УДК 517.518.454

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ В БЫСТРОМ РАЗЛОЖЕНИИ

А. Д. Чернышов*, В. В. Горяйнов**

**Воронежская государственная технологическая академия*
***Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

Поступила в редакцию 13.04.2011 г.

Аннотация. Неизвестная функция, как решение некоторой краевой задачи, представляется в виде быстрого разложения, являющегося суммой быстрого ряда Фурье и специальной граничной функции определенного порядка. На примере различных контрольных функций проведены вычислительные эксперименты, которые путем оценки максимальной относительной погрешности позволили дать рекомендации по выбору оптимального порядка граничной функции.
Ключевые слова: быстрые ряды Фурье, коэффициенты Фурье, вычислительный эксперимент, погрешность вычислений, скорость сходимости ряда.
Annotation. Unknown function as the solution of some boundary value problem, is represented in the form of the rapid expansion which are the sum of a rapid Fourier series and special boundary function of a certain order. On an example of various control functions computing experiments which by an estimation of a maximum relative error have allowed to give recommendations for choice an optimum order of boundary function are made.
Key words: rapid Fourier series, of Fourier coefficients, computing experiment, an error of evaluations, a velocity of convergence of a series

ВВЕДЕНИЕ

При решении краевых задач часто используют ряды Фурье [1–3]. Возможность разложения некоторой функции $f(x)$ в ряд Фурье и ограничения на свойства $f(x)$ достаточно основательно изложены в [4].

Пусть для функции $f(x) \in C^{(1)}$ $(0 \le x \le 1)$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\pi x, \qquad b_m = 2\int_0^1 f(x)\sin m\pi x dx. \tag{1}$$

Если $f(0) \ne 0$ или $f(1) \ne 0$, то ряд (1) медленно сходится внутри отрезка $(0,1)$, расходится на его границах и его нельзя почленно дифференцировать [5]. Таким образом, классические ряды Фурье не эффективны при решении различных задач, связанных с дифференциальными уравнениями. По этой причине предлагается функцию $f(x)$ представить быстрым разложением [6], а коэффициенты разложения определить поточечным методом [7]. В связи с этим актуальным становится вопрос о выборе оптимальной граничной функции и минимального количества расчетных точек, необходимых для достижения требуемой точности вычислений при нахождении решения краевой задачи.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Быстрое разложение функции $f(x)$ $(0 \le x \le 1)$ представляется суммой граничной функции специального вида и быстрого ряда Фурье

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^* \sin m\pi x, \quad \big(f(x), M_{2p}(x)\big) \in C^{(2p+1)} \times \times \big(x \in [0,1]\big), \big(f(x), M_{2p}(x)\big) \in C^{(2p+2)} \times \times \big(x \in (0,1)\big), \tag{2}$$

где b_m^* – коэффициенты Фурье функции $f(x) - M_{2p}(x)$, $M_{2p}(x)$ – граничная функция, которая подбирается специальным образом достаточно гладкой. Например, из класса полиномов наименьшей степени x эти функции можно взять в виде

$$M_{2p}(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + \\ +\sum_{i=1}^{p} f^{(2i)}(0) A_{2i}(x) + \sum_{i=1}^{p} f^{(2i)}(1) B_{2i}(x), \tag{3}$$

где

$$A_{2i}(x) = \mathbf{\Phi}_{2i}(x) - x\mathbf{\Phi}_{2i}(1),$$

$$\mathbf{\Phi}_{2i}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x A_{2i-2}(x)\,dx\right] dx,\ A_0(x) = 1 - x,$$

$$B_{2i}(x) = F_{2i}(x) - xF_{2i}(1),$$

$$F_{2i}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x B_{2i-2}(x)\,dx\right] dx,\ B_0(x) = x.$$

Коэффициенты b_m^* для разложения (2) вычисляются по формуле

$$b_m^* = 2\int_0^1 \left(f(x) - M_{2p}(x)\right) \times \\ \times \sin(m\pi x)\,dx. \tag{4}$$

Ряд (2) устроен так, что допускает почленное дифференцирование до производных $(2p+2)$ порядка включительно. При этом ряды для производных до $(2p+1)$ порядка включительно равномерно сходятся всюду при $x \in [0,1]$, а для производной $(2p+2)$ порядка сходятся при $x \in (0,1)$ и расходятся на границах $x = 0,\ x = 1$.

Для случая $f(0) \neq 0$ и (или) $f(1) \neq 0$ скорость сходимости ряда (1) имеет порядок $b_m \sim (m\pi)^{-1}$ [8]. Использование граничной функции (3) позволяет повысить скорость сходимости ряда (2) так, что для коэффициентов b_m^* имеет место следующая оценка

$$b_m^* \sim (m\pi)^{-(2p+3)}. \tag{5}$$

Быстрая сходимость разложений (2) значительно сокращает объем вычислительных работ на ЭВМ и позволяет получать решения различных краевых задач в аналитическом виде. С ростом целого параметра p в формулах (2) и (3) скорость сходимости ряда (2) в соответствии с оценкой (5) растет, но увеличивается количество неизвестных величин

$$f(0), f(1), f''(0), f''(1), \ldots, f^{(2p)}(0), \\ f^{(2p)}(1), \left\{b_m^*\right\},\ m = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

через которые выражается граничная функция $M_{2p}(x)$ и исследуемая функция $f(x)$.

При рассмотрении некоторой краевой задачи неизвестную функцию $f(x)$ следует представить разложением (2). Тогда решение задачи сведется к нахождению коэффициентов, указанных в (6). В процессе решения краевой задачи возникает проблема выбора значения параметра p для граничной функции $M_{2p}(x)$ и количества членов ряда (2), т.к. от этого зависит общее число неизвестных в множестве (6). Нахождение коэффициентов Фурье b_m^* связано с необходимостью вычисления интегралов (4), которые во многих случаях в конечном виде не существуют, поэтому предлагается использовать поточечный метод их определения.

В случае «неберущихся» интегралов, возникающих при вычислении коэффициентов Фурье, используют различные способы, основанные на введении узлов во всей области интегрирования. В [9] предложен метод итераций. В [10, 11] применяются специальные кубатурные и квадратурные формулы с весовой функцией переменного знака. В [12] используются квадратурные формулы Смоляка, а в [13] исследуются квадратурные формулы Гаусса для различных специфических функций. В [14] предложены кубатурные формулы для вычисления коэффициентов Фурье периодических функций из класса Соболева.

Данные способы вычисления коэффициентов Фурье применяются для заранее заданных функций, наделенных некоторыми свойствами. Однако если функция заранее неизвестна и она должна быть определена из решения некоторой краевой задачи, то использование подобных методов становится проблематичным.

В этой связи предлагается поточечный метод вычисления b_m^* [7], свободный от проблемы вычисления интегралов вообще. В рядах (2) обычно ограничиваются конечным числом слагаемых, т.е.

$$f(x) \approx M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{n} b_m^* \sin m\pi x. \tag{7}$$

По аналогии с выражением (7) функцию $f(x)$ приближенно представим в виде

$$f(x) \approx M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{n} b_m \sin m\pi x. \tag{8}$$

Отличие выражений (8) от (7) заключается в определении коэффициентов b_m^* и b_m: коэффициенты Фурье b_m^* определяются соответственными интегралами (4), а b_m будем определять поточечным способом.

Для этого область $x \in [0,1]$ разбивается равномерно на $(n+1)$ промежутков n внутренними расчетными точками и записывается равенство (8) в каждой расчетной точке, т.е. получаются системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов b_m:

$$f(x_r) = M_{2p}(x_r) + \sum_{m=1}^{n} b_m \sin m\pi x_r, \qquad (9)$$
$$x_r = rh,\ h = \frac{1}{n+1},\ r = 1\ldots n,$$

где n – количество неизвестных коэффициентов b_m. Значения $x = 0$ и $x = 1$ не используются, т.к. на концах отрезка уравнения (9) обращаются в тождество. Следовательно, задача о вычислении коэффициентов b_m сводится к решению линейной алгебраической системы (9).

Определитель системы (9) отличен от нуля, поэтому система имеет единственное решение. Величина определителя не зависит от раскладываемой функции $f(x)$, а зависит только от количества расчетных точек. Вид функции $f(x)$ влияет на свободные члены системы (9). Система (9) может быть как однородной, так и неоднородной. Неоднородной она будет, если представляемая разложением (2) функция $f(x)$ не совпадает с граничной $M_{2p}(x)$. В частном случае может выполняться равенство $M_{2p}(x) = f(x)$, тогда система (9) станет однородной, а ее решение нулевым, т.е. все $b_m^* = 0$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

С целью уменьшения вычислительной работы, требуется найти оптимальное значение параметра p и количество расчетных точек, необходимых для поддержания заданной точности вычислений. Для этого были проведены вычислительные эксперименты с различными функциями $f(x)$, имеющими участки с большой кривизной и множеством точек перегиба, наличие которых создает вычислительные трудности, что подтверждается ниже, а также следует из примеров, приведенных в [15].

В качестве исследуемых функций с большим количеством точек перегиба и имеющих участки с большой кривизной были выбраны

$$f(x) = \sin(k+0.2)\pi x, \quad k = 0.45, 1, 2, \ldots, 10, \qquad (10)$$

$$f(x) = x^q,\ q = 0, 1, 2, \ldots, 10, \qquad (11)$$

$$f(x) = e^{-\alpha x},\ \alpha = 1, 10, 20, \ldots, 100. \qquad (12)$$

Данные функции на отрезке [0,1] имеют следующие графические особенности, которые существенно влияют на точность вычислений приближенных методов:

– функция (10) имеет k точек перегиба (число 0.2 в аргументе синуса выбрано для того, чтобы при $x = 1$ значения аргумента не были кратными π, что создает дополнительные вычислительные трудности);

– функция (11) при больших степенях q вначале прижата к оси x, а затем при $x \to 1$ круто поднимается вверх;

– функция (12) при больших α быстро убывает и прижимается к оси x.

Во внутренних точках отрезка [0;1] относительная погрешность функции и ее производных до $(2p+1)$ порядка включительно исследовалась по формуле

$$\delta = \frac{|\Delta|}{N} \cdot 100\%,$$

где Δ – абсолютная погрешность функции (или производной), N – максимальное значение функции (или производной).

При решении краевых задач часто встречаются дифференциальные уравнения второго порядка. Поэтому исследуем погрешность второй производной $\delta(f'')$, так как в этом случае погрешности первой производной $\delta(f')$ и тем более функции $\delta(f)$ будут меньше, чем $\delta(f'')$.

Вычисления проводились до тех пор, пока максимальная относительная погрешность второй производной $\delta_{\max}(f'') < 1\%$. Подобная погрешность является приемлемой для большинства технических расчетов. С порядком погрешностей функции и ее производных можно ознакомиться в статье [16]. Результаты вычислительных экспериментов анализировались с точки зрения минимального количества членов множества (6) при различных значениях параметра p. Полученные данные отражены в табл. 1.

Из данных табл. 1 следует, что на выбор граничной функции влияет как количество точек перегиба графика функции, так и наличие точек с большой кривизной. Если функция имеет точки перегиба, то именно это свойство является основополагающим при выборе $M_{2p}(x)$. Если же функция не имеет точек перегиба, то основополагающим свойством будет факт существования точек с большой кривизной.

Также из табл. 1 видно, что для $f(x) = x^q$ требуется меньшее количество расчетных точек

Таблица 1

Оптимальная граничная функция и минимальное количество расчетных точек

$f(x) = \sin(k+0.2)\pi x$	k	0.45	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	n	3	2	4	6	6	8	9	11	12	14	15
	$M_{2p}(x)$	M_2	M_4	M_4	M_4	M_6	M_6	M_6	M_6	M_6	M_6	M_6
$f(x) = x^q$	q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	N	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	4
	$M_{2p}(x)$	M_2	M_2	M_2	M_2	M_4	M_4	M_4	M_4	M_4	M_4	M_4
$f(x) = e^{-\alpha x}$	α	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	n	1	6	9	14	16	20	24	26	30	34	38
	$M_{2p}(x)$	M_2	M_4	M_6	M_6	M_8	M_8	M_8	M_{10}	M_{10}	M_{10}	M_{10}

Таблица 2

Количество расчетных точек, необходимых для $\delta_{\max}(f) < 1\%$

Функция	Граничная функция											
	M_0		M_2		M_4		M_6		M_8		M_{10}	
	n	$\delta_{\max}$, %	n	$\delta_{\max}$, %	n	$\delta_{\max}$, %	n	$\delta_{\max}$, %	n	$\delta_{\max}$, %	n	$\delta_{\max}$, %
$\sin 0.65\pi x$	3	0.95	1	0.41	1	0.04	1	0.004	1	$4\cdot10^{-4}$	1	$4.4\cdot10^{-5}$
$\sin 1.2\pi x$	5	0.93	2	0.55	2	0.08	1	0.50	1	0.18	1	0.06
$\sin 2.2\pi x$	10	0.92	4	0.73	3	0.52	3	0.14	3	0.04	2	0.67
$\sin 3.2\pi x$	15	0.91	6	0.83	5	0.38	4	0.49	4	0.18	4	0.07
$\sin 4.2\pi x$	20	0.91	8	0.89	6	0.81	6	0.24	5	0.47	5	0.21
$\sin 5.2\pi x$	24	0.99	10	0.93	8	0.61	7	0.49	6	0.89	6	0.45
$\sin 6.2\pi x$	29	0.97	12	0.97	9	0.97	8	0.82	8	0.34	7	0.77
$\sin 7.2\pi x$	34	0.96	14	0.99	11	0.77	10	0.50	9	0.55	9	0.25
$\sin 8.2\pi x$	39	0.96	17	0.78	13	0.64	11	0.73	10	0.81	10	0.40
$\sin 9.2\pi x$	44	0.95	19	0.82	14	0.88	13	0.50	12	0.43	11	0.59
$\sin 10.2\pi x$	48	0.99	21	0.84	16	0.75	14	0.68	13	0.60	12	0.80
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
x	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
x^2	3	0.44	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
x^3	4	0.94	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
x^4	6	0.95	1	0.20	1	0	1	0	1	0	1	0
x^5	8	0.95	2	0.48	1	0	1	0	1	0	1	0
x^6	10	0.95	3	0.42	1	0.07	1	0	1	0	1	0
x^7	12	0.94	4	0.38	2	0.20	1	0	1	0	1	0
x^8	14	0.94	5	0.36	2	0.74	1	0.04	1	0	1	0
x^9	16	0.94	6	0.34	3	0.35	2	0.14	1	0	1	0
x^{10}	18	0.94	7	0.33	3	0.85	2	0.68	1	0.04	1	0
e^{-x}	2	0.49	1	0.02	1	$3.8\cdot10^{-4}$	1	$8.7\cdot10^{-6}$	1	$2.1\cdot10^{-7}$	1	$5.3\cdot10^{-9}$
e^{-10x}	19	0.94	6	1.00	5	0.39	4	0.37	4	0.13	3	0.71
e^{-20x}	38	0.99	13	0.97	10	0.59	8	0.72	7	0.92	7	0.51
e^{-30x}	57	1.00	20	0.97	14	0.99	12	0.92	11	0.87	11	0.47
e^{-40x}	76	1.00	27	0.97	19	0.99	17	0.69	15	0.85	14	0.94
e^{-50x}	96	0.99	34	0.97	24	0.98	21	0.80	19	0.84	18	0.80
e^{-60x}	115	1.00	41	0.97	29	0.98	25	0.90	23	0.83	22	0.72
e^{-70x}	134	0.99	48	0.96	34	0.98	29	0.97	27	0.83	26	0.66
e^{-80x}	153	0.99	55	0.96	39	0.98	34	0.83	31	0.83	29	0.91
e^{-90x}	173	0.99	62	0.96	44	0.98	38	0.89	35	0.83	33	0.83
e^{-100x}	192	1.00	69	0.96	49	0.98	42	0.95	39	0.83	37	0.78

(в большинстве случаев одна расчетная точка) по сравнению с функциями (10) и (12) для достижения $\delta_{\max}(f'') < 1\%$. Это объясняется тем, что для $f(x) = x^q$ при целых значениях q, удовлетворяющих неравенству $q \le 2p+1$, $M_{2p}(x) = f(x)$, т.е. линейная алгебраическая система (9) будет однородной, ее решение нулевым (все $b_m^* = 0$) и при этом $\delta_{\max}(f) = 0\%$ (табл. 2), $\delta_{\max}(f') = 0\%$, $\delta_{\max}(f'') = 0\%$. Если же неравенство $q \le 2p+1$ не выполняется, то возникает погрешность, т.е. $\delta_{\max}(f) > 0\%$ (см. табл. 2). Для функций (10) и (12) $M_{2p}(x) \ne f(x)$, т.е. система (9) будет неоднородной и погрешность $\delta_{\max}(f) > 0\%$ (см. табл. 2).

Следует отметить, что в работе [7] показано, что с увеличением количества расчетных точек коэффициенты b_m приближаются к коэффициентам Фурье b_m^*. Поэтому выводы, сделанные по выбору оптимальной граничной функции для случая вычисления коэффициентов поточечным методом, можно считать справедливыми и для случая вычисления коэффициентов Фурье по формуле (4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что чем меньше точек перегиба имеет функция или чем меньше кривизна ее графика, тем меньшего порядка граничную функцию следует использовать в быстром разложении. Например, если предполагаемые решения краевой задачи являются монотонными функциями без точек перегиба и без точек с большой кривизной, то при использовании быстрого разложения для производных второго порядка достаточно воспользоваться граничной функцией M_2 и использовать три расчетные точки при определении коэффициентов Фурье. Этого будет достаточно, для обеспечения $\delta_{\max}(f'') < 1\%$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 741 с.

2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.

3. *Старков А. С.* Электрокалорический отклик сегнетоэлектрика на воздействие периодического электрического поля / А. С. Старков, С. Ф. Карманенко, О. В. Пахомов, А. В. Еськов, Д. Семикин, J. Hagberg // Физика твердого тела. –Т. 51. – №. 7. – 2009. – С. 1422–1426.

4. *Ильин В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы / В. А. Ильин. – М. : Наука, 1991. – 368 с.

5. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

6. *Чернышов А. Д.* Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ, 2009 г., Ч. 2. – С. 236–238.

7. *Чернышов А. Д.* О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, А. О. Соловьев // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т. 6. – № 2. – 2010. – С. 49–53.

8. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

9. *Мышкис А. Д.* Об эффективном вычислении коэффициентов Фурье с помощью итераций / А. Д. Мышкис // Успехи математических наук. – Т. XVI. – № 1(97). – 1961. – С. 155–156.

10. *Буре В. М.* К вопросу об использовании интерполяционных кубатурных формул для вычисления коэффициентов Фурье / В. М. Буре, Е. В. Седунов // Известия Вузов. Математика. – № 8. – 1981. – С. 63–65.

11. *Riess R. D.* On the determination of quadrature formulae of highest degree of precision for approximating Fourier coefficient / R. D. Riess, L. W. Johnson // J. Inst. Math. and Appl. – Vol. 13. – № 3. – 1974. – P. 345–351.

12. *Темиргалиев Н.* Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления / Н. Темиргалиев, С. С. Кудайбергенов, А. А. Шоманова // Известия Вузов. Математика. – № 3. – 2010. – С. 52–71.

13. *Bojanov B.* Quadrature formulas for Fourier coefficients / B. Bojanov, G. Petrova // J. Comput. and Appl. Math. – Vol. 231. – № 1. – 2009. – P. 378–391.

14. *Bulgak H.* Optimal cubature formulas for Fourier coefficients of periodic functions in Sobolev spaces / H. Bulgak, V. Vaskevich // Selcuk J. Appl. Math. –Vol. 1. – № 1. – 2000. – P. 3–20.

15. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.

16. *Горяйнов В. В.* Анализ погрешности быстрых рядов Фурье при их многократном дифференцировании для случая вычисления коэффициентов ряда поточечным методом / В. В. Горяйнов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т. 7. – № 2. – 2011. – С. 36–40.

Чернышов Александр Данилович – доктор физико-математических наук, профессор. Воронежская государственная технологическая академия, кафедра высшей математики. Тел.: (4732) 55-35-54; e-mail: chernyshovad@mail.ru.

Горяйнов Виталий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент. Воронежский государственный архитектурно-строительный университет. Кафедра высшей математики. Тел. (4732) 71-53-62; e-mail: gorvit77@mail.ru.

Chernyshov Alexandr Danilovich – the doctor of physical and mathematical sciences, the professor. The Voronezh State Technological Academy, Chair of higher mathematics, Tel. (4732) 55-35-54; e-mail: chernyshovad@mail.ru.

Gorjajnov Vitalij Valerevich – the candidate of physical and mathematical sciences, the docent. Chair of higher mathematics. Tel. (4732) 71-53-62; e-mail:gorvit77@mail.ru.