УДК 681.5

# ФИЛЬТРУЮЩИЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

**В. А. Каладзе**

*Международный институт компьютерных технологий*

**Поступила в редакцию 31.01.2011 г.**

**Аннотация.** В работе показано, что алгоритмические модели ДПМ, предназначенные для описания эволюционирующих случайных процессов, принадлежат к классу стохастических динамических систем. Проведен сравнительный анализ с известной алгоритмической моделью Калмана при описании эволюционного поведения систем статистической динамики.
**Ключевые слова:** динамический случайный процесс, алгоритмическая модель, каскадный фильтр, параметровариатор, предиктор, адаптация.
**Annotation.** In work it is shown, that the algorithmic models DPM intended for the description of evolving casual processes, belongs to a class of stochastic dynamic systems. The comparative analysis with known algorithmic Kalman model is carried out at the description of evolutionary behaviour of systems of statistical dynamics.
**Keywords:** dynamic casual processes, algorithmic model, cascading filter, parameter variator, predictor, adaptation.

## ВВЕДЕНИЕ

В зависимости от способа наблюдения и обработки случайных процессов – в виде непрерывного случайного сигнала или дискретной случайной последовательности, выделяются два класса результатов исследования: определяемого дифференциальными или разностными стохастическими уравнениями.

Теоретическое описание динамических систем дифференциальными уравнениями, осложнённое доказательствами существования и единственности решений, удобное при реализации на аналоговой технике, остаётся невостребованным в современных компьютерных технологиях, ставших в настоящее время важнейшим инструментом исследований и практической реализации. Смена акцента в научной парадигме привела фактически к переходу от математически корректных задач описания систем к упрощённым, необусловленным моделям с достаточно простыми методами вычислительной математики их реализации.

Сами по себе численные методы, позволяющие через разностную аппроксимацию дифференциального оператора перейти от дифференциальных к алгебраическим уравнениям, при описании динамических систем не обеспечивают изоморфности полученных математических моделей. Однако большое количество выполняемых расчётов, многократное повторение простых вычислительных схем на достаточно большом объёме данных в практических задачах обеспечивают получение адекватных, с «необходимой точностью», гомоморфных моделей. Основным неудобством при усложнении таких моделей является рост числа параметров, подлежащих идентификации.

Поскольку поведение стохастических динамических систем в фазовом пространстве состояний $W$ представимо в виде нестационарных случайных процессов, то модели сложных систем закономерно рассматривать как прогнозирующие фильтры общего вида с адаптивной структурой.

Для описания эволюции состояния динамических систем в условиях статистической неопределённости удобно использовать динамические предикторные[1] модели (ДПМ) [1], которые позволяют выделять полезный сигнал, как основную тенденцию развития случайного процесса $Y(t)$ ($Y \subset W$) со стационарными приращениями [2].

С помощью ДПМ-подхода возможно описать сложные динамические системы несколькими линейными алгебраическими зависимостями с переменными параметрами и процедурами динамического осреднения. Т.к. поведение сложных систем наблюдается как скалярная выборочная функция нестационарного случай-



[1] прогнозирующие (англ.)

ного процесса, то применение ДПМ фактически приводит к восстановлению описания многомерной динамики.

Такая динамическая модель не зависит от начальных условий и настраивается в каждый момент времени на текущее решение задачи, используя регулярно поступающую обновляющуюся информацию о процессе.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Структура модели ДПМ, представленная на рис. 1, состоит из **каскадного фильтра**, с экспоненциальным [3] эффективным преобразованием,

$$S_i^k(y) = (1-\alpha)S_{i-1}^k(y) + \alpha S_i^{k-1}(y) \text{ при } k = \overline{0,n}, \quad (1)$$

где $S_t^0(y) = y(t)$, $\overline{S}_t = (S_t^1, ..., S_t^{n+1})$ – оценки соответствующих уровней каскадного фильтра (КФ), $\alpha \in (0,1)$, и **динамического ядра**, к компонентам которого относятся:

*предиктор*

$$f_{t+1}(y) = \sum_{k=0}^{n} \overset{(k)}{f_t}(y, \mu^k, \overset{k}{\psi}), \quad (2)$$

где $\overset{(k)}{f_t}(y) = \mu^k \overset{k}{\psi}_t(y)$ при $k = \overline{0,n}$, $\overset{(k)}{f}(y)$ принадлежит множеству $F_k$ и является оценкой $k$-ой производной функции состояния $f(y)$, коэффициент $\mu^k = \alpha^k / k!(1-\alpha)^k$,

и *параметровариатор*, процедура, параметризующая модель,

$$\overset{k}{\psi}_t = \overset{k}{\psi}\left(\left\{S_t^j(y, S_{t-1}^j, S_t^{j-1})\right\}_1^{k+1}\right), \quad (3)$$

В модели третьего порядка ($n$ = 3) праметровариатор (3), формирующий структурные параметры модели из компонент КФ, имеет вид [1]

$$\overset{o}{\psi}_i(y) = 4S_i(y) - 6S_i^2(y) + 4S_i^3(y) - S_i^4(y),$$

$$\overset{1}{\psi}_i(y) = 6S_i(y) - 14S_i^2(y) + 11S_i^3(y) - 3S_i^4(y),$$

$$\overset{2}{\psi}_i(y) = 4S_i(y) - 11S_i^2(y) + 10S_i^3(y) - 3S_i^4(y),$$

$$\overset{3}{\psi}_i(y) = S_i(y) - 3S_i^2(y) + 3S_i^3(y) - S_i^4(y).$$

Каждый уровень фильтра (1) определяется зависимостью $S_t^k(y, S_{t-1}^k, S_t^{k-1})$, но, учитывая, что оператор эффективного преобразования $S[\circ]$ действует $W \rightarrow W$, эту запись можно упростить как $S_t^k(y)$, что делает аналитические выражения значительно нагляднее. При этом любой $k$-й уровень КФ итеративно включает в себя все ниже стоящие уровни, начиная с ($k$-1)-го и до нулевого $S_t^0(y) = y(t)$.

В самом деле, систему рекуррентных соотношений (1) на каждом шаге можно представить конечной формой

$$S_i^k = (1-\alpha)\sum_{p=0}^{k-1} \alpha^p S_{i-1}^{k-p} + \alpha^k y_i.$$

Информационные потоки, действующие в каскадном фильтре, представлены на рис. 2.

Для корректного описания систем и процессов важна не только полнота представляющих их законов, но и однородность множеств, которым принадлежит информация, используемая в них. Очевидно, что $\overline{S} \in V^{n+1}$, $\overline{f} = \left(\overset{0}{f}, \overset{1}{f}, ..., \overset{n}{f}\right) \in W^{n+1}$ – вектора в общем случае аффинных пространств и $V^{n+1}, W^{n+1} \subset W$, $t \in T \equiv [0, T]$.

Оценка качества алгоритмических моделей ДПМ определяется по текущей точности прогноза поведения исследуемой системы. Это их существенно отличает от функциональных моделей, где адекватность определяется из требования близости откликов системы и модели на достаточно большой области ранее наблюдённых значений.

Критерий наименьших квадратов, в котором операция математического ожидания выполняется как среднее арифметическое, не может

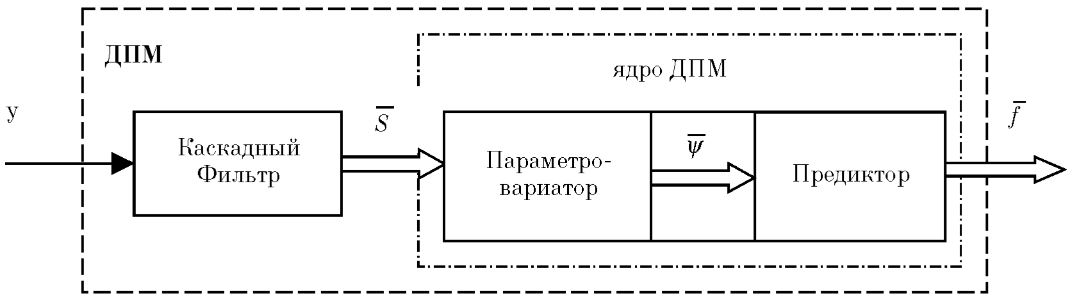


*Рис. 1.* Структурная схема ДПМ

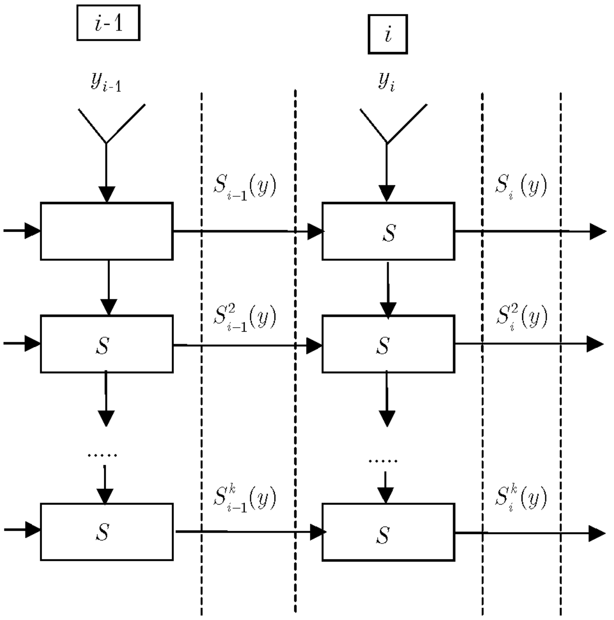


*Рис. 2.* Схема информационных потоков КФ

оценивать результаты прогноза фазового состояния динамической системы. Поэтому в нестационарных условиях, когда статистическая обработка проводится на данных, быстро теряющих с течением времени информационную ценность, в качестве оператора математического ожидания используется итеративный оператор экспоненциального среднего, как статистически и динамически устойчивая [3] осредняющая процедура с фокусирующей весовой функцией.

В этом случае оценкой адекватности модели может служить взвешенный критерий оптимальности с аналогичной весовой функцией. Такой критерий в дискретном времени имеет вид

$$\alpha\sum_{i=0}^{n}(1-\alpha)^i\,(y_{n-i+1}-f_{n-i+1})^2 \to \min.$$

Введём в рассмотрение $\bar{\varphi}(t,\bar{S},\bar{f})$ – вектор-функцию со значениями в $n$-мерном подпространстве $W^n$ фазового пространства. Тогда динамику исследуемой системы можно описать в канонической форме [4] через оцениваемые компоненты фазового пространства в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{f}}{dt}=\bar{\varphi}(t,\bar{S},\bar{f}),$$

с $S_0(y)=y_0$ – начальным значением наблюдаемой случайной (статистической) временной последовательности $\{y_t\}$ (СВП), являющейся реализацией случайного процесса $Y(t)$.

Установим status quo структуры ДПМ по отношению к каноническому виду динамической системы. Проквантовав временную ось равноотстоящими узлами с тактом $\Delta t$, учитывающим динамику оператора $S[\circ]$, введём новое обозначение индекса времени $t=i$. Определим удобную для данного изложения форму индексации времени $f_{t(k)}=f\big|_t$ и структурного параметра по принципу $f_t=f_{k+1}\big|_t$.

Приведём необходимые преобразования для предикторов второго

$$f\big|_{i+1}=f\big|_i+\dot{f}\big|_i+\frac{1}{2}\ddot{f}\big|_i, \tag{4}$$

и третьего порядка

$$f\big|_{i+1}=f\big|_i+\dot{f}\big|_i+\frac{1}{2}\ddot{f}\big|_i+\frac{1}{6}\dddot{f}\big|_i. \tag{5}$$

Так для выражения (4) при

$$f_1=f;\ f_2=\frac{\partial f_1}{\partial t}=\dot{f},$$

получим каноническую форму:

$$\begin{cases}\dot{f}_1\big|_i=f_2\big|_i,\\ \dot{f}_2\big|_i=2\left(f_1\big|_{i+1}-f_1\big|_i-f_2\big|_i\right).\end{cases} \tag{6}$$

Для предиктора третьего порядка (5) при $f_1=f$, $f_2=\dot{f}$, $f_3=\ddot{f}$ нормальная форма примет вид

$$\begin{cases}\dot{f}_1\big|_i=f_2\big|_i,\\ \dot{f}_2\big|_i=f_3\big|_i,\\ \dot{f}_3\big|_i=6\left(f_1\big|_{i+1}-f_1\big|_i-f_2\big|_i-\tfrac{1}{2}f_3\big|_i\right).\end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, из канонических форм (6), (7) видно, что ДПМ разной степени сложности в каждый момент времени описывает исследуемый случайный процесс $Y(t)$ в распараллеленном виде, представляя его как многомерный процесс, состоящий из кортежа дифференциальных характеристик $\bar{f}=\left(\dot{f}_1,\dots,\dot{f}_n\right)$ в зависимости от размерности $n$ адекватного математического описания исследуемой системы.

Экспоненциальный фильтр $S(y)$, как эффективное преобразование пространства в себя, а, следовательно, и каскадный фильтр, сформированный на его основе, в силу своей линейности не изменяют структуры и сигнатур пространства. Поскольку также линейно и динамическое ядро модели, то аналогичными свойствами обладает и сама модель ДПМ. Кроме того, экспоненциальный фильтр сохраняет форму базовых функций конечных разложений, как гармонических, так и степенных [6].

Исходя из структуры ДПМ (рис. 1), следует, что ДПМ преобразует одномерное гильбертово пространство $Y$ в $(n+1)$–кратное декартово произведение $\underbrace{F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_n}_{n+1}$, образуя, таким образом, фазовое пространство $W^{n+1}$ модели. Выше указывалось на аффинность такого пространства, однако при необходимости теоретических исследований, на нём формально можно ввести метрику.

Расписывая цепочку зависимостей от наблюдаемой СВП через каскадный фильтр и параметровариатор, получим полное описание ДПМ как динамической системы.

Таким образом, семейство моделей ДПМ представляет собой адаптивный фильтр с переменной структурой для случайных процессов со стационарными приращениями. ДПМ описывают в $(n+1)$-мерном фазовом пространстве, эволюционирующий вектор состояния динамической системы. Правые части $\overline{\phi}$ уравнений могут быть записаны в виде линейной суперпозиции функций состояния с положительно определёнными числовыми матрицами $M$ и $N$:

$$\dot{\overline{f}}\Big|_i = M\,\overline{f}\Big|_{i+1} - N\,\overline{f}\Big|_i ,$$

где вектора $\overline{f}\Big|_i$ и $\overline{f}\Big|_{i+1}$ представлены через многомерную информацию, преобразованную КФ из наблюдений.

Заметим, что в отличие от ДПМ так называемые «многомерные» «временные ряды» [5] не описывают поведение многомерных объектов. Декларируемая «многомерность» на самом деле оборачивается количеством значений подпоследовательности одномерной реализации случайного процесса, используемых в модели «временного ряда». Подпоследовательность этих значений определяет формируемый оператор их взаимосвязи, чаще всего ковариационную матрицу, как, например, у «многомерного» фильтра Калмана.

Связано это с тем, что в исследованиях случайных процессов применили вероятностное описание системы случайных величин, как сечений случайного процесса, рассматривая эту систему как многомерную случайную величину. В частности, это подтверждает высказывание П. Фалба [4], что стохастический процесс представляет собой параметризованное семейство случайных величин.

Следовательно, «многомерные временные ряды» являются скалярными выборочными функциями случайных процессов, «размерность» в которых определяется максимальной длиной взаимосвязанных подпоследовательностей, используемых для их многокомпонентного (многопараметрического) описания.

Компонентами «многомерного» (временнóго!) вектора наблюдений, которым оперируют «многомерные временные ряды», являются значения всё той же подпоследовательности наблюдаемой скалярной СВП. Размерность этого вектора определяет глубину памяти модели выборочной функции случайного процесса, которую почему-то называют временным рядом.

## АДАПТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Проведём сравнение ДПМ с известными адаптивными фильтрами, действующими в той же предметной области. Наиболее близким аналогом, ориентированным на фильтрацию и прогноз нестационарных случайных процессов по единственной наблюдаемой фазовой компоненте, является фильтр Калмана [7], процедура, разработанная для получения в реальном времени оптимальной оценки фазовых состояний линейных систем с динамикой первого порядка при наличии гауссовской помехи наблюдения.

Для установления концептуальных закономерностей, на которых сформирован фильтр Калмана, рассмотрим основные соотношения и свойства этой алгоритмической модели случайного процесса.

Текущая оценка $\hat{x}_i$ состояния $x_i$ динамической системы $D$

$$x_{i+1} = D_i x_i + w_i \tag{8}$$

формируется из предыдущей оценки $\hat{x}_{i-1}$ и текущего значения $y_i$

$$y_i = H_i x_i + v_i$$

наблюдаемой СВП $\{y_j\}_1^i = 1$ с помощью их взвешенной линейной комбинации, называемой фильтром Калмана

$$\hat{x}_i = L_i \hat{x}_{i-1} + K_i y_i , \tag{9}$$

где несмещённость полученной оценки, при гауссовских шумах $v$ и $w$, гарантируется выбором весовых параметров $L_i$ и $K_i$, связанных соотношением

$$L_i = I - K_i H_i . \qquad (10)$$

Для основного параметра $K_i$ фильтра, так называемого коэффициента усиления, Калманом было получено выражение, связывающее его с ковариационными матрицами $P$ и $R$ – оценками точности вектора состояния системы и вариации шума $v$ соответственно. Для того чтобы рассчитанная по (9) оценка состояния $\hat{x}_i$ была эффективной, т.е. обладала минимальной дисперсией и, соответственно, минимальным был «шум» $w_i$ модели (9), диагональные элементы матрицы $P$ минимизируются, что приводит к соотношению

$$K_i = P_{i-1} H_i^T \left[ H_i P_{i-1} H_i^T + R \right]^{-1} , \qquad (11)$$

из которого находятся оптимальные значения $K_i$. Из этого выражения можно получить итерационную схему расчёта ковариационной матрицы

$$P_i = \left[ I - K_i H_i \right] P_{i-1} , \qquad (12)$$

которая определяет для сходящейся процедуры (9) характер снижения информационной неопределённости в получаемой оценке.

Основное выражение для $K_i$, позволяет связать точность выбора его значений с неопределённостью наблюдений

$$K_i = P_i H_i^T R^{-1} . \qquad (13)$$

В фильтре Калмана для оценки качества моделирования было введено понятие $\omega$ -шума системы с ковариационной матрицей $Q$, который является индикатором адекватности модели, т.е. чем больше расхождение между моделью и системой, тем более велика переменная норма матрицы $Q$.

Основным требованием применения оптимального фильтра Калмана, т.е. для обеспечения его сходимости, является полная статистическая информация о матрицах $R$, $D$, $H$, начальных значениях $\hat{x}_0$ и $P_0$. Если же фильтр используется для прогноза, то известной должна быть и матрица $Q$. Поскольку оптимальные оценки (11) и (12) получены из критерия наименьших квадратов, то фильтруемый шум для обеспечения оптимальности процедуры должен быть нормальным. При выполнении таких условий оценки фильтра Калмана получаются несмещёнными, эффективными и состоятельными. Однако оценки с такими характеристиками могут быть получены только по однородной статистической выборке, что требует, самое малое, эргодичности фильтруемого процесса. Кроме того, при вычислении ковариаций математическое ожидание определяется только как среднее арифметическое, что абсолютно не допустимо при фильтрации эволюционирующих случайных процессов общего вида.

Рассмотрим основные закономерности взаимодействия шумов, параметров фильтра и оценок состояния. Пусть, не уменьшая общности, матрица наблюдений $H = I$. При отсутствии статистической связи между соседними моментами времени матрица $R$ диагональная вместе с обратной к ней. Это означает, что коэффициент усиления $K_i$ прямо пропорционален неопределённости в оценке состояния и обратно пропорционален интенсивности искажающего шума. Если изменения полезного сигнала незначительны в сравнении со среднеквадратической характеристикой шума, т.е. шум, искажающий измерения велик, а ошибки оценки состояния малы, то значения $K_i$ будут достаточно малы. При обратной ситуации вся неопределённость в задаче фильтрации связана с изменениями в основной тенденции процесса, и значения коэффициента усиления будут увеличиваться. При этом для сходимости процедуры необходимо $||K|| < 1$. Все эти установленные свойства коэффициента усиления фильтра Калмана эквивалентны закономерностям выбора адаптивного коэффициента экспоненциального фильтра.

Сама рекуррентная форма фильтра Калмана

$$\hat{x}_i = \left( I - K_{i-1} \right) \hat{x}_{i-1} + K_i y_i , \qquad (14)$$

при $K \equiv \alpha$ оказывается идентичной процедуре экспоненциального фильтра. Соответственно выражение (10) принимает вид $L \equiv (1 - \alpha)$.

Учитывая (9) и (10), можно представить (14) в конечной форме

$$\begin{gathered} \hat{x}_i = K_i y_i + K_i \left( I - K_{i-1} \right) y_{i-1} + \\ + \ldots + K_i \left( I - K_{i-1} \right) \ldots \left( I - K_{i-k} \right) y_{i-k} , \end{gathered} \qquad (15)$$

из которой видно, что коэффициенты значений наблюдаемой последовательности связаны экспоненциально. Эта зависимость (15) также идентична конечной форме экспоненциального фильтра [4].

Отметим, что калмановская фильтрация уже при «цветной» гауссовской помехе и тем более для шума общего вида даёт неудовлетворительные результаты [8]. В условиях неоптимальных для этой модели обычно формируют так называемые субоптимальные процедуры, большая часть которых, как показала практика [9], неустойчивы.

Ковариационная функция, основа обучения в фильтре Калмана, всего лишь моментная функция, предназначенная для оценки количественных характеристик конкретно известного вида процесса, а в процедурах моделирования требуется учитывать качественные особенности случайного процесса, в большинстве случаев неизвестные. Характерная особенность моментных функций в том, что, в отличие от закона распределения, математическое описание непосредственно ими случайного процесса не позволяет однозначно учитывать особенности исследуемого процесса и даже невозможно однозначно решить вопрос о его непрерывности. Классическими примерами этого положения можно считать такие пары процессов с одинаковыми ковариационными функциями, как пуассоновский и винеровский, а также телеграфный и Орнштейна-Уленбека, в которых первый – дискретный, а второй – непрерывный.

Вывод уравнений [1], представляющих динамическую предикторную модель, не был связан ограничениями по типу и статистическим характеристикам искажающего шума, а также требованиями к структуре, характеру нелинейности, динамичности и параметрам функции системы. Областью применения ДПМ могут быть задачи возникающие на производстве, обработки сигналов различной сложности, а также анализа социально-экономических процессов.

## СУБОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

С общих позиций теории математического моделирования оптимальным считается фильтр, который формирует наилучшую оценку в смысле критерия наименьших квадратов (КНК). Так линейный фильтр Калмана-Бьюси (непрерывная форма) [10] формирует оптимальную линейную оценку состояния линейной системы на всём временном промежутке.

Поскольку в нелинейном случае параметры КНК для разных моментов времени будут различаться, то придётся либо ставить задачу многокритериальной оптимизации, либо использовать байесовский подход для получения апостериорных оценок

$$\hat{X}_t = M\left[X_t / Y_{t_0}^t\right],$$

который формирует оптимальную оценку в любой момента времени $t$. Однако, рассматривая многокритериальный подход или использование неизвестного апостериорного распределения, трудно надеяться на то, что получаемая таким образом оценка будет оптимальной для любого момента времени $t$, что возможно лишь в линейном случае. Как правило, такие задачи в нелинейном случае не имеют единственного оптимального решения.

В теории приближённого (субоптимального) нелинейного оценивания существует всего два подхода. Первый содержит методы, основанные на приближённом решении уравнений нелинейной фильтрации – метод нормальной аппроксимации, метод моментов, метод семиинвариантов и ортогональных разложений. Второй – методы, основанные на упрощении уравнений оптимальной нелинейной фильтрации. К ним относятся обобщённый фильтр Калмана-Бьюси, фильтры второго порядка и гауссов фильтр, которые по сложности реализации равноценны фильтру метода нормальной аппроксимации.

Теория условно-оптимальной фильтрации Пугачёва позволяет строить фильтры наименьшей сложности [9]. Она даёт возможность получать фильтры, обладающие более высокой точностью, чем субоптимальные фильтры Калмана, равноценные им по сложности [9].

Условно оптимальная фильтрация Пугачёва, использующая апостериорное оценивание, построена на применении разностных уравнений, которые могут быть вычислены на основе результатов наблюдений в реальном времени, что, собственно, и даёт возможность реализовать апостериорные оценки.

Допустимый фильтр Пугачева минимизирует средний квадрат ошибки $M[(\hat{X}_t - X_t)^2]$ на каждом шаге, в связи с чем он и назван условно-оптимальным. Основной особенностью нелинейного условно оптимального оценивания является его удовлетворение одновременно нескольким критериям оптимальности, поскольку в нём одновременно проводится минимизация невязок для любого момента $t$ из заданного временного интервала.

Создание программных средств, реализующих фильтры Пугачева, представляет собой весьма нетривиальную задачу [9]. Сложность заключается в том, что программное обеспечение должно автоматически по исходным нелинейным стохастическим уравнениям составлять и решать систему уравнений высокого порядка для определения неизвестных параметров распределения переменных состояния и их оценок, а также вычислять коэффициенты фильтра Пугачева. Для этих целей в многокритериальных задачах нелинейной фильтрации фильтры Пугачёва используют парето-оптимальные оценки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Структура основного уравнения фильтра Калмана идентична форме экспоненциальной фильтрации, что характерно для итерационных процедур осреднения [3]. Это указывает на одноуровневый способ фильтрации, адекватный не более, чем линейной системе с динамикой первого порядка. Фильтр построен только на двух статистических характеристиках процесса: математическом ожидании и ковариационной функции, которых достаточно для математического описания динамической системы лишь в линейном случае и при наличии простого гауссовского шума. Не исследованы переходные процессы фильтра Калмана, как динамической системы для оптимизации квантования по времени, обеспечивающего адекватность получаемых оценок, особенно в нелинейных системах. Всё сказанное объясняет, почему модификации фильтра Калмана не могут решить проблемы нелинейной фильтрации.

Условно-оптимальные фильтры Пугачёва используют парето-оптимальные оценки для разрешения проблемы многокритериальности в задачах субоптимальной нелинейной фильтрации. Но, несмотря на относительную простоту для класса алгоритмов нелинейной фильтрации, они сложны для реализации не только из-за своей высокой параметрической размерности, но и сложности оценивания своих параметров.

Модели ДПМ предназначены для фильтрации нестационарного случайного процесса со стационарными приращениями, как основной информационной формы динамической системы в фазовом пространстве. ДПМ, формализуемые по единственной реализации таких процессов, решают задачи идентификации текущего состояния сложной многомерной системы и задачи выделения полезного сигнала на фоне искажающего шума, поступающего от различных физических источников. ДПМ относятся к адаптивным прогнозирующим фильтрам с переменной структурой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каладзе В. А.* Стохастические структуры динамических моделей: формализация динамического ядра / В. А. Каладзе // Системы управления и информационные технологии, Москва-Воронеж, № 4 (38), 2009. – С. 12–15.

2. *Колмогоров А. Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве / А. Н. Колмогоров // ДАН СССР 1940, т. 26, № 1. – С. 115–118.

3. *Каладзе В. А.* Множественность форм экспоненциального фильтра / В. А. Каладзе // Вестник ВГУ, № 2, 2009. С. 24–28.

4. *Калман Р. Е.* Очерки по математической теории систем / Р. Е. Калман, П. Л. Фалб, М. А. Арбиб. – М. : Мир, 1971. – 400 с.

5. *Хеннан Э. Дж.* Многомерные временные ряды / Э. Дж. Хеннан. – М. : Мир, 1974. – 576 с.

6. *Ганцева Е. А.* Систематическое отклонение оператора экспоненциального сглаживания / Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе // Всероссийская конференция «Интеллектуальные информационные системы». – Воронеж : ВГТУ, 2009. – С. 32–34.

7. *Kalman R. E.* On the general theory of control sistem, Proc. lst IFAC Congress, Moscow; Butterworths, London, 1960. – P. 14–21.

8. *Jazwinski A. H.* Stochastic Processes and Filtering Theory / A. H. Jazwinski. – New York: Academic Press. 1970. – P. 63–67.

9. *Синицин И. Н.* Фильтры Калмана и Пугачёва / И. Н. Синицин. – М. : Логос, 2006. – 640 с.

10. *Калман Р. Е.* Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания / Р. Е. Калман ; пер. с англ. Р. Е. Калман, Р. С. Бьюси // Труды Американского общества инженеров-механиков. Теоретическая механика. 1961. Т. 83, № 1. – С. 123–141.

**Каладзе Владимир Александрович** – кандидат технических наук, доцент, Международный институт компьютерных технологий, г. Воронеж. Тел. (4732) 678-238. E-mail: wakaladze@yandex.ru

**Kaladze V. A.** – Candidate of Technic Sciences, International Institute Computer Technologies, Voronezh. Tel. (4732) 678-238. E-mail: wakaladze@yandex.ru