

# АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И РЕАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОЦЕНИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ (ИЗОБРАЖЕНИЙ) В УСЛОВИЯХ АДДИТИВНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ

А. А. Сирота, П. В. Калинин

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 25.03.2011

**Аннотация.** Получены соотношения для определения нижней границы дисперсии ошибки оценивания изображений, зашумленных импульсным и аддитивным шумом. Проведено сравнение полученной границы с результатами, получаемыми на основе применения различных алгоритмов фильтрации изображений. Произведено сравнение потенциальных границ дисперсии ошибки оценивания для случая нелинейной и линейной фильтрации.

**Ключевые слова:** линейная фильтрация, нелинейная фильтрация, нижняя граница оценки, неравенство Рао–Крамера, импульсный шум

**Annotation.** The expressions for minimal estimation error variance in case of impulse and additive noise for nonlinear filtration were found. The results were compared with neural network filtration and optimal linear filtration results. Potential variance bound for nonlinear filtration was compared with optimal linear filtration results.

**Key words:** linear filtration, nonlinear filtration, lower estimation bound, Rao–Kramer inequality, impulse noise

## ВВЕДЕНИЕ

Изображения, сформированные различными информационными системами, зачастую искажаются действием помех. Это затрудняет не только возможности восприятия человеком, но и их обработку (контурный анализ, распознавание объектов) в автоматическом режиме. Как правило, возникающие на изображениях помехи носят аддитивный и импульсный характер. Импульсные помехи являются частным случаем аппликативных помех, действие которых проявляется в затенении (замещении) отдельных участков изображения фрагментами случайной амплитуды, текстуры, формы.

С целью восстановления изображений зачастую используются методы линейной фильтрации, что связано с наличием удобного математического аппарата для расчета линейных фильтров и понятной интерпретацией. В то же время использование методов линейной фильтрации не позволяет получить приемлемое решение в ряде практически важных приложений. Известно, например, что задача оптимальной фильтрации допускает решение в классе линейных фильтров только в том случае, когда сигнал и аддитивная помеха независимы и имеют га-

уссовское распределение. В связи с этим широкое распространение получили нелинейные фильтры, синтезированные на эвристическом основе, например, медианные фильтры и их многочисленные модификации, используемые для устранения импульсных помех [1–3]. Оптимальная нелинейная фильтрация, как правило, сопряжена с большим объемом вычислений, причем улучшение качества обработки обычно сопровождается непропорциональным увеличением этого объема, что отрицательно сказывается на скорости фильтрации. Особенно это касается изображений, искаженных импульсным или аппликативным шумом. В данном случае, расчет оптимального нелинейного фильтра с использованием формулы Байеса практически невозможен, ввиду особенной трудоемкости – необходимо осуществить проверку  $2^N$  гипотез, где  $N$  – количество пикселей изображения. Определенные возможности в плане реализации алгоритмов нелинейной фильтрации с приемлемым быстродействием предоставляют нейросетевые технологии обработки информации [3].

Из сказанного выше ясно, что привлекательность линейных фильтров связана с простотой их разработки и относительно небольшим требуемым вычислительным ресурсом, тогда как

привлекательность нелинейных фильтров связана с потенциально лучшим качеством фильтрации, но ограничивается сложностью реализуемой обработки и высокими затратами с точки зрения объема вычислений. Поэтому существенный интерес представляют исследования, направленные на сравнение потенциально достижимого результата оптимальной нелинейной фильтрации с результатами оптимальной линейной фильтрации, что позволит более взвешенно выбирать структуру фильтра, исходя из имеющихся возможностей. Соответственно, целью данной работы является теоретический и экспериментальный анализ эффективности линейных и нелинейных алгоритмов фильтрации случайных полей (изображений), искаженных аддитивным и импульсным (аппликативным) шумом.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ДИСПЕРСИИ ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ

Для вычисления потенциальной эффективности процедуры нелинейной фильтрации в смысле минимизации дисперсии ошибки оценивания воспользуемся неравенством Рао–Крамера. Данное неравенство является одним из основных фундаментальных результатов статистической теории оценивания случайных процессов и полей и заключается в определении абсолютного нижнего предела дисперсии ошибки оценивания. Это фундаментальное положение установлено Фишером и доказано в современной форме Фреше, Дармуа, Рао и Крамером. В литературе оно чаще всего именуется неравенством Рао–Крамера или неравенством информации [4].

Согласно полученному результату, для несмещенной оценки случайного ненаблюдаемого вектора  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ , представляющего развертку анализируемого изображения, по наблюдаемому вектору  $X \in (X_1, \dots, X_N)^T$ , выполняется неравенство (1):

$$R(\theta) \geq I^{-1}(\theta), \quad (1)$$

где  $R(\theta)$  – матрица рассеяния;  $I(\theta)$  – информационная матрица Фишера. Элементы матрицы  $R(\theta)$  определяются следующим образом:

$$R_{i,j}(\theta) = M \left\{ (\hat{\theta}_i(X) - \theta_i) \cdot (\hat{\theta}_j(X) - \theta_j) \right\}, \quad (2)$$

где  $\hat{\theta}_i(X)$  – оценка  $i$ -го элемента вектора ненаблюдаемого изображения  $\theta$  по наблюдаемому изображению  $X$ . Элементы матрицы  $I(\theta)$  при

отсутствии априорной информации определяется из следующего выражения:

$$I_{i,k}(\theta) = M \left\{ \frac{\partial \ln F(X | \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln F(X | \theta)}{\partial \theta_k} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln F(X | \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln F(X | \theta)}{\partial \theta_k} \cdot F(X | \theta) \cdot dX, \quad (3)$$

где  $M$  – математическое ожидание,  $F(X | \theta)$  – функция правдоподобия наблюдаемого изображения.

При наличии априорных сведений относительно изображения элемент информационной матрицы Фишера (в данном случае обозначим его как  $J_{i,j}(p_c)$ ) определяется по следующей формуле [5]:

$$J_{i,j} = M \left\{ \frac{\partial \ln p(X, \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p(X, \theta)}{\partial \theta_j} \right\} = -M \left\{ \frac{\partial^2 \ln F(X | \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} - M \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}. \quad (4)$$

Учитывая выражение (3):

$$J_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{i,j}(\theta) \cdot p(\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln p(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot p(\theta) d\theta, \quad (5)$$

где  $p(\theta)$  – плотность распределения элементов исходного изображения.

Соответственно, неравенство для задачи фильтрации изображения при наличии априорной информации выглядит следующим образом:

$$R \geq J^{-1}. \quad (6)$$

В выражении (5) первое слагаемое учитывает информацию, получаемую из результатов наблюдения и соответствует усредненному по  $\theta$  значению элемента матрицы Фишера  $I_{i,j}(\theta)$  из выражения (3), а второе – априорную информацию.

Для проведения вычислений, необходимо определить функцию правдоподобия искаженного изображения. Пусть по результатам наблюдения  $X$  оценивается случайный вектор  $\theta$ . Пусть также задана плотность распределения  $F(X | \theta)$ . Тогда для случая импульсного и аддитивного шума функция правдоподобия определяется соотношением (7):

$$F(X | \theta, p_c) = \prod_{i=1}^N \left( p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2 \cdot \sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n \right), \quad (7)$$

где  $p_c$  – вектор,  $i$ -ый элемент которого  $p_c^i$  определяет вероятность искажения  $i$ -го элемента импульсным шумом;  $N$  – количество элементов в изображении;  $\sigma^2$  – дисперсия аддитивного шума,  $\theta_i$  – элемент вектора ненаблюдаемого оцениваемого изображения,  $x_i$  – элемент вектора наблюдаемого искаженного изображения,  $f_n$  – плотность распределения импульсного шума.

Определим  $I(\theta, p_c)$  для изображения, одновременно искаженного аддитивным гауссовым белым шумом и импульсным шумом, действующим независимо для каждого элемента (пикселя) изображения. Подставив функцию правдоподобия из выражения (7) в выражение (3), и проведя упрощения, получим:

$$I_{i,k}(\theta, p_c) = \begin{cases} \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2 \cdot \sigma^2}} (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2 \cdot \sigma^2}} + (1 - p_c^i) f_n} dx_i, & k = i \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \quad (8)$$

Как видно из (8), матрица Фишера – диагональная матрица, для которой ковариация ошибок оценивания различных элементов изображения равна 0, а ошибка оценивая диагональных элементов вычисляется исходя из выражения (9) численно, при известных параметрах  $X, p_c, \sigma, f_n$ .

Подставив полученное  $I(\theta, p_c)$  в выражение (5) и используя плотность распределения элементов вектора ненаблюдаемого изображения  $p(\theta)$ , получим выражение для матрицы Фишера при наличии априорной информации:

$$R_{\theta}(p_c) \geq J^{-1}. \quad (9)$$

Пусть  $p(\theta)$  – многомерное нормальное распределение с матрицей ковариации  $C$ , тогда из формулы (5) получим следующей выражение:

$$J_{k,i}(p_c) = C_{k,i}^{-1} + \begin{cases} \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\ \times \int_{\theta} \int_{x_i} \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{\sigma^2}} (\theta_i - x_i)^2}{(p_c^i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2 \cdot \sigma^2}} + (1 - p_c^i) f_n)} dx_i \times \\ + \\ \times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2} \theta^T C \theta} d\theta, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \quad (10)$$

где  $C_{k,i}^{-1}$  – элемент обратной матрицы ковариации с индексом  $k, i$ ;  $|C|$  – определитель матрицы ковариации. Как видно из (10), недиагональные элементы матрицы Фишера равны соответствующим элементам обратной матрицы ковариации, а для нахождения диагональных элементов необходимо вычислить многомерный интеграл по векторному параметру  $\theta$ , причем аналитически можно вычислить все интегралы, входящие в многомерный, кроме двух, которые берутся численно.

Вычисленная с помощью матрицы Фишера, полученной в формуле (10), граница дисперсии ошибки оценки не может быть превышена.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ КОНКРЕТНЫХ ПРОЦЕДУР ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим конкретный пример вычислений по формуле (10). Пусть  $f_n$  подчиняется следующему распределению:

$$f_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq y \leq b, \\ 0, & y < a, y > b \end{cases}, \quad (11)$$

тогда для вычисления интеграла выражения (10), используя введенную плотность распределения импульсного шума  $f_n(y)$  возможно действовать следующим образом.

Первоначально разобьем интеграл для элементов  $J(p_c)$  на три части, получим

$$\begin{aligned}
 Y_{i,i}(p_c) &= \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\
 &\times \int \int_{\theta \ x_i} \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{\left( p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n \right)} dx_i \times \\
 &\times \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta = \right. \\
 &= \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \cdot \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} \int_{x_i=-\infty}^a \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n} dx_i \times \\
 &\times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta + \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\
 &\times \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} \int_{x_i=a}^b \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n} dx_i \times \\
 &\times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta + \\
 &+ \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \cdot \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} \int_{x_i=b}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n} dx_i \times \\
 &\times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Далее приводим второй многомерный интеграл полученного выражения к двумерному интегралу, для чего проинтегрируем выражение

$$\begin{aligned}
 Y_2^i &= \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\
 &\times \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} \int_{x_i=a}^b \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) f_n} dx_i \times \tag{13} \\
 &\times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

по всем переменным, кроме  $\theta_i$  и  $x_i$ . Выполнив такое интегрирование, получим

$$\begin{aligned}
 Y_2^i &= \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot C_{i,i}}} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_a^b \frac{e^{-\frac{\theta_i}{2C_{i,i}} - \frac{(\theta_i - x_i)^2}{\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n} dx_i d\theta_i.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Заменяя бесконечные пределы конечными, достаточными для вычисления с необходимой точностью, исходя из имеющихся априорных данных о характере подынтегрального выражения, и произведя численное интегрирование, получим искомый результат.

Первый и третий интеграл формулы (12) можно взять аналитически:

$$\begin{aligned}
 Y_1^i &= \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\
 &\times \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} \int_{x_i=-\infty}^a \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n} dx_i \times \\
 &\times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{D^2}{\sigma^2} + 2 \cdot D + \sigma^2 \right) \times \\
 &\times \left( \frac{p_c^i}{(D + \sigma^2)^2} + \frac{p_c^i \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{\sqrt{D + \sigma^2}} \right)}{(D + \sigma^2)^2} \right) \times \\
 &\times - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_c^i a e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{D + \sigma^2}}}{\sqrt{\pi} (D + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}, \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 Y_3^i &= \frac{(p_c^i)^2}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^6} \times \\
 &\times \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} \int_{x_i=b}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot (\theta_i - x_i)^2}{p_c^i \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\theta_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} + (1 - p_c^i) \cdot f_n} dx_i \times \\
 &\times \frac{1}{\left( (2\pi)^{\frac{N}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-\frac{1}{2}\theta^T C^{-1} \theta} d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{D^2}{\sigma^2} + 2 \cdot D + \sigma^2 \right) \times
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\times \left( \frac{p_c^i}{(D + \sigma^2)^2} - \frac{p_c^i \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{\sqrt{D + \sigma^2}} \right)}{(D + \sigma^2)^2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_c^i a e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{D + \sigma^2}}}{\sqrt{\pi} (D + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом, вычисление исходного интеграла сводится к численному вычислению одного двумерного интеграла:

$$Y_{i,i}(p_c) = Y_1^i(p_c) + Y_2^i(p_c) + Y_3^i(p_c). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (10), а затем полученную матрицу  $J(p_c)$  в (9), получим окончательно матрицу рассеяния  $R_{\square}(p_c)$ .

Рассмотрим конкретный пример вычислений. При генерации случайного поля будем использовать функцию корреляции вида

$$R(x, x', y, y') = \sigma^2 e^{-\alpha r} = D e^{-\alpha r}, \quad (18)$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Используя данную функцию, можно определить матрицу ковариации  $S$  и сгенерировать реализации случайного поля в виде полутонового изображения [6]. Пример реализации случайного поля представлен на рис. 1 а. На рис. 1 б представлен пример искаженного импульсным шумом изображения, через  $p_{\text{шума}}$  обозначена вероятность поражения импульсным шумом пикселя.

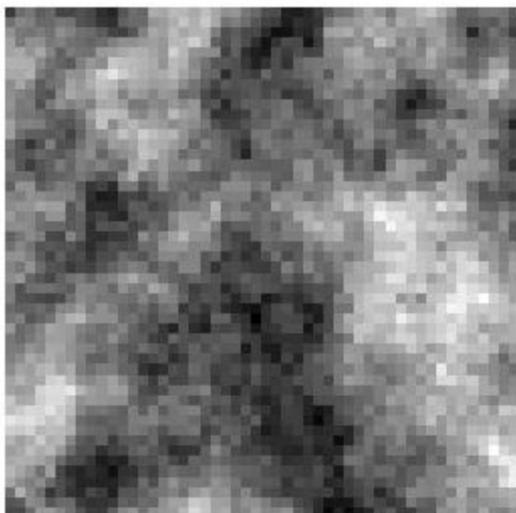


Рис. 1 а.  $D = 1, \alpha = 0.1, p_{\text{шума}} = 0$ .

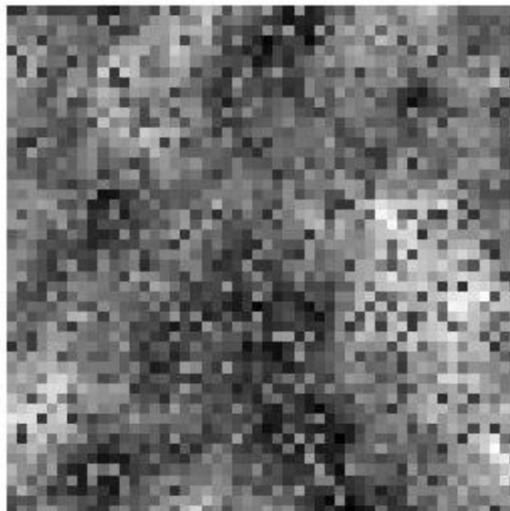


Рис. 1 б.  $D = 1, \alpha = 0.1, p_{\text{шума}} = 0.3$ .

Для выполнения процедуры нелинейной фильтрации, воспользуемся аппаратом искусственных нейронных сетей прямого распространения. Согласно [7] при правильной конфигурации и представительной выборке обучающих примеров многослойная нейронная сеть способна обеспечить восстановление любого нелинейного оператора преобразования данных, в том числе потенциально и оператора, реализующего оптимальный алгоритм нелинейной фильтрации изображения в присутствии шумов различных видов. Обучив нейронную сеть на конкретных входных данных при известных параметрах импульсного и аддитивного гауссова шума, можно достаточно эффективно восстановить изображение и приблизиться к нижней границе оценивания, определяемой полученными выше соотношениями.

С целью проверки этих соотношений был реализован нейросетевой нелинейный фильтр (НС) в виде трехслойной нейронной сети с 10 нейронами в первом скрытом слое и 10 нейронами во втором скрытом слое, имеющих сигмоидальную функцию активации, и линейным выходным слоем, формирующим значение оцениваемого элемента изображения. На вход сети подавался фрагмент обрабатываемого изображения в виде окна размером 5x5 пикселей. Количество обучающих примеров при построении фильтра составило 100000. Эксперименты проводились при фиксированных значениях дисперсии гауссова шума, равных 0.01, 0.25 и 0.49 и вероятности поражения импульсным шумом, одинаковой для всех элементов и лежа-

щей в интервале  $[0...1]$ . В экспериментах также использовался оптимальный линейный фильтр (ЛФ), полученный в работе [8].

На рис. 2 – 4 отображены зависимости СКО оценивания («теор1» – нижняя граница, вычисленная по выражениям (9) и (10)), полученные в ходе экспериментов.

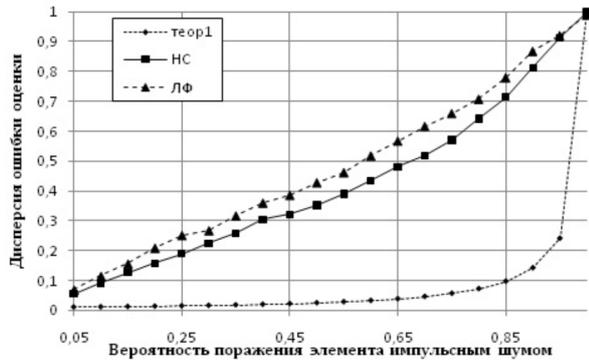


Рис. 2. Зависимость СКО оценки изображения от уровня импульсного шума,  $D = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $b = -a = 1$ ,  $\sigma^2 = 0.01$ ,  $b = -a = 1$

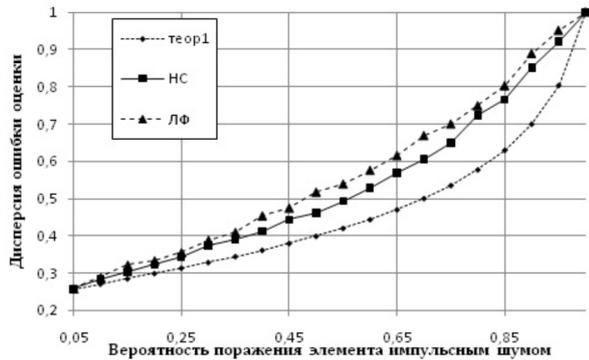


Рис. 3. Зависимость СКО оценки изображения от уровня импульсного шума,  $D = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 0.49$ ,  $b = -a = 1$

Так как функция правдоподобия импульсного шума не принадлежит к экспоненциальному семейству [4], то граница Рао–Крамера для импульсного шума не является достижимой, поэтому, как видно из приведенных графиков и формул (9), (10), при низкой дисперсии аддитивного шума вычисленная граница не обладает необходимой точностью, из за этого в данном случае ее информативность минимальна и не позволяет сделать выводов о потенциальной эффективности нелинейного фильтра (рисунок 2). Однако с увеличением дисперсии аддитивного шума точность определения гра-

ницы возрастает, и на рисунке (3) видно, что вычисленная граница близка к практическим результатом и может служить как ориентир при разработке фильтров.

### 3. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ОЦЕНКИ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ

Так как функция правдоподобия, определенная в формуле (7) не принадлежит к экспоненциальному семейству, то это говорит о том, что в данном случае нижняя граница не является достижимой, то есть существует разрыв между потенциально достижимой границей и минимальной границей, определенной выражением (9). Это означает, что возможно найти лучшую оценку минимальной границы. В связи с этим, вычислим границу другим способом, воспользовавшись тем фактом, что обработка изображения, зашумленного импульсным шумом, связана с перебором гипотез о координатах искаженных импульсным шумом пикселей. Чем меньше неопределенность относительно данных координат, тем меньше становится вклад ошибочных гипотез в итоговый результат. Предположив, что на изображении мы можем точно определить координаты пикселей, искаженных импульсным шумом, мы сводим таким образом неопределенность к нулю. Очевидно, что нижняя граница, полученная при данном предположении, не будет превышать границу для случая, когда неопределенность относительно координат искаженных пикселей отлична от нуля. Тогда, если изображение состоит из  $N$  пикселей, то число вариантов зашумления изображения импульсной помехой будет составлять  $2^N$ , а матрица рассеивания будет определяться выражением (19):

$$R_{ii} \geq \sum_{k=1}^{2^N} R(A_k) \cdot p(A_k), \quad (19)$$

где  $A_k$  –  $k$ -ая комбинация импульсной помехи – вектор из  $N$  элементов,  $i$ -ый элемент которого равен 0, если для данной комбинации  $i$ -ый элемент наблюдаемого вектора  $X$  поражен импульсной помехой, 1 – иначе;  $R(A_k)$  – матрица рассеивания, заданная выражением (9), определяющая нижнюю границу оценки для комбинации  $A_k$  импульсной помехи;  $p(A_k)$  – вероятность реализации  $k$ -ой комбинации импульсной помехи. Выполнив вычисления, получим другое значение матрицы рассеивания импульсного шума  $R_{ii}$ .

Важно заметить, что использование формулы (19) позволяет не учитывать конкретный вид распределения импульсного шума  $f_n$ , так как из формулы (8) следует, что  $I_{l,l}(0) = 0$  а  $I_{l,l}(1) = \frac{1}{\sigma^2}$ , подставив данные значения в выражение (19), получим:

$$J_{i,j}(p_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln p(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot p(\theta) d\theta + \begin{cases} 0, & k < l \\ 0, & p_c^l = 0 \\ \frac{1}{\sigma^2}, & k = l, p_c^l = 1 \end{cases} \quad (20)$$

При принадлежности  $p(\theta)$  к экспоненциальному семейству, при матрице ковариации  $C$ , формула (20) носит следующий вид:

$$J_{i,j}(p_c) = C_{i,j}^{-1} + \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2}, & i = j, p_c^i = 1 \\ 0, & p_c^i = 0 \\ 0, & i < j \end{cases} \quad (21)$$

то есть зависит только от матрицы ковариации изображения и характера импульсной или аппликативной помехи, и не зависит от конкретного вида  $p(\theta)$  и плотности распределения импульсной помехи. Несомненно, независимость от плотности импульсного шума отрицательно влияет на точность нижней границы, позволяя добиться, однако, ее универсальности.

Вычисления по формуле (21) можно существенно упростить, если для каждого пикселя рассматривать изображение не целиком, а ограничиться только значимой для пикселя окрестностью. Также если вероятность поражения элементов импульсным шумом одинакова, то есть  $p_c^i = p_c^j, i, j = 1, L$ , то учитывая симметричность изображения, величину  $R_{и}$  возможно рассчитать всего один раз, для остальных пикселей, исключая краевые, данная граница будет соблюдаться.

Исходя из формулы (19), для того, чтобы получить оценку нижней границы, необходимо рассмотреть все варианты реализации импульсной помехи. Их число ( $2^N$ ) не позволяет произвести вычисления. Однако возможно сократить число вычислений. Имеющиеся вероятности искажения пикселей изображения позволяют получить случайную реализацию импульсного шума. Подсчитав оценку нижней границы

$R(A_k)$  для  $H$  случайных реализаций импульсного шума, а, затем, произведя усреднение, получим искомый результат:

$$R_{и} \geq \frac{1}{H} \cdot \sum_{k=1}^H R(A_k), \quad (22)$$

где  $H$  – достаточное для необходимой точности число случайных реализаций,  $A_k$  – вектор,  $i$ -ый элемент которого равен 0, если элемент поражен импульсной помехой, 1 – иначе для  $k$ -го эксперимента.

На рис. 4–6 отображены полученные в результате тестирования результаты. Здесь под теор2 обозначена граница, полученная по выражению (22).

Как видно из графиков, введенная выражением (22) граница оказывается достаточно близкой к практическим результатам, а значит, является достаточно точной, особенно в тех случаях, когда определение координат иска-

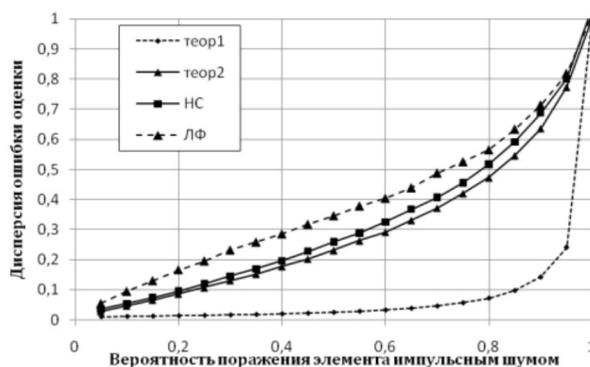


Рис. 4. Зависимость СКО оценки изображения от уровня импульсного шума,  $D = 1, \alpha = 0.5, \sigma^2 = 0.01, b = -a = 0.01$

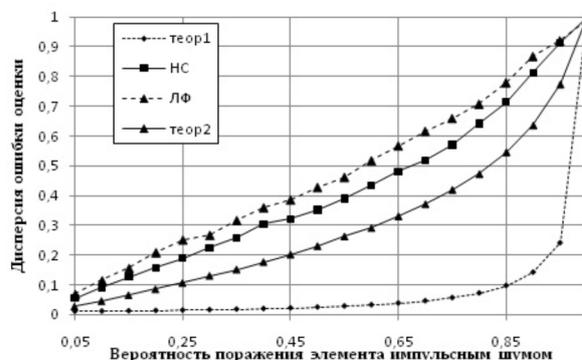


Рис. 5. Зависимость СКО оценки изображения от уровня импульсного шума,  $D = 1, \alpha = 0.5, \sigma^2 = 0.01, b = -a = 1$

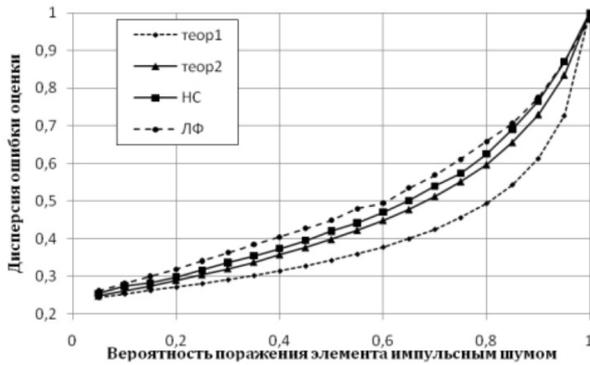


Рис. 6. Зависимость СКО оценки изображения от уровня импульсного шума,  $D = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 0.49$ ,  $b = -a = 0.01$

женных пикселей не сильно затруднено. Граница, определенная (22), как и ожидалось, показывает лучшие результаты при не очень большой дисперсии, чем определенная выражением (9), при большой же дисперсии аддитивного шума, в некоторых случаях полученная граница (22) несколько уступает (9). С точки зрения сравнения линейных и нелинейных фильтров, нижняя граница дисперсии ошибки оценки при линейной фильтрации, при вероятности поражения элемента импульсным шумом до 20%, примерно в два раза хуже нижней границы дисперсии ошибки оценки при нелинейной фильтрации, при дальнейшем увеличении вероятности поражения импульсным шумом, границы оценок сближаются, совпадая при шуме 100%. Результат применения нейросетевого алгоритма фильтрации при  $b = -a = 0.01$  практически совпадает с нижней границей, что говорит о высокой эффективности ее использования в данном случае, однако при  $b = -a = 1$ , результат нейронной сети далек от минимальной границы, что может говорить как о том, что построенная конфигурация нейронной сети в данной задаче неэффективна, так и о том, что определенная нижняя граница из за предположения об известности координат импульсов несколько потеряла точность.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные оценки нижней границы дисперсии ошибки оценивания случайного поля

**Сирота Александр Анатольевич** – доктор технических наук, профессор, кафедры информационных систем, Воронежский государствен-

оказываются достаточно близкими к результатам, получаемым на основе конкретных процедур фильтрации. Граница, определенная формулой (22) показывает лучшие результаты при не очень большой дисперсии аддитивного шума, тогда как граница, определенная (9), несколько лучше при большей дисперсии аддитивного шума и худшем качестве детектирования импульсного шума. При использовании нейросетевых алгоритмов фильтрации можно добиться результатов, близких к потенциальной границе, что говорит о высокой эффективности использования нейронных сетей при решении данной задачи. Превосходство алгоритмов нелинейной фильтрации над алгоритмами линейной фильтрации наиболее сильно проявляется при небольшой вероятности поражения элементов изображения импульсным шумом.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chan R. An iterative procedure for removing random-valued impulse noise / R. Chan, C. Hu, M. Nikolova // IEEE Signal processing letters. – 2004. – Vol. 11. – P. 921–924.
2. Dong Y. A new directional weighted median filter for removal of random-valued impulse noise/ Y. Dong, S. Xu // IEEE Signal Process. Lett. – 2007. – Vol. 14 i3. – P. 193–196.
3. Переключающийся медианный фильтр с блоком предварительного детектирования / А. Л. Приоров [и др.] // Цифровая обработка сигналов. – 2006. – №4. – С. 2–8.
4. Теребиж В. Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач / В. Ю. Теребиж. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.
5. Тихонов В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
6. Алгазинов Э. К. Анализ и компьютерное моделирование информационных процессов и систем / Э. К. Алгазинов, А. А. Сирота. – М.: Диалог-МИФИ, 2009. – 416 с.
7. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function / G. Cybenko // Math of Control Signals and Systems. 1989. № 2. P. 303–314.
8. Сирота А. А. Статистические и нейросетевые алгоритмы восстановления цифровых изображений в условиях аппликативных искажений / А. А. Сирота, В. Г. Попов // Вестник ВГУ. Сер. «Системный анализ и информационные технологии». 2006. № 1.

**Sirota Aleksandr Anatolyevich** – Doctor of Technic Sciences, Professor, the dept. of the Information Systems, Voronezh State

ный университет. Тел.: (4732) 208-724. E-mail: sir@cs.vsu.ru.

University. Tel. (4732)208-909. E-mail: sir@cs.vsu.ru.

**Калинин Павел Владимирович** – студент 1 курса магистратуры, кафедры информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: pvmailx5@mail.ru .

**Kalinin Pavel Vladimirovich** – 1st year magistracy student, the dept. of the Information Systems, Voronezh State University. E-mail: pvmailx5@mail.ru.