УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ЛИНЕЙНОМ РЕГУЛЯТОРЕ СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ

В. Г. Задорожний* , В. Грекш**

* *Воронежский государственный университет*
** *Университет имени Мартина Лютера*

Поступила в редакцию 09.06.2011 г.

Аннотация. Рассматривается линейная управляемая система со случайно изменяющейся структурой и квадратичным критерием качества управления. Получено необходимое условие оптимальности математического ожидания управления в виде интегрального уравнения Фредгольма в случае, когда нет информации о реализациях случайных изменений.
Ключевые слова: оптимальное управление, случайная структура, уравнение Фредгольма, условия минимума.
Annotation. The linear control system with stochastic structure und quadratic index is considered. The Fredholm equation for optimal mathematical expectation of the control is obtained for case without information about the realization of stochastic structure.
Keywords: optimal control, stochastic structure, Fredholm equation, minimum condition.

1. ВВЕДЕНИЕ

Реальные процессы подвержены влиянию различных внешних факторов, которые, зачастую, трудно учесть, поэтому их удобно моделировать случайными процессами. Оценка роли случайных факторов имеет важнейшее значение и является сложной математической проблемой. Рассмотрим математическую модель в виде обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t,x) + u(t)$, где t – время, f – заданная функция и $u(t)$ – управление. Пусть $\varphi(t)$ – планируемый (желательный) процесс и $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t,\varphi(t))$. Сделаем замену переменной $x = y + \varphi(t)$, тогда $\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = f(t, y+\varphi(t)) + u(t)$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y+\varphi(t)) - f(t,\varphi(t)) + $$
$$+u(t) = F(t,y) + u(t).$$

Здесь $F(t,y) = f(t,y+\varphi(t)) - f(t,\varphi(t))$. Выделяя линейную часть, получаем

$$\frac{dy}{dt} = F(t,0) + \frac{\partial F(t,0)}{\partial y} y + u(t) + o(y).$$

Отбрасывая малые нелинейные члены, получаем линейное дифференциальное уравнение. Управление $u(t)$ связано с расходами, поэтому управление выбирают из условия минимизации расходов. С этой целью удобно выбирать в качестве критерия оптимальности управления квадратичный функционал.

Мы приходим к следующей задаче. Требуется найти такое управление $u(t)$, которое доставляет минимальное значение функционалу

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T [A(s)u^2(s) + B(s)x^2(s)]ds + \frac{c}{2}x^2(T) \quad (1)$$

и при этом должны выполняться условия

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)x + u(t), \quad (2)$$

$x(0) = x_0$.

Здесь $x_0, A(s) > 0, B(s) \geq 0, c \geq 0$ – заданы, T – заданный момент времени.

Если $\varepsilon(t)$ является заданной детерминированной функцией, то эта задача решается, например, с помощью принципа максимума Понтрягина [1]. Однако, в реальных задачах $\varepsilon(t)$ представляет собой случайный процесс. В этом случае управление $u(t)$ будет зависеть от реализаций случайного процесса $\varepsilon(t)$, т.е. также является случайным процессом. При этом критерий качества можно выбрать в виде

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^T [A(s)M^2(u(s)) +$$
$$+B(s)M^2(x(s))]ds + \frac{c}{2}M^2(x(T)), \quad (3)$$

где M обозначает математическое ожидание по функции распределения случайного процесса $\varepsilon(t)$.

Наличие случайного процесса $\varepsilon(t)$, с точки зрения управляемых систем означает, что система случайно меняет свою структуру.

Сначала мы рассмотрим случай, когда $A(s)=1, B(s)=0$ и случайный процесс $\varepsilon(t)$ задан характеристическим функционалом, т. е. [2] известно

$$\varphi_\varepsilon(v) = M(\exp(i\int_0^T \varepsilon(s)v(s)ds) \qquad (4)$$

Обычно считается, что известны реализации случайного процесса, тогда для задачи (1), (2) находится выражение (зависящее от реализации $\varepsilon(t)$) для оптимального управления и формально выписываются его статистические характеристики. Задача усложняется, если нет информации о реализации случайного процесса $\varepsilon(t)$.

Мы показываем, что в этом случае можно рассмотреть задачу (3), (2), считая искомым математическое ожидание $M(u(t))$, и получаем уравнения для нахождения $M(u(t))$. Если известны реализации для $\varepsilon(t)$, то можно вычислить значение I_1 для решения задачи (1), (2), обозначим его I_{1T}. Как соотносятся значения I_1 и I_{1T}? По-видимому $I_{1T} \le I_1$ (поскольку мы находим оптимальное управление для каждой реализации $\varepsilon(t)$). Расчеты для конкретных примеров показывают, что значения I_1 и I_{1T} имеют одинаковый порядок.

2. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДОСТУПНОЙ ИНФОРМАЦИИ О РЕАЛИЗАЦИЯХ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА $\varepsilon(t)$

Пусть мы имеем информацию о реализациях случайного процесса $\varepsilon(t)$. Будем считать, что $\varepsilon(t)$ – это некоторая реализация случайного процесса. Используя принцип максимума Понтрягина [1], будем решать задачу (1), (2).

Выписываем функцию Гамильтона–Понтрягина и необходимые условия принципа максимума

$$H = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda\varepsilon(t) + \lambda u(t),$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda\varepsilon(t), \qquad (5)$$

$$\lambda(T) = cx(T), \qquad (6)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + \lambda .$$

Тогда $u(t) = -\lambda$. Решая задачу (5), (6), получаем

$$\lambda = cx(T)\exp(\int_t^T \varepsilon(s)ds). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (2) и решая полученную задачу, находим

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp\left(\int_0^T \varepsilon(s)ds\right) - \\ &-cx(T)\int_0^t \exp\left(\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau + \int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau\right)ds. \end{aligned} \qquad (8)$$

В этом выражении, пока, не известно $x(T)$. Заменяя в (8) t на T, получаем уравнение для нахождения $x(T)$ и находим

$$x(T) = \frac{x_0\exp(\int_0^T \varepsilon(s)ds)}{1 + c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds}.$$

Теперь находим оптимальное управление и оптимальное $x(t)$

$$u(t) = -\frac{cx_0\exp(\int_0^T \varepsilon(s)ds + \int_t^T \varepsilon(s)ds)}{1 + c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds},$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp\left(\int_0^t \varepsilon(s)ds\right) - \\ &- \frac{cx_0\exp(\int_0^T \varepsilon(s)ds)}{1 + c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds} \times \\ &\times \int_0^t \exp(\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau + \int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds. \end{aligned}$$

Выпишем и соответствующее значение критерия качества

$$I(x,u) = \frac{1}{2}\frac{c^2x_0^2\exp(2\int_0^T \varepsilon(s)ds)}{(1 + c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds)^2} \times$$

$$\times\int_0^T \exp\left(2\int_t^T \varepsilon(s)ds\right)dt +$$

$$+\frac{c}{2}\frac{x_0^2\exp(2\int_0^T \varepsilon(s)ds)}{(1+c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds)^2} =$$

$$=\frac{cx_0^2\exp(2\int_0^T \varepsilon(s)ds)}{2(1+c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds)}.$$

Интерес представляют средние значения оптимального управления и оптимальной траектории. Будем считать, что x_0 является случайной величиной не зависящей от $\varepsilon(t)$, тогда

$$M(u(t)) = -cM(x_0)\times$$

$$\times M\left(\frac{\exp(\int_0^T \varepsilon(s)ds+\int_t^T \varepsilon(s)ds)}{1+c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds}\right),$$

$$M(x(t)) = M(x_0)M(\exp\left(\int_0^t \varepsilon(s)ds)\right)-$$

$$-cM(x_0)M\left(\frac{\exp\left(\int_0^T \varepsilon(s)ds\right)}{1+c\int_0^T \exp\left(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau\right)ds}\times \tag{9}$$

$$\times\int_0^t \exp\left(\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau+\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau ds)\right),$$

$$M(I) = \frac{cM(x_0^2)}{2}\times$$

$$\times M\left(\frac{\exp(2\int_0^T \varepsilon(s)ds)}{1+c\int_0^T \exp(2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau)ds}\right)$$

Отметим, что полученные результаты могут быть реализованы при условии, что при определении управления $u(t)$ известна реализация $\varepsilon(t)$.

3. ЗАДАЧА ПРИ ОТСУТСТВИИ ИНФОРМАЦИИ О РЕАЛИЗАЦИИ $\varepsilon(t)$

Наиболее интересной является задача, когда при выборе управления $u(t)$ нет информации о реализации $\varepsilon(t)$. В этом случае будем выбирать управление случайным образом (независимо от $\varepsilon(t)$ и x_0), но будем искать математическое ожидание $M(u(t))$, при котором критерий качества I_1 принимает минимальное значение.

Выпишем решение задачи (2) для реализации $\varepsilon(t)$

$$x(t) = x_0\exp\left(\int_0^t \varepsilon(s)ds\right)+$$

$$+\int_0^t \exp\left(\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau\right)u(s)ds.$$

Введем в рассмотрение функцию $\chi(s,t,\tau) = sign(\tau - s)$, если число τ принадлежит отрезку с концами s и t, и $\chi(s,t,\tau) = 0$ в противном случае.

Так как $u(t)$ не зависит от x_0 и $\varepsilon(t)$, то

$$M(x(t)) = M(x_0)M\left(\exp\left(\int_0^t \varepsilon(s)ds\right)\right)+$$

$$+\int_0^t M\left(\exp\left(\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau\right)\right)M(u(s))ds.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $M(x(t))$ записывается в виде

$$M(x(t)) = M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t,\cdot))+$$
$$+\int_0^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t,\cdot))M(u(s))ds. \tag{10}$$

Выпишем функционал I_1

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^T (Mu(s))^2ds+$$

$$+\frac{c}{2}(M(x_0)^2\varphi_\varepsilon^2(-i\chi(0,T,\cdot)+$$

$$+2M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot)\times$$

$$\times\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot)M(u(s))ds+$$

$$+(\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot)M(u(s))ds)^2).$$

В точке минимума функционала вариационная производная [2] обращается в ноль, т.е.

$$\frac{\delta I(M(u))}{\delta M(u(t))} = M(u(t))+\frac{c}{2}(2M(x_0)\times$$

$$\times\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))+$$

$$+2\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))M(u(s))ds\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) = 0.$$

Тогда

$$M(u(t)) = -c(M(x_0)\times \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\times \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) - -c\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))\times \times\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))M(u(s))ds.$$

Мы получили линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] относительно неизвестного $M(u(t))$. Будем искать решение в виде $M(u(t)) = y\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))$, где y – неизвестное число. Тогда

$$y\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) = = -c(M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\times \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) - -yc\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))\times \times\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))ds.$$

Из этого уравнения находим

$$y = \frac{-cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))}{1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(s,T,\cdot))ds}.$$

Следовательно, можно выписать значения искомых величин

$$M(u(t)) = = \frac{-cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))}{1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(s,T,\cdot))ds}, \quad (11)$$

$$M(x(t)) = M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t,\cdot)) - -\frac{cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))}{1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(\tau,T,\cdot))d\tau}\times \times\int_0^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))\times \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t,\cdot))ds,$$

$$M(x(T)) = = \frac{M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))}{1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(\tau,T,\cdot))d\tau},$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\times \times\int_0^T \frac{M^2(x_0)c^2\varphi_\varepsilon^2(-i\chi(0,T,\cdot))\varphi_\varepsilon^2(-i\chi(s,T,\cdot))}{(1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(\tau,T,\cdot))d\tau)^2}ds + + \frac{cM^2(x_0)\varphi_\varepsilon^2(-i\chi(0,T,\cdot))}{2(1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(\tau,T,\cdot))d\tau)^2} = = \frac{cM^2(x_0)\varphi_\varepsilon^2(-i\chi(0,T,\cdot))}{2(1 + c\int_0^T \varphi_\varepsilon^2(-i\chi(\tau,T,\cdot))d\tau)}. \quad (12)$$

Возникает естественный вопрос. Как соотносятся значения критериев качества (9) и (12)?

Рассмотрим пример.

Пусть

$$\varphi_\varepsilon(v) = \exp(i\int_0^T v(s)ds)p + q,$$

$$p \ge 0, q \ge 0, p + q = 1.$$

При этом, согласно (11),

$$M(u(t)) = = -\frac{2cM(x_0)(\exp(T)p + q)(\exp(T-t)p + q)}{2 + c[p^2(\exp(2T) - 1) + 4pq(\exp(T) - 1) + 2q^2T]}.$$

Далее

$$M(x(t)) = M(x_0)(e^t p + q) - -\frac{cM(x_0)(e^T p + q)\int_0^t (e^{T-s}p + q)(e^{t-s}p + q)ds}{1 + c\int_0^T (e^{T-s}p + q)^2 ds} = = M(x_0)(e^t p + q) - -\frac{cM(x_0)(e^T p + q)[p^2e^T(e^t - e^{-t}) + +2pq(e^t - 1) + 2pqe^T(1 - e^{-t}) + q^2t]}{2 + c[(e^{2T} - 1)p^2 + 4pq(e^T - 1) + 2q^2T]}.$$

$$M(x(T)) = \frac{2M(x_0)(e^T p + q)}{2 + c[p^2(e^{2T} - 1) + 4pq(e^T - 1) + 2q^2T]}.$$

$$I_1 = \frac{M^2(x_0)c(e^T p + q)^2}{2 + c[(e^{2T} - 1)^2p^2 + 4pq(e^T - 1) + 2q^2T]}.$$

Вычислим значение I_1 при условии, что мы знаем значения реализаций $\varepsilon(t)$ и вычисляем оптимальное управление для реализации по критерию I. Такое значение будем обозначать I_{1T}.

Считаем $\varepsilon = 1$ с вероятностью равной p и $\varepsilon = 0$ с вероятностью q. ($p + q = 1$). При этом

$$M(u(t)) = -cM(x_0)[\frac{e^{2T-t}p}{1+\frac{c}{2}(e^{2T}-1)} + \frac{q}{1+cT}].$$

$$M(x(T)) = M(x_0)M\left(e^{\int_0^T \varepsilon(s)ds}\right) -$$

$$-cM\left[\frac{x_0 e^{\int_0^T \varepsilon(s)ds}}{1+c\int_0^T e^{2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau}ds}\int_0^T e^{2\int_s^T \varepsilon(\tau)d\tau}ds\right] =$$

$$= M(x_0)[e^T p + q - c \times$$

$$\times\left(\frac{e^T(e^{2T}-1)p}{2(1+\frac{c}{2}(e^{2T}-1))} + \frac{Tq}{1+cT}\right)\Bigg] =$$

$$= M(x_0)\frac{2[e^T p + q + cTe^T p] + c(e^{2T}-1)q}{(2+c(e^{2T}-1))(1+cT)}.$$

$$I_{1T} = \frac{1}{2}\int_0^T c^2 M^2(x_0)[\frac{2e^{2T-t}p}{2+c(e^{2T}-1)} +$$

$$+\frac{q}{1+cT}]^2 dt + \frac{c}{2}M^2(x_0)\times$$

$$\times\frac{[2[e^T p + q + cTe^T p] + c(e^{2T}-1)q]^2}{(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} =$$

$$= \frac{c^2 M^2(x_0)}{2(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2}\times$$

$$\times[2p^2(1+cT)^2 e^{2T}(e^{2T}-1) +$$

$$+4p(1+cT)q(2+c(e^{2T}-1))e^T(e^T-1) +$$

$$+q^2(2+c(e^{2T}-1))^2 T] + \frac{c}{2}M^2(x_0)\times$$

$$\times\frac{[2[e^T p + q + cTe^T p] + c(e^{2T}-1)q]^2}{(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2}.$$

Рассмотрим частный случай $p = 0, q = 1$, тогда

$$I_1 = \frac{M^2(x_0)c}{2(1+cT)},$$

$$I_{1T} = \frac{c^2 M^2(x_0)((2+c(e^{2T}-1))^2)T}{2(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} +$$

$$+\frac{cM^2(x_0)(2+c(e^{2T}-1))^2}{2(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} =$$

$$= \frac{c^2 M^2(x_0)T}{2(1+cT)^2} + \frac{cM^2(x_0)}{2(1+cT)^2} = \frac{cM^2(x_0)}{2(1+cT)}.$$

Значения I_1 и I_{1T} совпадают.

Пусть $p = 1, q = 0$, тогда

$$I_1 = \frac{cM^2(x_0)e^{2T}}{2+c(e^{2T}-1)},$$

$$I_{1T} = \frac{2c^2 M^2(x_0)(1+cT)^2 e^{2T}(e^{2T}-1)}{2(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} +$$

$$+\frac{cM^2(x_0)4e^{2T}(1+cT)^2}{2(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} =$$

$$= M^2(x_0)\left(\frac{c^2 e^{2T}(e^{2T}-1)}{(2+c(e^{2T}-1))^2} +\right.$$

$$\left.+\frac{2ce^{2T}}{(2+c(e^{2T}-1))^2}\right) =$$

$$= M^2(x_0)\frac{e^{2T}c}{2+c(e^{2T}-1)}.$$

Значения I_1 и I_{1T} опять совпадают.

Можно ожидать, что наибольшая разница между ними будет при $p = q = 0,5$. Для этих значений находим

$$I_1 = \frac{M^2(x_0)c(e^T+1)^2}{4(2+\frac{c}{4}[(e^{2T}-1)+4(e^T-1)+2T])} =$$

$$= \frac{M^2(x_0)c(e^T+1)^2}{8+c[(e^{2T}-1)+4(e^T-1)+2T]}.$$

$$I_{1T} = \frac{c^2 M^2(x_0)[2(1+cT)^2 e^{2T}(e^{2T}-1)}{8(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} +$$

$$+\frac{4(1+cT)(2+c(e^{2T}-1))e^T(e^T-1)}{8(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2} +$$

$$+\frac{(2+c(e^{2T}-1))^2]}{8(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2}$$

$$+\frac{cM^2(x_0)[2(e^T+1+cTe^T)+c(e^{2T}-1)]^2}{8(2+c(e^{2T}-1))^2(1+cT)^2}.$$

Нетрудно видеть, что $I_1 \to M^2(x_0)$ при $T \to +\infty$, а $I_{1T} \to 0,25M^2(x_0)$.

Таким образом, если управление выбирать оптимальным для каждой реализации случайного процесса $\varepsilon(t)$, то критерий качества I_{1T} при больших значениях T будет примерно в четыре раза меньше I_1, но во втором случае мы не используем информацию о реализациях случайного процесса $\varepsilon(t)$ и управление выбираем независимо от реализаций $\varepsilon(t)$, определяя лишь его математическое ожидание (11).

4. УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ $M(u(t))$ ДЛЯ БОЛЕЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ

Если в функционале (1) B не является нулем, то задача усложняется даже в детерминированном случае.

Рассмотрим задачу 1: Пусть в уравнении (2) случайный процесс задан характеристическим функционалом и $u(t)$ – независимый с $\varepsilon(t)$ случайный процесс. Требуется найти $M(u(t))$, при котором функционал (3) принимает наименьшее значение.

Теорема. *Решение задачи 1* $M(u(t))$ *является решением интегрального уравнения Фредгольма*

$$\begin{gathered}A(t)M(u(t)) =\\ = -\int_t^T B(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(0,s,\cdot)\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))ds -\\ -\int_0^T d\tau\int_\tau^T B(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s,\cdot))\times\\ \times\left.\begin{cases}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s,\cdot)) \text{ при } 0\le t\le s\\ 0 \text{ при } s\le t\le T\end{cases}\right\} dsM(u(\tau)) -\\ -cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) -\\ -c\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))M(u(s))ds.\end{gathered} \tag{13}$$

Доказательство. Подставим выражение (10) в критерий качества (3)

$$\begin{gathered}I_1 = \frac{1}{2}\int_0^T [A(s)M^2(u(s)) +\\ +B(s)M^2(x_0)\varphi_\varepsilon^2(-i\chi(0,s,\cdot)) +\\ +2B(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,s,\cdot))\times\\ \times\int_0^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s,\cdot))M(u(\tau))d\tau +\\ +B(s)(\int_0^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s,\cdot))M(u(\tau))d\tau)^2]ds +\\ +\frac{c}{2}(M^2(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot)) +\\ +2M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\times\\ \times\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))M(u(s))ds +\\ +(\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))\times\\ \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))M(u(s))ds)^2).\end{gathered}$$

Вычислим вариационную производную функционала I_1

$$\begin{gathered}\frac{\delta I_1(M(u))}{\delta M(u(t))} = A(t)M(u(t)) +\\ +\int_0^T B(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,s,\cdot))\times\\ \times\left.\begin{cases}\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s,\cdot)) \text{ при } 0\le t\le s\\ 0 \text{ при } s< t\le T\end{cases}\right\} ds +\\ \int_0^T B(s)\int_0^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s,\cdot))M(u(\tau))d\tau\times\\ \times\left.\begin{cases}\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s,\cdot)) \text{ при } 0\le t\le s\\ 0 \text{ при } s< t\le T\end{cases}\right\} ds +\\ +cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) +\\ +c\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))\times\\ \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))M(u(s))ds.\end{gathered}$$

В точке минимума вариационная производная равна нулю. Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, получаем

$$\begin{gathered}A(t)M(u(t)) + \int_t^T B(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon\times\\ \times(-i\chi(0,s,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s,\cdot))ds +\\ +\int_0^T d\tau\int_\tau^T B(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s,\cdot))M(u(\tau))\times\\ \times\left.\begin{cases}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s,\cdot)) \text{ при } 0\le t\le s\\ 0 \text{ при } s< t\le T\end{cases}\right\} ds +\\ +cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,T,\cdot))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot)) +\\ +c\int_0^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T,\cdot))\times\\ \times\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T,\cdot))M(u(s))ds = 0.\end{gathered}$$

Отсюда получаем (13). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 384 с.

2. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. – М. – Ижевск : РХД, 2006. – 316 с.

3. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, – 1968. – 496 с.

Задорожний Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний Воронежского государственного университета. Тел. 8 (4732) 208-649 (раб.) 8 (4732) 741-485 (дом.) E-mail: zador@amm.vsu.ru

Грекш Вилфрид – Doctor, Professor Faculty of Natural Sciences III Institute of Mathematics. Martin-Luther Universitet Halle-Wittenberg. Tel. +49 (345) 55-24670. E-mail: wilfried.grecksch@mathematik.uni-halle.33

Задорожний Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний Воронежского государственного университета. Тел. 8 (4732) 208-649 (раб.) 8 (4732) 741-485 (дом.) E-mail: zador@amm.vsu.ru

Грекш Вилфрид – Doctor, Professor Faculty of Natural Sciences III Institute of Mathematics. Martin-Luther Universitet Halle-Wittenberg. Tel. +49 (345) 55-24670. E-mail: wilfried.grecksch@mathematik.uni-halle.33