УДК 512.644+517.524

РЕШЕНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ СЛАУ ПРИ ПОМОЩИ r/φ-АЛГОРИТМА

В. И. Шмойлов*, Н. И. Витиска, Е. Б. Титова****

** Южный научный центр РАН*
***Таганрогский государственный педагогический институт*
**** МОУ СОШ №37 с углубленным изучением искусств и английского языка г. Таганрога Ростовской области*

Поступила в редакцию 10.03.2011 г.

Аннотация. Рассматриваются расходящиеся бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). Для решения расходящихся БСЛАУ используется алгоритм, основанный на методе суммирования расходящихся непрерывных дробей. Приведен пример решения расходящейся бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.
Ключевые слова: бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, расходящиеся непрерывные дроби.
Annotation. Considered divergent infinite system of linear algebraic equations (ISLE). To address the divergent ISLE algorithm is based on the method of summing divergent continued fractions. An example of divergent solutions of the infinite system of linear algebraic equations.
Key words: infinite systems of linear algebraic equations, continued fractions diverge.

ВВЕДЕНИЕ

На практике часто приходится решать СЛАУ очень большой размерности. И здесь возникают две проблемы: обеспечение приемлемого времени решения таких СЛАУ и обеспечение самой возможности решения так называемых расходящихся СЛАУ. Известные универсальные алгоритмы решения СЛАУ, представленные в [1–3] плохо приспособлены к реализации их на многопроцессорных системах и не способны решать расходящиеся СЛАУ, когда решения СЛАУ с ростом размерности системы не стремятся к некоторым пределам.

Вопросам распараллеливания алгоритмов решения СЛАУ посвящено множество работ, из которых отметим [4]. В статье рассматривается способ решения расходящихся СЛАУ, базирующийся на алгоритмах суммирования расходящихся непрерывных дробей [5].

1. О СВЯЗИ АЛГОРИТМА ПРОГОНКИ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ

Установим связь между СЛАУ и непрерывными дробями. Известно, что при решении на ЭВМ дифференциальных уравнений, как правило, используются разностные схемы. Однако, как подчеркивается в работе [6], «даже в самых простых случаях, например, при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, часто бывает, что казалось бы разумная разностная схема имеет решение, не сходящиеся при измельчении сетки к искомому решению дифференциального уравнения». Попытаемся найти этому малоприятному феномену объяснение.

Как известно, простой и удобный метод решения разностной краевой задачи

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = f_n,$$
$$0 < n < N,\ u_0 = \phi,\ u_N = \psi.$$

представляющий один из вариантов метода исключения неизвестных и носящий название «прогонки», фактически эквивалентен записи решения u_i непрерывной дробью. Непрерывная дробь называется *сходящейся*, если существует конечный предел последовательности ее подходящих дробей, который принимается за значение непрерывной дроби. Если предела значений подходящих дробей разложения

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots \qquad (1)$$

не существует, то непрерывная дробь (1) называется *расходящейся*. То есть, при решении бесконечной системы линейных алгебраических уравнений решение u_i может представляться как сходящейся непрерывной дробью, так и расходящейся. В работе [5] был предложен новый подход к определению сходимости непрерывных дробей, так называемый r/φ-алгоритм, который позволяет во многих случаях найти значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей. Этот алгоритм формулируется следующим образом:

Непрерывная дробь (1) сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\phi_0}$, если существуют пределы

$$\lim_{s\to\infty}\sqrt[s]{\prod_{i=1}^{s}\left|P_i/Q_i\right|} = r_0,\ \pi\lim_{s\to\infty}\frac{k_s}{s} = \left|\phi_0\right|,$$

где P_i/Q_i – значения i-й подходящей дроби из совокупности, включающей s подходящих дробей, k_s – число отрицательных подходящих дробей из s подходящих дробей.

Так как алгоритм прогонки и метод решения трехдиагональных систем непрерывными дробями в некотором смысле тождественны, то эта тождественность позволяет применить r/φ-алгоритм при решении расходящихся бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). В [7] было предложено называть расходящимися бесконечными системами линейных алгебраических уравнений системы, для которых решения $x_m^{(n)}$, $(m = 1, 2...)$ расширяющихся СЛАУ с ростом размерности $(n \to \infty)$ пределов не имеют.

В [5] было показано, что r/φ-алгоритм применим не только для суммирования расходящихся классических непрерывных дробей, но и непрерывных дробей со значительно более сложными графами, например, непрерывных дробей Хессенберга. Это дает основания полагать, что r/φ-алгоритм применим для решения расходящихся бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей.

При построении алгоритма решения расходящихся БСЛАУ будем рассматривать расширяющиеся СЛАУ, то есть системы уравнений, размерность которых неограниченно возрастает. Решения этих расширяющихся, но всякий раз фиксированной размерности СЛАУ, могут находиться известными прямыми или итерационными. Для СЛАУ с трехдиагональными матрицами целесообразным является применение одного из известных методов прогонки [8]. В настоящее время наиболее популярными являются метод правой прогонки, метод левой прогонки и метод встречной прогонки. Эти методы требуют выполнения $8n + 1$ операций. Применение встречной прогонки позволяет распараллелить процесс вычисления на два независимых потока и, соответственно, уменьшить время, требуемое для вычислений, практически в два раза. Метод прогонки представляет собой метод исключения Гаусса, примененный к специальным системам линейных алгебраических уравнений и учитывающий ленточную структуру матрицы системы. Подсчет арифметических действий показывает, что реализация метода прогонки требует выполнения $3N$ умножений, $2N + 1$ делений и $3N$ сложений и вычитаний.

Если матрицы не имеют трехдиагонального вида, удобно использовать один из вариантов метода Гаусса. Суть метода Гаусса, как известно, состоит в том, что с помощью некоторых преобразований исходную систему уравнений сводят к более простой системе, имеющей треугольный вид. Недостатком этого метода решения СЛАУ является большое количество выполняемых операций, оно равно $O(n^3)$.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ СЛАУ

Довольно часто возникает следующая ситуация: решения системы существуют, но при измельчении шага сетки значения неизвестных системы изменяются, причем, скачкообразно, то есть с ростом размерности СЛАУ не можем найти пределов, к которым бы эти решения стремились. В этом случае считается, что разностная схема является «расходящейся» и решения расширяющихся СЛАУ не могут быть записаны. Оказывается, что если используемый метод «расходится», то возможно существование комплексных решений для данной СЛАУ [9, 10], которые в силу особенностей традиционных методов решения БСЛАУ не могут быть установлены. Процесс нахождения решения БСЛАУ с помощью r/φ-алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим СЛАУ

$$AX = B,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots],\ B = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]^T,$$

где A – матрица коэффициентов, X – вектор искомых решений, B – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Для того чтобы узнать, «расходится» система (2) или нет, решаем одним из классических методов, подсистемы смежных порядков, например m, $m+1$, $m+2$ и т.д. и строим последовательности, состоящие из их решений $\{x_i\}$, то есть последовательности вида

$$\begin{gathered}\left\{\overline{x}_1^{(m)}, \overline{x}_1^{(m+1)}, \overline{x}_1^{(m+2)}, \ldots, \overline{x}_1^{(p)}\right\}, \\ \left\{\overline{x}_2^{(m)}, \overline{x}_2^{(m+1)}, \overline{x}_2^{(m+2)}, \ldots, \overline{x}_2^{(p)}\right\}, \ldots, \\ \left\{\overline{x}_n^{(m)}, \overline{x}_n^{(m+1)}, \overline{x}_n^{(m+2)}, \ldots, \overline{x}_n^{(p)}\right\}.\end{gathered} \qquad (3)$$

Если эти последовательности стремятся к некоторым пределам с ростом размерности p системы, такую СЛАУ будем считать сходящейся, а последовательность корней $\left\{\overline{x}_1^{(p)}, \overline{x}_2^{(p)}, \overline{x}_3^{(p)}, \ldots, \overline{x}_n^{(p)}\right\}$ будет являться, с некоторой степенью точности, решением рассматриваемой БСЛАУ. В случае, если пределы последовательностей (3) отсутствуют, требуется использовать уже упомянутый выше r/φ-алгоритм, что составляет следующий этап решения расходящихся БСЛАУ. Следует отметить, что при решении «расходящейся» СЛАУ $p>>n$, что обусловлено r/φ-алгоритмом, требующим для определения комплексного числа большого количества вещественных «отсчетов».

Предложенный в [5] r/φ-алгоритм позволяет использовать полученные в общем случае «по Гауссу» вещественные решения расширяющейся системы (2) для получения множества комплексных решений исходной системы, если они имеются.

При решении расходящихся БСЛАУ модуль r_i комплексного корня x_i находится по формуле

$$r_i = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\prod_{m=1}^{p} \left|\overline{x}_i^{(m)}\right|}\,, \qquad (4)$$

где $\overline{x}_i^{(m)}$ – значение вещественной неизвестной $\overline{x}_i$, полученное «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ размерности m.

Модуль аргумента φ_i комплексного корня x_i БСЛАУ определяется следующим образом:

$$\left|\phi_i\right| = \pi \cdot \lim_{p\to\infty} \frac{k_i^{(p)}}{p}, \qquad (5)$$

где $k_i^{(p)}$ – количество отрицательных значений $\overline{x}_i$, полученных стандартным алгоритмом решения СЛАУ из общего количества p значений $\overline{x}_i$, найденных из «расширяющейся» системы.

Коэффициенты r_i и φ_i комплексных решений x_i БСЛАУ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} r_1^{(2)} = \sqrt{\left|\overline{x}_1^{(1)} \cdot \overline{x}_1^{(2)}\right|}, \\ \left|\phi_1^{(2)}\right| = \pi \cdot k_1^{(2)}/2 \\ r_1^{(3)} = \sqrt[3]{\left|\overline{x}_1^{(1)} \cdot \overline{x}_1^{(2)} \cdot \overline{x}_1^{(3)}\right|}, \left|\phi_1^{(3)}\right| = \pi \cdot k_1^{(3)}/3, \\ r_1^{(4)} = \sqrt[4]{\left|\overline{x}_1^{(1)} \cdot \overline{x}_1^{(2)} \cdot \overline{x}_1^{(3)} \cdot \overline{x}_1^{(4)}\right|}, \left|\phi_1^{(4)}\right| = \pi \cdot k_1^{(4)}/4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_2^{(2)} = \sqrt{\left|\overline{x}_2^{(2)} \cdot \overline{x}_2^{(3)}\right|}, \left|\phi_2^{(2)}\right| = \pi \cdot k_2^{(2)}/2, \\ r_2^{(3)} = \sqrt[3]{\left|\overline{x}_2^{(2)} \cdot \overline{x}_2^{(3)} \cdot \overline{x}_2^{(4)}\right|}, \left|\phi_2^{(3)}\right| = \pi \cdot k_2^{(3)}/3, \\ r_2^{(4)} = \sqrt[4]{\left|\overline{x}_2^{(2)} \cdot \overline{x}_2^{(3)} \cdot \overline{x}_2^{(4)} \cdot \overline{x}_2^{(5)}\right|}, \left|\phi_2^{(4)}\right| = \pi \cdot k_2^{(4)}/4. \end{gathered} \qquad (6)$$

Несмотря на кажущуюся сложность, данный метод решения БСЛАУ достаточно экономичен, а главное – метод позволяет решать расходящиеся в традиционном смысле БСЛАУ, что не обеспечивают известные алгоритмы решения СЛАУ.

Схема решения БСЛАУ при помощи r/φ-алгоритма приведена на рис.1.

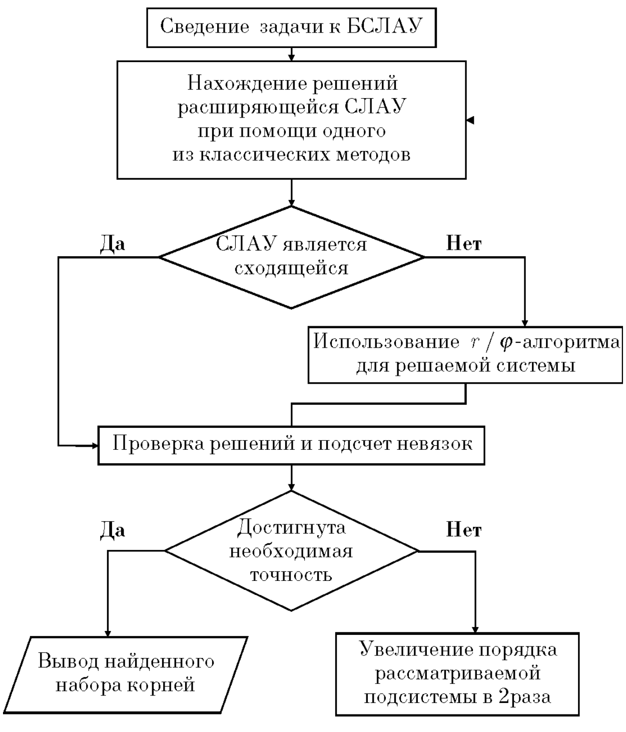

Рис. 1. Схема решения БСЛАУ при помощи r/φ-алгоритма

3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ РАСХОДЯЩЕЙСЯ СЛАУ

В качестве примера рассмотрим решение при помощи r/φ-алгоритма расходящейся бесконечной системы (7)

Решить систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В табл. 1–5 приведены результаты решения системы (7) с использованием r/φ-алгоритма, то есть формул (4) и (5). В первых колонках таблиц указана размерность решаемых систем. Во вторых колонках помещены значения неизвестных $\overline{x}_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, 512, 1024, 2048$), полученные по методу прогонки. Как видно из таблиц, значения $\overline{x}_i$, полученные «по прогонке» для расходящихся систем, не стремятся к каким-либо пределам. В то же время в колонках 3 и 4 таблиц 1–5 с ростом размерности системы (7) устанавливаются значения, соответственно, модулей и аргументов комплексных решений x_i системы (7).

Для достижения необходимой точности при определении модуля и аргумента комплексного числа необходимо брать значительное число значений подходящих расходящихся цепных дробей. Классические алгоритмы, – обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм) и прямой рекуррентный алгоритм (FR-алгоритм), оказываются неэффективными при вычислении значений длинных серий подходящих дробей. BR-алгоритм требует недопустимо больших затрат машинного времени, так как каждую подходящую дробь приходится вычислять заново, а FR-алгоритм приводит к переполнению разрядной сетки компьютера или появлению «машинного нуля». В [11] были рассмотрены алгоритмы, эффективные при вычислении значений длинных последовательностей подходящих цепных дробей. Нами использовался так

Таблица 1

Размерность системы, m	Значение $\overline{x}_1^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_1^{(m)}$
1	1,000000000000E+00	—	—
2	2,500000000000E-01	5,000000000000E-01	0,000000000000E+00
3	1,176470588235E-01	3,086789594993E-01	0,000000000000E+00
4	-2,000000000000E-01	2,769413275131E-01	7,853981633974E-01
7	5,511811023622E-02	2,222264956834E-01	4,487989505128E-01
8	-4,250000000000E+00	3,213623350779E-01	7,853981633974E-01
15	-4,316594612571E-01	2,586318164389E-01	8,377580409573E-01
16	3,566826367091E-01	2,638802890571E-01	7,853981633974E-01
31	2,368807660622E-01	2,338062307929E-01	7,093918895203E-01
32	1,059969835469E-01	2,280970928948E-01	6,872233929728E-01
63	3,535238227882E-01	2,262750841807E-01	7,479982508547E-01
64	1,745241108523E-01	2,253588030476E-01	7,363107781851E-01
127	-3,252270368534E-01	2,200670942025E-01	7,421085008480E-01
128	3,769412205239E-01	2,209942810126E-01	7,363107781851E-01
255	2,545459857837E-01	2,245282017180E-01	7,022383578612E-01
256	1,213393341306E-01	2,239890962004E-01	6,994952392759E-01
511	4,544313219042E-01	2,191004764571E-01	7,070120453284E-01
512	2,021042090470E-01	2,190659250807E-01	7,056311624274E-01
1023	-1,468533026117E-02	2,191323997622E-01	7,063209289596E-01
1024	8,316406972992E-01	2,194179980411E-01	7,056311624274E-01
2047	7,182382967496E-01	2,184842239440E-01	7,029064168755E-01
2048	2,349945882313E-01	2,184919957063E-01	7,025632008516E-01
4095	8,970276633117E-02	2,184996917478E-01	7,027347669568E-01
4096	-5,225224025607E-01	2,185462070065E-01	7,033301912456E-01

Таблица 2

Размерность системы, m	Значение $\overline{x}_2^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_2^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_2^{(m)}$
2	2,500000000000E-01	—	—
3	2,941176470588E-01	2,711630722733E-01	0,000000000000E+00
4	4,000000000000E-01	3,086789594993E-01	0,000000000000E+00
7	3,149606299213E-01	2,796171509701E-01	0,000000000000E+00
8	1,750000000000E+00	3,633672992415E-01	0,000000000000E+00
15	4,772198204190E-01	3,146580878184E-01	0,000000000000E+00
16	2,144391210970E-01	3,067161002707E-01	0,000000000000E+00
31	2,543730779793E-01	2,852720846243E-01	-1,047197551197E-01
32	2,980010054844E-01	2,856740808728E-01	-1,013416985029E-01
63	2,154920590706E-01	2,840796761355E-01	-1,013416985029E-01
64	2,751586297159E-01	2,839358375615E-01	-9,973310011396E-02
127	4,417423456178E-01	2,821002267203E-01	-1,246663751425E-01
128	2,076862598254E-01	2,814208206787E-01	-1,236847501413E-01
255	2,484846714054E-01	2,878711791825E-01	-1,607901751837E-01
256	2,928868886231E-01	2,878906799017E-01	-1,601596254771E-01
511	1,818562260319E-01	2,819164885233E-01	-1,601596254771E-01
512	2,659652636510E-01	2,818843567438E-01	-1,598462015525E-01
1023	3,382284434204E-01	2,832864475979E-01	-1,629201669670E-01
1024	5,611976756693E-02	2,828384811551E-01	-1,627609097168E-01
2047	9,392056775013E-02	2,818434626748E-01	-1,658318702775E-01
2048	2,550018039229E-01	2,818296832207E-01	-1,657508581278E-01
4095	3,034324112229E-01	2,820287811482E-01	-1,657508581278E-01
4096	5,075074675202E-01	2,820692462138E-01	-1,657103817278E-01

Таблица 3

Размерность системы, m	Значение $\overline{x}_{512}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{512}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_{512}^{(m)}$
512	2,021042090470E-01	—	—
1023	3,757442030826E-01	2,582764972776E-01	-4,479223900626E-01
1024	-3,021300469698E-01	2,583554658512E-01	-4,531732092898E-01
2047	-2,112991322592E-01	2,569327328361E-01	-4,561036209313E-01
2048	1,757602938211E-01	2,568692692281E-01	-4,558068716659E-01
4095	2,921333954416E-01	2,568295399474E-01	-4,540583132141E-01
4096	7,825019575690E-01	2,569093653590E-01	-4,539316581756E-01

Таблица 4

Размерность системы, m	Значение $\overline{x}_{1024}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{1024}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_{1024}^{(m)}$
1024	8,316406972992E-01	—	—
2047	7,202060392628E-01	2,256697856946E-01	6,626797003666E-01
2048	2,453475076446E-01	2,256881929093E-01	6,620331835858E-01
4095	1,025767690142E-01	2,257655616882E-01	6,616570465080E-01
4096	-4,990251548082E-01	2,258238406288E-01	6,624640545155E-01

Таблица 5

Размерность системы, m	Значение $\overline{x}_{2048}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{2048}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_{2048}^{(m)}$
2048	2,349945882313E-01	—	—
4095	3,056479485523E-01	2,768277496489E-01	-2,454369260617E-01
4096	6,033643987254E-01	2,769330325520E-01	-2,453171423008E-01

называемый Δ – алгоритм. Определим число операций, необходимых при нахождении значений подходящей дроби Δ – алгоритмом.

Известна формула

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{Q_{n-1} \cdot Q_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta f_{n-1}} = -\frac{a_n \cdot Q_{n-2}}{Q_n} = \frac{b_n}{\varphi_n} - 1,\ \phi_n = Q_n / Q_{n-1},$$

$$\phi_n = b_n + \frac{a_n}{\phi_{n-1}},\ \phi_1 = b_1,\ n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Таким образом, можно записать

$$\Delta f_n = \left(\frac{b_n}{\varphi_n} - 1\right) \cdot \Delta f_{n-1},\ \Delta f_1 = \frac{a_1}{b_1}. \tag{9}$$

Так как $f_n = f_{n-1} + \Delta f_n$, то используя формулы (8) и (9), можно находить значение очередной подходящей дроби, выполняя всего 6 операций: 3 операции сложения, 1 операцию умножения и 2 операции деления.

Результаты решения расходящейся бесконечной системы (7) с использованием r/φ-алгоритма приведены в табл. 1–5

В табл. 6 приведены результаты проверки решения расходящейся бесконечной системы (7), полученного при помощи r/φ-алгоритма. В первой колонке табл.6 указаны номера строк системы (7) , по которым проводилась проверка. Во второй колонке приведены значения проверяемых строк системы (7) после подстановки найденных комплексных $x_{i.}$ из решаемой системы (7) размерностью 4096. В третьей колонке даны значения правой части системы (7), в четвертой – абсолютные погрешности, допущенные при решении системы (7) при помощи r/φ-алгоритма.

Как видно из результатов проверки по строкам системы (7), погрешности, допущенные при решении системы с использованием r/φ-алгоритма, весьма невелики ($\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4}$).

На рис. 2 показаны вещественные значения $\overline{x}_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, 4$), полученные методом прогонки из решения «расширяющейся» системы (7). Как видно из графиков, значения $\overline{x}_i^{(m)}$ с расширением системы (7) не стремятся к каким-либо пределам, а осциллируют. Для каждого $\overline{x}_i^{(m)}$ (i=1,2,4) приведены значения первых и последних 150 «подходящих», полученных из расширяющихся СЛАУ.

На рис. 3 показаны значения модулей $r_i^{(m)}$ комплексных неизвестных $x_i^{(m)}$ (i = 1, 2, 4), полученные при решении «расширяющейся» системы (7) с использованием r/φ-алгоритма. Алгоритм позволяет устанавливать комплексное число, являющееся значением расходящейся цепной дроби, по вещественным подходящим дробям. Для определения модуля комплексного числа используется формула (4).

В случае определения комплексных неизвестных расходящихся бесконечных систем вместо значений подходящих дробей берутся последовательные значения $\overline{x}_i^{(m)}$, получаемые из решения «расширяющихся» систем по методу прогонки, которые приведены во вторых колонках табл. 1–5. Таким образом, при помощи вычислительной процедуры, описываемой

Таблица 6

Номер строки, m	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	1,001299469052E+00 + i1,762678328659E-03	1	1,299469051622E-03 + i1,762678328659E-03
2	1,001615385287E+00 + i1,823158910945E-03	1	1,615385286690E-03 + i1,823158910945E-03
4	1,001420584071E+00 + i1,786263723479E-03	1	1,420584071188E-03 + i1,786263723479E-03
8	1,000966887833E+00 + i1,224856975491E-03	1	9,668878325528E-04 + i1,224856975491E-03
16	1,001094874798E+00 + i1,078635879098E-03	1	1,094874797582E-03 + i1,078635879098E-03
32	1,001217090677E+00 + i1,378751449401E-03	1	1,217090677040E-03 + i1,378751449401E-03
64	1,000939873348E+00 + i9,321736272402E-04	1	9,398733476283E-04 + i9,321736272402E-04
128	1,001321599553E+00 + i3,972567037168E-04	1	1,321599553336E-03 + i3,972567037168E-04
256	1,000792866804E+00 + i1,707477617846E-03	1	7,928668038036E-04 + i1,707477617846E-03
512	1,001030405321E+00 + i1,250966938645E-03	1	1,030405321258E-03 + i1,250966938645E-03
1024	1,000587637913E+00 + i2,199988158475E-03	1	5,876379127570E-04 + i2,199988158475E-03
2048	1,000849453587E+00 + i4,776958470371E-03	1	8,494535870614E-04 + i4,776958470371E-03

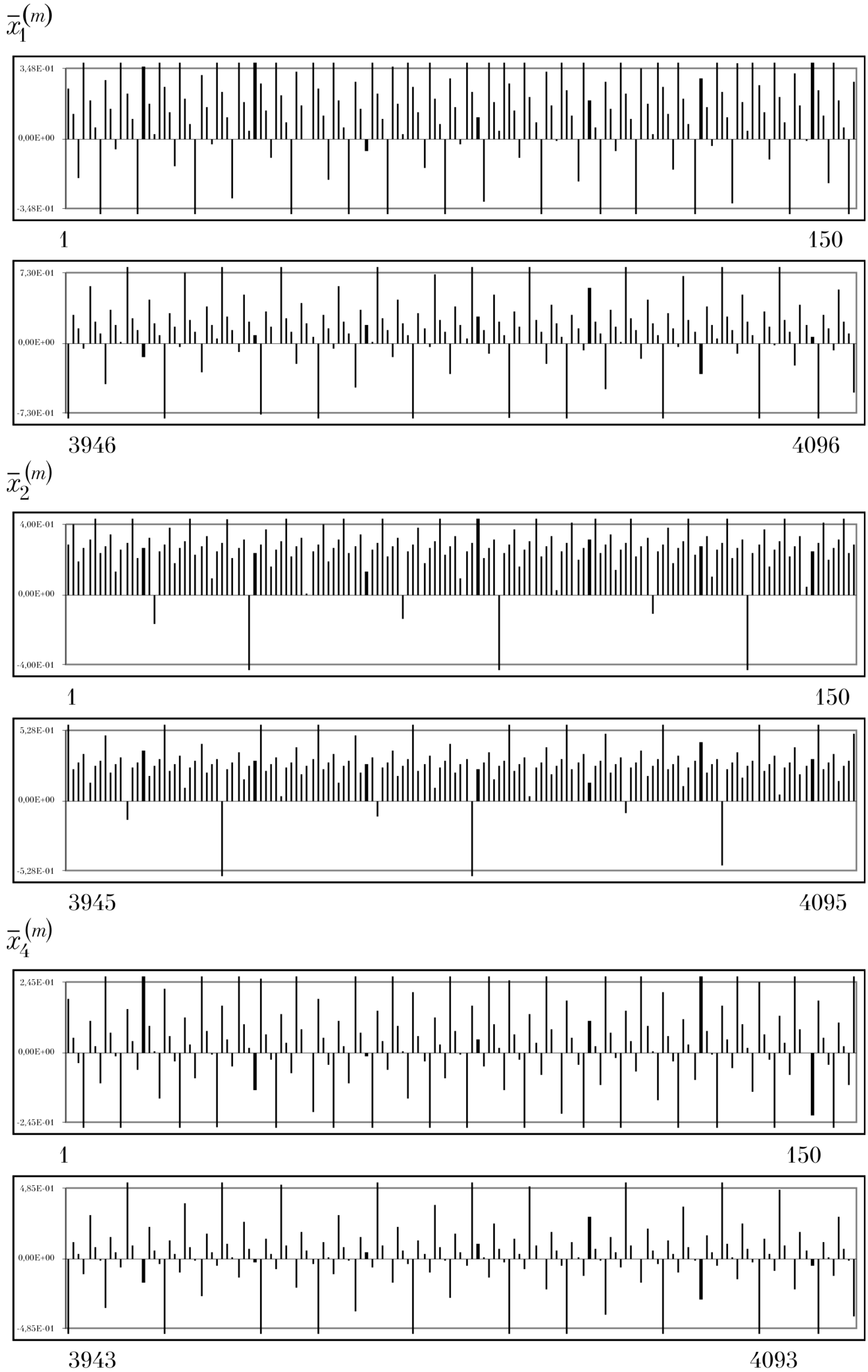

Рис. 2. Значения $\bar{x}_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, 4)$ расширяющейся системы (7)

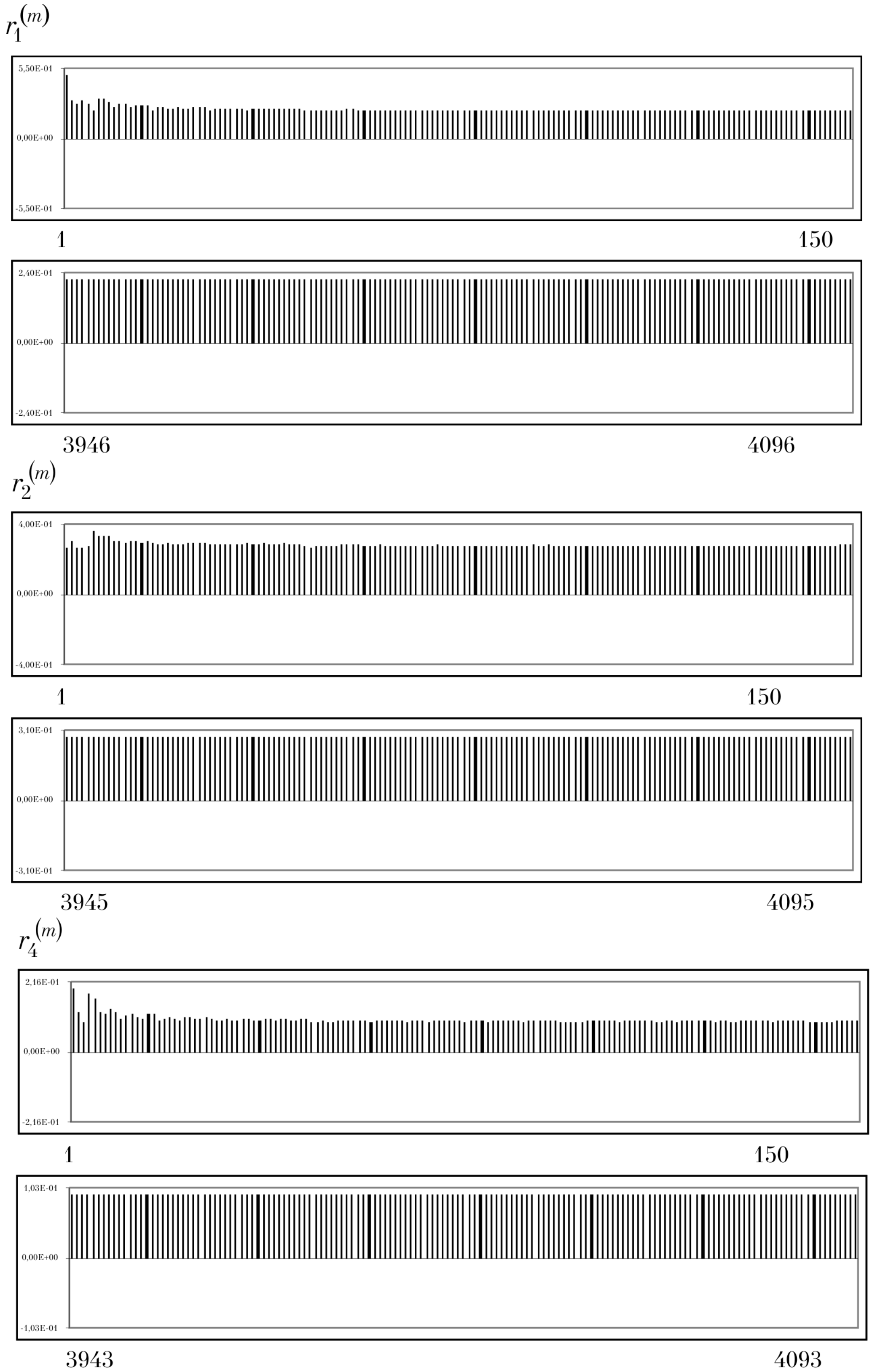

Рис. 3. Значения модуля $r_i^{(m)}$ комплексных $x_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, 4)$ системы (7)

формулой (4) из осциллирующих последовательностей значений $\overline{x}_i^{(m)}$, показанных на рис.2, получены «сходящиеся» последовательности (рис. 3), которые позволяют установить значения модулей комплексных x_i ($i = 1, 2, ...$), являющихся решениями расходящейся системы (7). Рассматриваемый в статье способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет, при определенных условиях, за последовательностью вещественных «подходящих дробей» усмотреть некое комплексное число, которое, собственно, и представлено этой последовательностью «подходящих дробей» или «отсчетов». Признаком комплексности такой последовательности служат перемены знаков ее элементов, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, признак комплексности устанавливается из «поведения» подходящих дробей. Параметры же комплексного числа $r_0 e^{i\varphi_0}$, то есть его модуль r_0 и аргумент φ_0, могут быть определены r/φ-алгоритмом, в данном случае определяемом формулами (4) и (5).

Оценим вычислительную сложность r/φ-алгоритма. Оценку проведем на примере расходящихся обыкновенных цепных дробей, хотя r/φ-алгоритм применим к непрерывным дробям со значительно более сложными графами. При вычислении значения n-звенной цепной дроби по классическому BR-алгоритму требуется выполнения $2n$ операций – n операций сложения и n операций деления, причем, во многих практически важных случаях имеет место высокая скорость сходимости, то есть используются цепные дроби с небольшим количеством звеньев. При определении значения расходящейся в классическом смысле цепной дроби при помощи r/φ-алгоритма необходимо вычислять длинную серию значений подходящих дробей. Чтобы определить комплексное число, которое является значением расходящейся цепной дроби с действительными элементами с точностью 7–8 десятичных разрядов, надо взять число отсчетов, то есть значений подходящих дробей, порядка 10^6 [5]. Поэтому следует подчеркнуть, что при использовании r/φ-алгоритма для решения разнообразных практически важных задач современной вычислительной математики, в частности, разностных задач, необходимы компьютеры с высокими техническими характеристиками.

По «отсчетам», приведенным во вторых колонках табл. 1 – 5, можно, помимо модулей, найти аргументы φ_i комплексных x_i «расширяющейся» системы (7). Для этого надо использовать формулу (5). Формула (5) определяет модуль аргумента комплексных x_i, но не знак аргумента. Знак аргумента определяется из динамики распределения на «периоде» «отсчетов» $\overline{x}_i^{(m)}$, полученных по прогонке. Можно сформулировать следующие алгоритмы.

Алгоритм Z_1.

Если модуль аргумента комплексного числа, являющегося значением «расходящейся» цепной дроби, установленный из анализа знаков подходящих дробей по формуле (5), лежит в интервале $0 < (\varphi(< \dfrac{\pi}{2}$, *то знак аргумента комплексного числа будет* ***положительным****, если на «периодах» положительные подходящие дроби, составляют* ***убывающие*** *последовательности. Если на периодах положительные подходящие дроби составляют* ***возрастающие*** *последовательности, то разложение определяет значение комплексного числа с* ***отрицательным*** *аргументом (рис. 4).*

Алгоритм Z_2.

Если модуль аргумента комплексного числа, являющегося значением «расходящейся»цепной

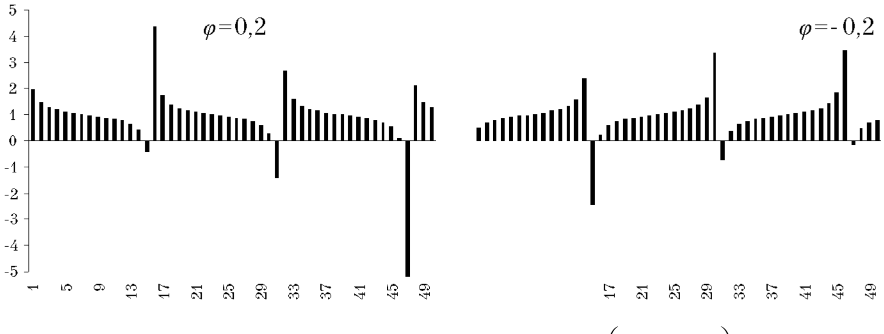

Рис. 4. Определение знака аргумента $\left(0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}\right)$

дроби, определенный по формуле (5), лежит в интервале $\frac{\pi}{2} < (\varphi(< \pi$ *, то знак аргумента этого комплексного числа будет* ***положительным****, если на «периоде»модули подходящих дробей, имеющих отрицательные значения, составляют* ***убывающую*** *последовательность. Если «на периоде»отрицательные подходящие дроби составляют по модулю* ***возрастающую*** *последовательность, то цепная дробь определяет значение комплексного числа, которое имеет* ***отрицательный*** *аргумент (рис. 5).*

Графики аргументов φ_i ($i = 1, 2, 4$) комплексных решений x_i БСЛАУ (7) приведены на рис. 6.

На рис. 7 показано размещение в комплексной плоскости значений неизвестных x_i ($i = 1, 2, ..., 2048$), бесконечной системы (7).

Запишем значения неизвестных x_i (i=1,2,..., 2048) системы (7), которые получены при помощи r/φ -алгоритма:

$$x_1 = 0.218546e^{i0.703330},$$
$$x_2 = 0.282089e^{-i0.165710},$$
$$x_4 = 0.094043e^{i1.238062},$$
$$x_8 = 0.177653e^{i0.902756},$$
$$x_{16} = 0.278352e^{i0.232482},$$
$$x_{32} = 0.127645e^{-i1.106706},$$
$$x_{64} = 0.228523e^{-i0.644988},$$
$$x_{128} = 0.275002e^{i0.279410},$$
$$x_{256} = 0.151392e^{-i1.010936},$$
$$x_{512} = 0.256909e^{-i0.453931},$$
$$x_{1024} = 0.2258232e^{i0.662464},$$
$$x_{2048} = 0.276933e^{-i0.245317}.$$

Для x_1 и x_2 на рис.7 показаны модули и аргументы комплексных неизвестных. Там же на комплексной плоскости точками отмечены расположения значений x_3, x_4, x_{2041} - x_{2048}. Все значения неизвестных x_i ($i = 1, 2,..., 2048$) системы (7) расположены на окружности, что закономерно для неизвестных x_i системы с трехдиагональной матрицей, содержащих одинаковые элементы по диагоналям и с постоянной правой частью.

Комплексные неизвестные x_i укладываются на окружности, которая соприкасается с мнимой осью в начале координат. С ростом размерности системы (7) неизвестные x_i все более плотно располагаются на окружности. Теоретически, каждая неизвестная x_i имеет свою индивидуальную координату. Если смотреть на процесс размещения x_i из центра этой окружности, то можно заметить, что неизвестные x_i укладываются на окружности, двигаясь по часовой стрелке с постоянным «шагом», несколько превышающим угол $\pi/2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный выше r/φ -алгоритм позволяет найти не только действительные, но и комплексные решения БСЛАУ, если они имеются. Эффективность решения БСЛАУ зависит от выбранного на начальном этапе метода вычисления неизвестных «расширяющихся» СЛАУ. На выбор метода влияет несколько факторов, главным из которых является вид матрицы коэффициентов. Если матрица системы трехдиагональная, то проблем с выбором алгоритма нет, но если матрица системы имеет иной вид, возникает вопрос выбора способа решения «расширяющихся» СЛАУ.

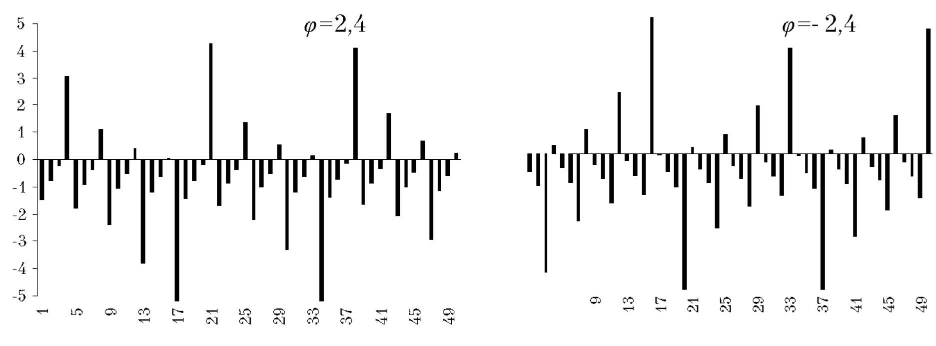

Рис. 5. Определение знака аргумента $\left(\frac{\pi}{2} < \phi < \pi\right)$

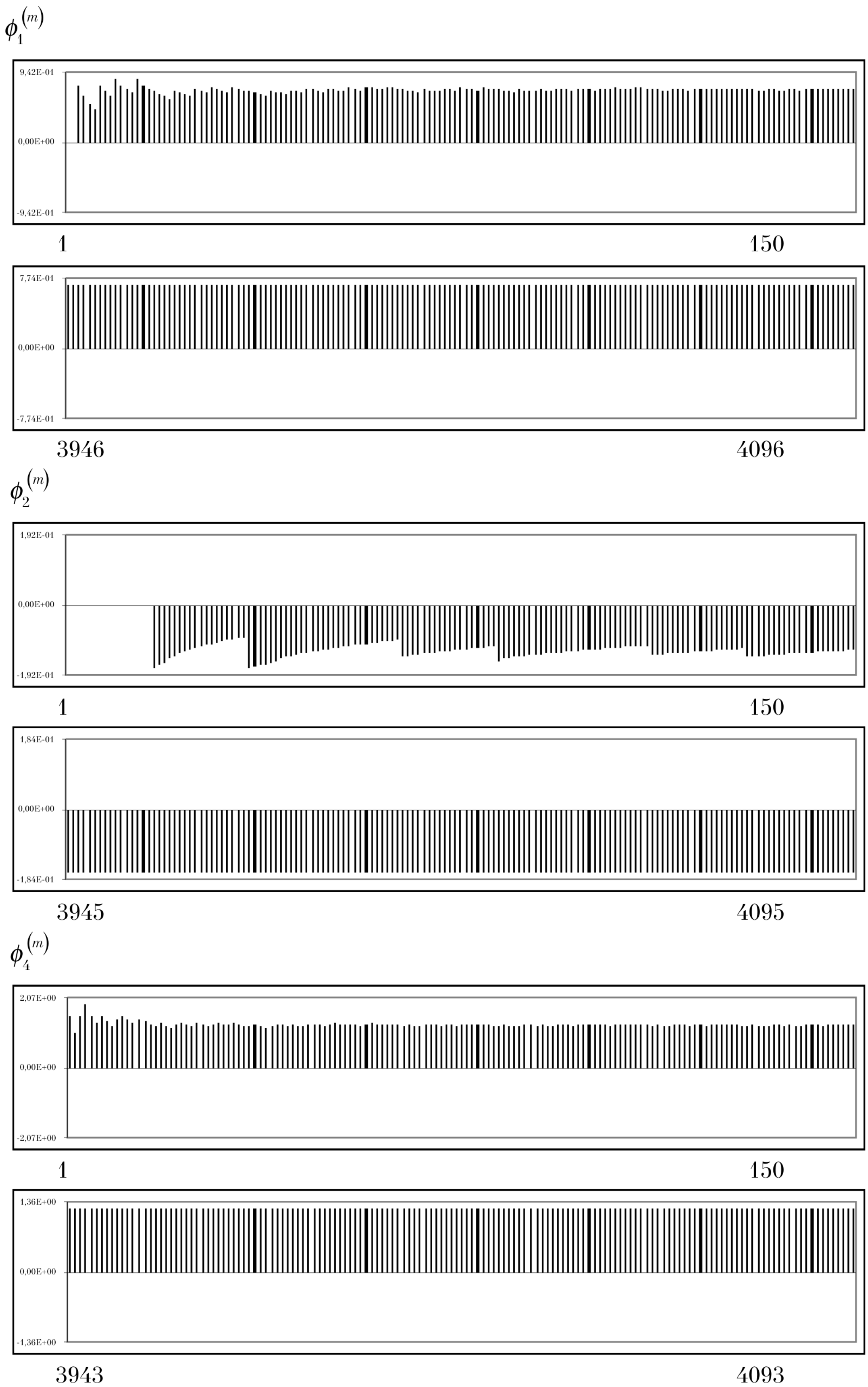

Рис. 6. Значения аргумента φ_i комплексных x_i (i=1,2,4) системы (7)

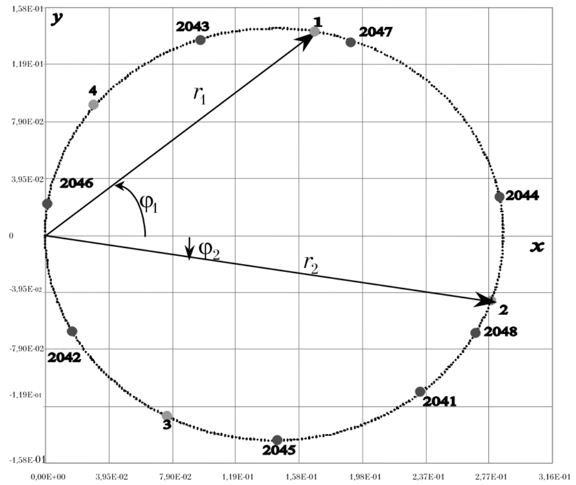

Рис. 7. Расположение x_i БСЛАУ (7) на комплексной плоскости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975. – 632 с.
2. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1980. – 534 с.
3. *Самарский А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
4. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дж. Ортега. – М. : Мир, 1991. – 376 с.
5. *Шмойлов В. И.* Непрерывные дроби в 3-х т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби / В. И. Шмойлов. – Львов : Меркатор, 2004. – 558 с.
6. *Годунов С. К.* Разностные схемы / С. К. Годунов, В.С. Рябенький. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
7. *Шмойлов В. И.* Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений / В. И. Шмойлов, Н. И. Витиска, В. Б. Коваленко, Е. Б. Титова. – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин-та, 2009. – 148 с.
8. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1999. – 799 с.
9. *Шмойлов В. И.* Использование непрерывных дробей в алгоритмах имитации физических процессов / В. И. Шмойлов, Н. И. Витиска, Д. В. Задорожний. – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин-та, 2006. – 296 с.
10. *Шмойлов В. И.* Использование цепных дробей для построения эффективных итерационных алгоритмов / В. И. Шмойлов, Н. И. Витиска, Е. Б. Титова. – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин-та, 2010. – 184 с.
11. *Качмар В. С.* Алгоритмы вычисления значений цепных дробей / В. С. Качмар, Б. П. Русын, В. И. Шмойлов. – Ж. вычисл. мат. и мат. физики, 1998. Т. 38, № 9. С. 1936–1451.

Шмойлов Владимир Ильич – научный сотрудник. Южный научный центр РАН. Телефон: (8634) 368337; E-mail: Shmoilov40@at.infotecstt.ru.

Витиска Николай Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры информатики ТГПИ. Таганрогский государственный педагогический институт. Телефон: (8634) 605397.

Титова Екатерина Борисовна – учитель информатики и ИКТ. МОУ СОШ №37 с углубленным изучением искусств и английского языка г. Таганрога Ростовской области. Телефон: (8634) 601444; E-mail: tikabo@mail.ru

Shmoylov Vladimir Ilyich – Researcher. Southern Scientific Center RAS. Phone: (8634) 368337. E-mail address: Shmoilov40@at.infotecstt.ru.

Vitiska Nikolai Ivanovich – Professor, Doctor of Technical Sciences Professor of Computer Science TGPI. Taganrog State Pedagogical Institute. Phone: (8634) 605397.

Titova Ekaterina B. – teacher of computer science and ICT. Secondary school № 37 in-depth study of the arts and English language Taganrog, Rostov region. Phone: (8634) 601444; E-mail address: tikabo@mail.ru