО становится примерно без ошибок. Это ситуация считается частным случаем данной модели когда  $\lambda_s = 0$ . Начальное число ошибок в ПО оказывает влияние на готовность системы только на ранних этапах её эксплуатации. Чем больше время тестирования ПО, тем меньше влияние  $N_0$  на готовность системы. Через достаточно большое время эксплуатации,  $N_0$  потеряет значение в смысле его влияния на готовность системы.

Важным результатом применения данной модели является возможность определения момента времени  $T_{min}$ , в котором готовность системы достигает наименьшего значения (например, для  $N_0 = 10$ ,  $T_{min} = 33$  часов). Смысл в том, что рекомендуется тестировать систему хотя бы по мере этого времени до начала её эксплуатации. На самом деле, на основе требуемого уровня готовности системы, можно определить длительность нужного периода её тестирования.

Различный уровень избыточности приводит к различным значениям готовности ОСАПС (рисунок 5). Для  $N_0 = 20$ ,  $\lambda = 0.06 \text{ ч}^{-1}$  на каждую ошибку,  $\lambda_h = 0.002 \text{ ч}^{-1}$ ,  $\mu_h = 0.1 \text{ ч}^{-1}$ ,  $\mu_s = 0.12 \text{ ч}^{-1}$ . Анализ результатов моделирования оценки готовности ОСАПС для различных значений числа узлов ( $N = 1, 2, 3, 4$ ) и  $k = 1$ , представленных на рисунке 5 показывает, что готовность системы увеличивается при увеличении числа узлов. Это свидетельствует о том, что готовность системы является чувствительной к изменению числа узлов при малых значениях этого числа.

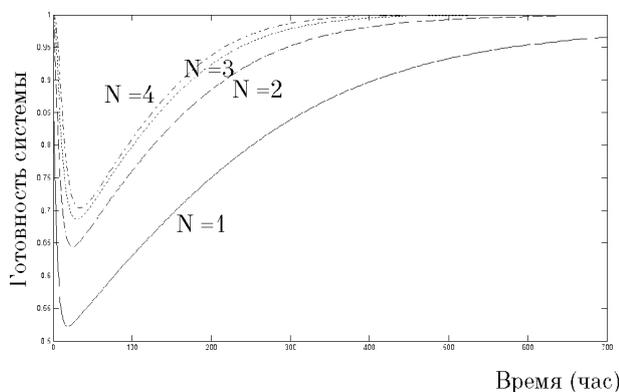


Рис. 5. Графики готовности ОСАПС с  $N$  узлами и  $k = 1$  для  $N = 1, 2, 3, 4$

Другими словами, использование избыточных узлов в тех системах, которые содержат небольшое число узлов, значительно улучшает готовность системы.

На готовность ОСАПС оказывает влияние также изменение других параметров, таких как интенсивности отказов ПО и АО, интенсивности восстановления после отказов ПО и АО. На рисунке 6 представлены графики готовности системы с 3 узлами и одним необходимым узлом ( $k = 1$ ) при различных значениях интенсивностей отказов ПО и АО. В этом случае  $N_0 = 20$ ,  $\mu_h = 0.1 \text{ ч}^{-1}$ ,  $\mu_s = 0.12 \text{ ч}^{-1}$ . Анализ графиков показывает, что при увеличении значения интенсивности отказов ПО или АО значение готовности системы уменьшается. На рисунке 7 представлены графики готовности такой же системы при различных значениях интенсивностей восстановления после ПО и АО. В этом случае  $N_0 = 20$ ,  $\lambda_h = 0.01 \text{ ч}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.006 \text{ ч}^{-1}$ . Анализ

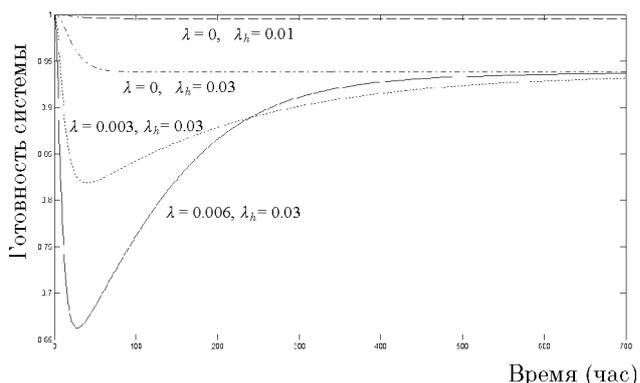


Рис. 6. Графики готовности ОСАПС с 3 узлами и  $k = 1$  при различных значениях интенсивностей отказов ПО и АО

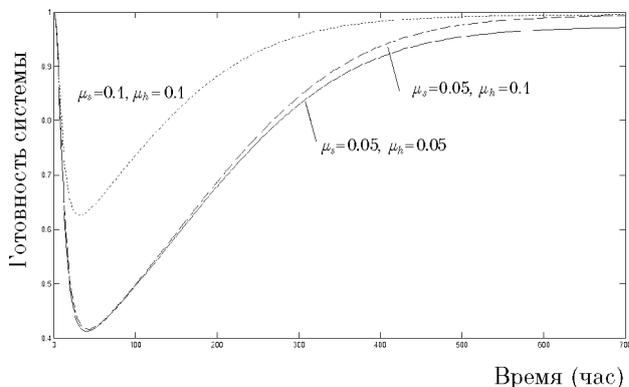


Рис. 7. Графики готовности ОСАПС с 3 узлами и  $k = 1$  при различных значениях интенсивностей восстановления после отказов ПО и АО.

графиков показывает, что при увеличении значения интенсивностей восстановления после ПО и АО, значение готовности системы увеличивается.

### **ВЫВОДЫ**

Таким образом, готовность СИС достигает наименьшего значения на ранних этапах эксплуатации. Математические модели готовности таких систем дают возможность определить длительность нужного периода их тестирования до начала процесса эксплуатации на основе требуемого уровня их готовности. Уровень готовности СИС зависит от многих параметров, главным из которых является избыточность. Использование избыточных узлов в СИС, которые содержат небольшое число узлов, значи-

тельно улучшает готовность системы, чем в тех системах, которые содержат большое число подсистем и (или) элементов.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- 1 *Ушаков И. А.* Вероятностные модели надежности информационно-вычислительных систем / И. А. Ушаков. – М. : Радио и связь, 1991. – 132 с.
- 2 *Леонтьев Е. А.* Надежность экономических информационных систем : учеб. пособие / Е. А. Леонтьев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. – 128 с.
- 3 *Goyal A.* Modelling and analysis of computer system availability, IBM / A. Goyal, S. S. Lavenberg // J. Research and Development, 31, P. 651–664.
- 4 *Ke W. J.* Reliability evaluation for distributed computing networks with imperfect nodes / W. J. Ke, S. D. Wang // IEEE Transactions on Reliability, 46 (3), P. 342–349.

**Алексеев Владимир Витальевич** – доктор технических наук, профессор. Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж). Тел.: 8-919-183-16-48. E-mail: vvalex1961@mail.ru

**Alekseev Vladimir Ivanovich** – doctor of technical sciences, professor. Military air engineering university (g.Voronezh). E-mail: vvalex1961@mail.ru

**Юсеф Абдалла Махмуд** – Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж). Tel. 8-920-216-63-97. E-mail: thisisyousif@yahoo.com

**Yousif Abdullah Mahmoud** – Military air engineering university (g.Voronezh). Tel. (89202166397).