УДК 512.563.6

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕПИСЫВАНИЯ НА ОСНОВЕ LP-СТРУКТУР

Д. В. Баранов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 17.11.2010 г.

Аннотация. Теория систем переписывания представляет эффективный аппарат для решения ряда важных задач искусственного интеллекта и компьютерной алгебры. В статье вводится алгебраическая система с семантикой совокупности правил условной эквациональной теории или условной системы переписывания термов. Для данной модели рассматриваются следующие основные вопросы: замкнутость, эквивалентные преобразования, структура замыкания, логическая редукция. Полученные результаты могут быть применены для исследования и автоматической оптимизации соответствующего множества правил.
Ключевые слова: термы, эквациональная теория, условные правила, алгебраическая модель, логическая редукция.
Abstract. The theory of rewrite systems is an effective tool for solving a number of important problems of artificial intelligence and computer algebra. This paper introduces an algebraic system with the semantics of a set of rules of conditional equational theory, or a conditional term rewriting system. For the given model such issues as closure, equivalent transformations, the structure of closure, and logical reduction are addressed. The obtained results can be applied to analysis and automatic optimization of the corresponding set of rules.
Keywords: terms, equational theory, conditional rules, algebraic model, logical reduction.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы переписывания термов (СПТ) находят применения при решении таких известных задач как автоматическое доказательство теорем [1], символьное упрощение алгебраических выражений [2], верификация компьютерных программ [3] и ряда других.

Важными вопросами, связанными с СПТ, являются эквивалентные преобразования и упрощение их множеств правил. В то время как для обычных СПТ подобные задачи решались в ряде работ (например, [4]), для условных СПТ они еще остаются открытыми. Данное обстоятельство объясняется более сложной структурой правил условных СПТ. Для обычных систем задача минимизации множества правил сводится к транзитивной редукции некоторого бинарного отношения («элиминация транзитивности»). Для условных систем можно говорить о более сложной задаче нахождения логической редукции.

При определении системы переписывания отправной точкой является эквациональная теория, множество правил которой состоит из равенств термов. Правила СПТ получаются путем «ориентации» равенств и, возможно, пополнения для достижения свойства конфлюэнтности [5]. Аналогичный подход используется и для условных СПТ [6]. Поскольку обычно именно эквациональная теория дает критерий эквивалентности систем переписывания, исследование в этом плане условных СПТ может быть начато с рассмотрения эквивалентности самих условных эквациональных теорий.

В статье [7] представлена методология исследования условных СПТ на основе «решеточных» продукционно-логических структур (LP-структур). Полученные результаты, в частности, впервые решают задачу построения логической редукции условной эквациональной теории. Однако рассмотренная в [7] алгебраическая модель оперирует равенствами как атомами, не учитывая некоторых их транзитивных свойств. Данное обстоятельство приводит в общем случае к незавершенной минимизации множества условных правил при построении его логической редукции. В настоящей работе вводится и исследуется более сложная LP-структура, в результате чего отмеченный недостаток устраняется. Некоторые из полученных здесь результатов были анонсированы в [8] без доказательств.

Исходная эквациональная теория состоит из условных соотношений вида $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n : u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m$ («если имеют место равенства термов $s_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, то выполнены и все □»). Будем называть такие соотношения (условными) эквациональными правилами, или просто правилами там, где это не будет вызывать недоразумений. Равенства между термами интерпретируются обычным для эквациональных теорий способом: $s = t$, если данное равенство можно получить из имеющегося набора равенств с помощью рассматриваемой эквациональной дедукции. Соответствующие ей аксиомы и правила вывода определяются в п. 2. Они естественным образом расширяют набор аксиом и правил вывода, описанный в [5] для условных равенств вида $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$

В предлагаемой алгебраической модели условные эквациональные правила реализуются бинарным отношением R на решетке, порожденной множествами равенств $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} a_i \xrightarrow{R} \bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} b_i$ Отношение R связывает не отдельные термы (как в обычной эквациональной логике), а наборы равенств между термами: каждому правилу $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n : u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m$ соответствует пара $(a, b) \in R$, где $a = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ и $b^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$ Такая модель содержит логику продукционного вывода.

Кроме разработки самой модели, основные результаты статьи (сформулированы в п. 3) состоят в следующем. Доказано утверждение о существовании логического замыкания (теорема 3.1) бинарного отношения, что в приложении приводит к понятию эквивалентных эквациональных теорий. Доказана возможность локально-эквивалентных преобразований исходного отношения (теорема 3.2), соответственно и преобразования множества правил. Исследована структура логического замыкания (теорема 3.3), что позволяет при его построении использовать эффективные алгоритмы. Исследованы вопросы существования и построения логической редукции бинарного отношения (теорема 3.4). Это исследование дает теоретическую основу для минимизации условной эквациональной теории. Под минимизацией подразумевается получение такой эквивалентной системы, из которой невозможно удалить ни одного правила без нарушения эквивалентности.

В п. 4 подводятся итоги исследования и указываются некоторые его перспективы. Доказательства сформулированных теорем приведены в п. 5.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Решеткой называется частично упорядоченное множество $\mathbb{F}$, в котором наряду с отношением $\leq$ («не больше», «содержится») введены также две двуместные операции $\wedge$ («пересечение») и $\vee$ («объединение»), вычисляющие соответственно точную нижнюю и верхнюю грани для любых $a, b \in \mathbb{F}$.

Как известно, множество всех конечных подмножеств $\lambda(U)$ некоторого универсума U образует решетку. В настоящей статье рассматривается именно такой вид решеток. Чтобы подчеркнуть данное обстоятельство, вместо символов $\leq$, $\geq$, $\wedge$ и $\vee$ будем использовать знаки теоретико-множественных операций $\subseteq$, $\supseteq$, $\bigcap$ и $\bigcup$. Однако термин «решетка» сохраняется, поскольку в дальнейшем результаты могут быть распространены и на другие виды решеток.

Приведем некоторые базовые определения, связанные с термами [5].

Пусть Σ – алфавит, образованный объединением следующих непересекающихся множеств: V – множество переменных; Σ_n, $n = 0, 1, \ldots$ – множества n-арных функций (функциональных символов); 0-арные функции называются также константами.

Множество термов $T(\Sigma)$ определяется рекурсивно:

- $V \subset T(\Sigma)$;
- $\Sigma_0 \subset T(\Sigma)$;
- если $f \in \Sigma_n$ и $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in \in T(\Sigma)$.

Отображение $\sigma : V \to T(\Sigma)$ называется подстановкой. Это понятие распространяется на все $t \in T(\Sigma)$ следующим образом:

- если $t = x \in V$, то $\sigma(t) = \sigma(x)$;
- если $t = f \in \Sigma_0$, то $\sigma(t) = f$;
- если $f \in \Sigma_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$ и $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, то $\sigma(t) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Эквациональной теорией называется пара (Σ, E), где

- Σ – алфавит, состоящий из счетного множества переменных и непустого множества функциональных символов (сигнатура);
- $E \subseteq T(\Sigma) \times T(\Sigma)$ – множество равенств вида $s = t$ $(s, t \in T(\Sigma))$.

Определяется понятие выводимости равенства $s = t$ из E $\left((\Sigma, E) \vdash s = t\right)$ на основе следующих правил:

1) если $s = t \in E$, то $(\Sigma, E) \vdash s = t$;

2) если $(\Sigma, E) \vdash s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$, то $(\Sigma, E) \vdash$ $\vdash f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ для любого $f \in \Sigma_n$;

3) если $(\Sigma, E) \vdash s = t$, то $(\Sigma, E) \vdash \sigma(s) = \sigma(t)$ для любой подстановки σ;

4) $(\Sigma, E) \vdash t = t$;

5) если $(\Sigma, E) \vdash t_1 = t_2, t_2 = t_3$, то $(\Sigma, E) \vdash$ $\vdash t_1 = t_3$;

6) если $(\Sigma, E) \vdash s = t$, то $(\Sigma, E) \vdash t = s$.

Для данного множества равенств E рассмотрим решетку конечных подмножеств $\lambda(E)$. В ней заданы отношения $\subseteq$, $\supseteq$, а также «решеточные» операции $\bigcap$ и $\bigcup$ – теоретико-множественные пересечение и объединение. Кроме них потребуются еще три группы операций, связанных соответственно с функциями, подстановками и транзитивностью равенств термов:

1) если $a = \{s_i = t_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ и $f \in \Sigma_n$, то $f(a) = \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}$;

2) если $a = \{s_j = t_j \mid j = 1, \ldots, m\}$, то $\sigma(a) =$ $\{\sigma(s_j) = \sigma(t_j) \mid j = 1, \ldots, m\}$ для подстановки σ;

3) если $a = \{t_1 = t_2, t_2 = t_3\}$, $b = \{t_1 = t_3\}$, то $b = \mathrm{Tr}(a)$.

Определение 2.1. Пусть задана эквациональная теория (Σ, E). Эквациональной решеткой $\mathbb{F}$ будем называть решетку, полученную пополнением $\lambda(E)$ относительно определенных выше дополнительных операций 1)–3).

Как уже подчеркивалось в п. 1, рассматривается условная эквациональная теория, содержащая условные правила вида $s_1 = t_1, \ldots, s_n =$ $= t_n : u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m$. Таким образом, предпосылка и заключение правила являются элементами $\mathbb{F}$.

Используя в качестве основы аксиомы и правила, определенные в [5], сформулируем их аналоги для условной эквациональной дедукции. Аксиомы порождаются перечисленными выше правилами вывода равенств. Правило вывода 2) означает наличие условного правила (аксиомы) $a : f(a)$ для любых $a = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ и $f \in \Sigma_n$; из 3) следует аксиома $a : f(a)$ для любых $a \in \mathbb{F}$ и подстановки σ. Правило 5) порождает аксиому $a : \mathrm{Tr}(a)$ для каждого подходящего $a \in \mathbb{F}$. Такие условные правила в рассматриваемой логике можно также назвать тавтологиями. Еще одной очевидной тавтологией является правило $a : b$, $a, b \in \mathbb{F}$ при $a \supseteq b$.

Правила вывода в условной эквациональной логике таковы:

1) $a : b \vdash \sigma(a) : \sigma(b)$ $(a, b \in \mathbb{F})$ для любой подстановки σ (см. аналогичное правило в [5] с исходными обозначениями);

2) $a : b,\ a : c \vdash a : b \bigcup c$ $(a, b, c) \in \mathbb{F}$ (возможность вывода по частям);

3) $a : b,\ b : c \vdash a : c$ $(a, b, c) \in \mathbb{F}$ (транзитивность).

3. LP-СТРУКТУРА ДЛЯ УСЛОВНОЙ ЭКВАЦИОНАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Согласно [7], LP-структурой (Lattice Production Structure) называется решетка с дополнительно заданным на ней бинарным отношением, которое обладает рядом продукционно-логических свойств. В этом разделе рассматриваются бинарные отношения на эквациональной решетке. Вводится понятие логического отношения, которое соответствует множеству правил условной эквациональной теории. Свойства такого отношения должны отражать сформулированные в п. 2 аксиомы и правила условной эквациональной дедукции.

Во-первых, логическое отношение R должно содержать все тавтологии. Введем для них общее обозначение: $a \succcurlyeq b$, если $a \supseteq b$, $b = \sigma(a)$, $b = f(a)$ или $b = \mathrm{Tr}(a)$. Таким образом, для логического отношения R справедливо $\succcurlyeq \subseteq R$. Другие свойства логического отношения вытекают из правил дедукции.

Определение 3.1. Отношение R назовем применимым, если для любой подстановки σ из $(a, b) \in R$ следует $(\sigma(a), \sigma(b)) \in R$.

Определение 3.2. Отношение R назовем $\cup$-дистрибутивным, если для любых $(a, b_1), (a, b_2) \in R$ выполнено $(a, b_1 \cup b_2) \in R$.

Следующее определение суммирует рассмотренные свойства.

Определение 3.3. Бинарное отношение на эквациональной решетке называется логическим, если оно содержит тавтологии, а также является применимым, $\cup$-дистрибутивным и транзитивным. Логическим замыканием произвольного отношения R называется наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Два отношения R_1 и R_2, определенные на общей эквациональной решетке, называются эквивалентными, если их логические замыкания совпадают. Этот факт будем обозначать $R_1 \sim R_2$. Логической редукцией данного отношения R называется минимальное эквивалентное ему отношение R_0.

Из определения не следует существования логического замыкания или редукции для произвольного бинарного отношения. Эти вопросы рассматриваются ниже.

Определение 3.4. Пусть задано некоторое отношение R на эквациональной решетке $\mathbb{F}$. Будем говорить, что упорядоченная пара $a, b \in \mathbb{F}$ логически связана отношением R (обозначим этот факт $a \xrightarrow{R} b$), если выполнено одно из следующих условий:

1) $(a, b) \in R$;

2) $a \succcurlyeq b$:

2.1) $a \supseteq b$ или

2.2) $b = \sigma(a)$ или

2.3) $b = f(a)$ или

2.4) $b = \mathrm{Tr}(a)$;

3) существуют такие $a_1, b_1 \in \mathbb{F}$ и подстановка σ, что $a = \sigma(a_1)$, $b = \sigma(b_1)$, причем $a_1 \xrightarrow{R} b_1$;

4) существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \cup b_2 = b$, причем $a \xrightarrow{R} b_1$, $a \xrightarrow{R} b_2$;

5) существует элемент $c \in \mathbb{F}$ такой, что $a \xrightarrow{R} c$ и $c \xrightarrow{R} b$.

Теорема 3.1. Для произвольного отношения R на эквациональной решетке логическое замыкание существует и совпадает с множеством $\xrightarrow{R}$ всех упорядоченных пар, логически связанных отношением R.

Следствие 3.1. Пусть R – бинарное отношение на эквациональной решетке и $a_t \xrightarrow{R} b_t$, $\forall t \in T$ (T конечно). Тогда отношение $R' = R \cup \{(a_t, b_t) \mid t \in T\}$ эквивалентно R.

Пусть дано произвольное бинарное отношение R на эквациональной решетке. Его эквивалентным преобразованием называется такая замена всего множества пар R или его части, что полученное в результате новое отношение P логически эквивалентно R, то есть $P \sim R$.

Теорема 3.2. Пусть R_1, R_2, R_3, R_4 – отношения на общей эквациональной решетке. Если при этом $R_1 \sim R_2$ и $R_3 \sim R_4$, то $R_1 \cup R_3 \sim R_2 \cup R_4$.

Следствие 3.2. Пусть R_1, R_2, R – отношения на общей эквациональной решетке. Если при этом $R_1 \sim R_2$, то $R_1 \cup R \sim R_2 \cup R$.

Следствия 3.1 и 3.2 обосновывают принцип локальности эквивалентных преобразований логических отношений: если часть данного отношения заменить эквивалентной частью, то и в целом новое отношение будет эквивалентным исходному. Эти результаты открывают возможности автоматических преобразований условных эквациональных теорий.

Далее выясним вопрос о возможности в процессе построения логического замыкания выделить этап, соответствующий транзитивному замыканию. Положительный ответ позволит свести изучение некоторых важных вопросов, касающихся логических отношений, к соответствующим проблемам транзитивных отношений. В частности, построение логического замыкания или редукции можно будет осуществлять с помощью быстрых алгоритмов (типа Уоршолла [9]).

Для произвольного отношения R на эквациональной решетке рассмотрим отношение $\tilde{R}$, построенное последовательным выполнением следующих шагов:

1) добавить к R все пары (a, b), для которых $b = \sigma(a)$, $b = f(a)$ либо $b = \mathrm{Tr}(a)$, и обозначить новое отношение R_1;

2) добавить к R_1 всевозможные пары вида $(\sigma(a), \sigma(b))$, для которых $(a, b) \in R_1$, и обозначить новое отношение R_2;

3) добавить к R_2 всевозможные пары вида

$$(a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_m,\ b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_m),$$

где $(a_i, b_i) \in R_2$, и обозначить новое отношение R_3;

4) объединить R_3 с отношением $\supset$.

Заметим, что шаги 1) и 4) относятся ко всем теоретически возможным элементам эквациональной решетки $\mathbb{F}$ и соответственно не зависят от данного R.

В силу бесконечности множества $\mathbb{F}$ описанный процесс построения отношения $\tilde{R}$ носит теоретический характер. В приложениях вместо $\mathbb{F}$ можно взять конечное подмножество эквациональной решетки, построенное при ограничении уровня вложенности термов.

Теорема 3.3. Логическое замыкание отношения R на эквациональной решетке совпадает с транзитивным замыканием $\tilde{R}^*$ соответствующего отношения $\tilde{R}$.

Выясним далее вопрос о существовании и способе построения логической редукции бинарных отношений. Для отношения R на эквациональной решетке рассмотрим отношение $\underset{\sim}{R}$, построенное по данному R последовательным выполнением шагов, обратных построению $\tilde{R}$, а именно:

1) исключить из R все пары (a, b), для которых $a \supset b$, и обозначить новое отношение R_{-1}.

2) исключить из R_{-1} все пары (a,b) вида

$$(a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_m,\, b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_m),$$

где $(a_i,b_i) \in R_{-1}$, причем (a,b) не совпадает ни с одной парой (a_i,b_i), и обозначить новое отношение R_{-2};

3) исключить из R_{-2} всевозможные пары вида $(\sigma(a),\sigma(b))$, для которых $(a,b) \in R_{-2}$, причем (a,b) не совпадает с парой $(\sigma(a),\sigma(b))$, и обозначить новое отношение R_{-3};

4) исключить из R_{-3} все пары (a,b), для которых $b = \sigma(a)$, $b = f(a)$, либо $b = \mathrm{Tr}(a)$.

Вновь подчеркнем, что выполнение шагов 1), 4) связано с «универсальными» тавтологиями, и поэтому алгоритмы их выполнения существенно не зависят от исходного отношения R.

Следующая теорема указывает достаточное условие существования и способ построения логической редукции бинарного отношения.

Теорема 3.4. Пусть для отношения R на эквациональной решетке $\mathbb{F}$ построено соответствующее отношение $\tilde{R}$. Тогда, если для $\tilde{R}$ существует транзитивная редукция R^0, то соответствующее ей отношение $\underset{\sim}{R}^0$ представляет собой логическую редукцию исходного отношения R.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена основанная на решетках алгебраическая модель условной эквациональной теории и проведено теоретическое исследование этой модели. Полученные результаты обосновывают локально-эквивалентные преобразования множества условных правил, а также его оптимизацию путем получения эквивалентной системы с минимальным набором правил. Указанные результаты могут найти применение при решении ряда важных задач искусственного интеллекта и компьютерной алгебры.

В дальнейшем можно рассмотреть более общую модель LP-структуры, если в качестве ее основы вместо $\lambda(E)$ использовать решетку Линденбаума-Тарского [10]. Тогда моделируемые условные правила смогут в качестве предпосылок и заключений содержать формулы пропозиционального исчисления. При этом общая методология исследования останется прежней.

Интересным представляется переход от равенств термов к модели ориентированных правил и выяснение вопроса о том, как логически эквивалентные преобразования множества правил влияют на основные свойства исходной условной СПТ (нетеровость, конфлюэнтность [5–6]). Можно предположить, что в силу эквивалентности преобразований основные свойства СПТ сохраняются, однако этот вопрос нуждается в формальных исследованиях.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Напомним, что определение 3.4 по данному R задает новое бинарное отношение $\xrightarrow{R}$ на решетке $\mathbb{F}$. Условия 1)–5) определения 3.4 будем также называть правилами вывода в рассматриваемой алгебраической модели. При выводе некоторой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ шагом вывода будем называть применение ровно одного правила, возможно, одновременно к некоторому конечному множеству элементов решетки. Например:

· если $a_i \xrightarrow{R} c_i$, $c_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1,\ldots,n$, то $a_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Уровнем рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R} b$ будем называть количество шагов вывода, необходимое для получения этой связи. При этом учитываются лишь применения правил 3)–5) определения 3.4. Для связи по правилу 1) или 2) уровень рекурсии считается равным нулю. Поскольку в общем случае связь $a \xrightarrow{R} b$ может быть получена не единственным набором правил, обычно будем лишь оценивать сверху ее уровень рекурсии, не указывая его точного значения.

Применительно к шагам вывода соотношения $a \xrightarrow{R} b$ будем употреблять слова «начальный», «последний», а также «предыдущий», «следующий» и т.д. При этом имеется в виду продвижение в направлении прямого логического вывода, то есть от пар исходного отношения $(R \cup \succcurlyeq)$ к выводимой паре отношения $\xrightarrow{R}$. Заметим, что рекурсивное определение 3.4 сформулировано в контексте обратного вывода.

Лемма 5.1. Пусть R – логическое отношение на эквациональной решетке $\mathbb{F}$ и $a,b \in \mathbb{F}$. Тогда, если справедливо $a \xrightarrow{R} b$, то $(a,b) \in R$.

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по m – верхней оценке уровня рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R} b$. При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)–2) определения 3.4. Случай 1) непосредственно означает требуемое утверждение. Если же справедливо 2), то и тогда $(a,b) \in R$, поскольку логическое отношение R по определению содержит тавтологии.

Предположим далее, что лемма верна при некотором $m \geq 0$, и докажем ее утверждение при уровне $m+1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты могут дать правила 3)–5).

Если имеет место 3), то по предположению индукции уровень рекурсии в соответствующем соотношении $a_1 \xrightarrow{R} b_1$ $\left(a = \sigma(a_1), b = \sigma(b_1)\right)$ не превосходит m, поэтому $(a_1, b_1) \in R$. Тогда, в силу свойства применимости логического отношения R, получим $(a,b) \in R$. Варианты происхождения связи $a \xrightarrow{R} b$ из условий 4)–5) рассматриваются аналогично. □

Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что при произвольном отношении R соответствующее отношение $\xrightarrow{R}$ является логическим. Действительно, в силу п. 2) определения 3.4 оно содержит тавтологии, из п. 3) следует его применимость, из п. 4) – дистрибутивность, а п. 5) означает транзитивность данного отношения. Далее, в силу п. 1) определения 3.4, отношение $\xrightarrow{R}$ содержит R. Для доказательства теоремы осталось показать, что это – наименьшее из таковых отношений.

Пусть R' – любое другое логическое отношение, содержащее R. Тогда очевидно, что если $a \xrightarrow{R} b$, то $a \xrightarrow{R'} b$. Отсюда по лемме 5.1 имеем $(a,b) \in R'$. Следовательно, отношение $\xrightarrow{R}$ содержится в произвольно выбранном R', и, таким образом, является наименьшим логическим отношением, содержащим R. □

Доказательство следствия 3.1. Заметим вначале, что по определению любое логическое отношение является собственным же логическим замыканием. Этот вывод в силу теоремы 3.1 относится и к отношению $\xrightarrow{R}$. Далее, из определения 3.4 следует, что для любых $R_1 \subseteq R_2$ справедливо $\xrightarrow{R_1} \subseteq \xrightarrow{R_2}$. В нашем случае по построению отношения R' выполнены включения $R \subseteq R' \subseteq \xrightarrow{R}$. Переходя к логическим замыканиям и учитывая сказанное выше, получаем, что отношения R и R' имеют общее логическое замыкание $\xrightarrow{R}$. □

Доказательство теоремы 3.2. Требуется доказать равенство $\xrightarrow{R_1 \cup R_3} = \xrightarrow{R_2 \cup R_4}$ как соотношение двух множеств. Пусть $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$. Докажем, что при этом справедливо $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Для этого вновь применим метод индукции по m – верхней оценке уровня рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$.

При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)–2) определения 3.4. Если справедливо 2), то тогда $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$, поскольку логическое отношение $\xrightarrow{R_2 \cup R_4}$ содержит и тавтологии. Если выполнено условие 1), то имеем $(a,b) \in R_1 \cup R_3$. Пусть, для определенности, $(a,b) \in R_1$ (вариант $(a,b) \in R_3$ симметричен). В этом случае имеет место $a \xrightarrow{R_1} b$, откуда в силу условия эквивалентности $R_1 \sim R_2$ получим $a \xrightarrow{R_2} b$. Следовательно, справедливо и $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Таким образом, при $m = 0$ требуемое утверждение доказано.

Предположим далее, что оно верно для некоторого $m \geq 0$, и докажем его при уровне рекурсии не превосходящем $m+1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты для $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$ могут дать условия 3)–5) определения 3.4.

Если имеет место 3), то по предположению индукции уровень рекурсии в соответствующем соотношении $a_1 \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b_1$ $\left(a = \sigma(a_1), b = \sigma(b_1)\right)$ не превосходит m, поэтому $a_1 \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b_1$. В этом случае, в силу свойства применимости логического отношения $\xrightarrow{R_2 \cup R_4}$, получим $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Аналогично рассматриваются случаи применения правил 4)–5). □

Лемма 5.2. Пусть R – отношение на эквациональной решетке и $a_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда справедлива логическая связь $\bigcup_{i=1,\ldots,n} a_i \xrightarrow{R} \bigcup_{i=1,\ldots,n} b_i$.

Доказательство. Введем обозначения $\tilde{a} = \bigcup_{i=1,\ldots,n} a_i$, $\tilde{b} = \bigcup_{i=1,\ldots,n} b_i$. Поскольку $\tilde{a} \supseteq a_i$, $i = 1,\ldots,n$, то в силу $a_i \xrightarrow{R} b_i$ и условия 5) определения 3.4 справедливо $\tilde{a} \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1,\ldots,n$. Применяя к последнему соотношению правило 4), получим $\tilde{a} \xrightarrow{R} \tilde{b}$. □

Следствие 5.1. На основе леммы 5.2 можно ввести обобщенное правило вывода, соответствующее правилу 4) определения 3.4: упорядоченная пара $a, b \in \mathbb{F}$ логически связана отношением R $\left(a \xrightarrow{R} b\right)$, если выполнено следующее условие:

4') существуют такие $a_i, b_i \in \mathbb{F}$, $i = 1,\ldots,n$, что $\bigcup_{i=1,\ldots,n} a_i = a$, $\bigcup_{i=1,\ldots,n} b_i = b$, причем $a_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Очевидно, что правило 4) определения 3.4 является частным случаем правила 4′).

Лемма 5.3. Пусть R – отношение на эквациональной решетке $\mathbb{F}$. Тогда при выводе любой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ все применения правила 4′) могут быть произведены без участия правила 2.1) определения 3.4 со строгим неравенством. Роль последнего можно свести к присутствию лишь в качестве компонента для транзитивного правила 5).

Доказательство. Предположим, что при получении вывода $a \xrightarrow{R} b$ использовалось условие 4′). разобьем имеющееся множество пар $\{(a_i,b_i) \mid i=1,\dots,n\}$ на 2 подмножества. В первое из них войдут такие пары (a_j,b_j), $j=1,\dots,n_1$, для которых выполнено $a_j \supset b_j$. Ко второму подмножеству отнесем все остальные пары (a_j,b_j), $j=1,\dots,n_2$. Тогда, вводя обозначения $\bigcup\limits_{j=1,\dots,n_1} a_j = a^1$, $\bigcup\limits_{j=1,\dots,n_1} b_j = b^1$, $\bigcup\limits_{j=1,\dots,n_2} a_j = a^2$, $\bigcup\limits_{j=1,\dots,n_2} b_j = b^2$, получим $a = a^1 \cup a^2$, $b = b^1 \cup b^2$. При этом $a^1 \supseteq b^1$ (соответственно $a^1 \xrightarrow{R} b^1$) и по условию 4′) имеет место $a^2 \xrightarrow{R} b^2$. Очевидно, что указанное выше применение правила 4′) для $\{(a_i,b_i) \mid i=1,\dots,n\}$ можно заменить аналогичным правилом для $(a^1,b^1),(a^2,b^2)$.

Если при этом окажется, что $n_1 = 0$, то для данного вывода $a \xrightarrow{R} b$ сформулированное в лемме утверждение относительно правила 4′) выполнено сразу. Если же $n_2 = 0$ либо $a^2 \supseteq b^2$, то применение правила 4′) не требуется вовсе. Рассмотрим оставшийся нетривиальный случай ($n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$ и не имеет места $a^2 \supseteq b^2$), в котором поступим следующим образом. Применим правило 4′) к соотношениям $b^1 \xrightarrow{R} b^1$, $a^2 \xrightarrow{R} b^2$, тогда получим $b^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$. Возвращаясь к имеющемуся неравенству $a^1 \supseteq b^1$, заметим, что в силу свойств решетки $\mathbb{F}$ из него следует неравенство $a^1 \cup a^2 \supseteq b^1 \cup a^2$. Поэтому, применяя к парам $a^1 \cup a^2 \supseteq b^1 \cup a^2$ и $b^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$ транзитивное правило 5), приходим к соотношению $a^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$, то есть $a \xrightarrow{R} b$. При этом мы исключили в применяемом правиле 4′) участие строгих неравенств вида $a_j \supset b_j$. Таким образом, утверждение леммы доказано. □

Доказательства следующих двух лемм проводятся по аналогичной схеме. В целях экономии места мы их здесь не приводим.

Лемма 5.4. Пусть R – отношение на эквациональной решетке $\mathbb{F}$. Тогда при выводе логической связи $a \xrightarrow{R} b$ любое применение правила 3) определения 3.4 можно исключить либо поменять местами с предшествующим ему применением каждого из правил 2.1), 4′), 5), получив при этом ту же логическую связь.

Лемма 5.5. Пусть R – отношение на эквациональной решетке. Тогда при выводе любой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ все применения транзитивного правила 5) могут быть исключены либо перенесены в заключительную стадию данного процесса.

Применяя лемму 5.2 и следствие 3.1, нетрудно убедиться в том, что отношение $\tilde{R}$ (см. п. 3) логически эквивалентно R.

Лемма 5.6. Пусть R – отношение на эквациональной решетке. Тогда, если $a \xrightarrow{R} b$, и это соотношение может быть получено без использования транзитивного правила 5) определения 3.4, то $(a,b) \in \tilde{R}$.

Доказательство. Пусть имеет место $a \xrightarrow{R} b$, полученное без правила 5). Если указанное соотношение произошло непосредственно из условия 1) или 2) определения 3.4, то сразу имеем $(a,b) \in \tilde{R}$.

Остается рассмотреть нетривиальный случай применения цепочки правил 3), 4′). Все необходимые для этого тавтологии могут быть подготовлены в самом начале процесса вывода. При этом в силу лемм 5.3 и 5.4 пары вида $a \supset b$ не потребуются. Также по лемме 5.4 все применения правила 3) могут быть осуществлены на начальном этапе процесса вывода. Следовательно, правило 4′) может лишь завершать этот процесс.

Если сопоставить указанные этапы вывода с последовательностью построения отношения $\tilde{R}$, то окажется, что вывод $a \xrightarrow{R} b$ соответствует построению некоторого подмножества $\tilde{R}$, что и доказывает включение $(a,b) \in \tilde{R}$. □

Доказательство теоремы 3.3. Как было отмечено выше, отношение $\tilde{R}$ эквивалентно R. Следовательно, по определению логического замыкания, имеем $\tilde{R} \subseteq \xrightarrow{R}$. Отсюда, поскольку отношение $\xrightarrow{R}$ транзитивно, получаем $\tilde{R}^* \subseteq \xrightarrow{R}$.

Докажем обратное включение. Предположим, что $a \xrightarrow{R} b$. По лемме 5.5, при получении этого вывода все применения транзитивного правила 5) определения 3.4 могут быть перенесены в заключительную стадию процесса: существует цепочка элементов $a = c_0, c_1, \dots, c_N = b$ такая, что выполнены соотношения $c_{k-1} \xrightarrow{R} c_k$, $k = 1,\dots,N$, при выводе которых правило 5) не используется. Тогда по лемме 5.6 имеем $(c_{k-1},c_k) \in \tilde{R}$, откуда сразу получаем $(a,b) \in \tilde{R}^*$. Итак, $\xrightarrow{R} \subseteq \tilde{R}^*$. □

Так же с помощью леммы 5.2 и следствия 3.1 нетрудно убедиться в том, что отношение $\underset{\sim}{R}$ (см. п.3) логически эквивалентно R.

Лемма 5.7. Пусть R – бинарное отношение на эквациональной решетке. Для того чтобы R являлось логической редукцией, необходимо и достаточно, чтобы R не содержало ни одной такой пары (a,b), что выполнено соотношение $a \xrightarrow{R\setminus\{(a,b)\}} b$.

Доказательство. Пусть отношение R представляет собой логическую редукцию, то есть является минимальным логически эквивалентным себе отношением. Если бы существовала пара $(a,b) \in R$, логически связанная отношением $R \setminus \{(a,b)\}$, то в силу следствия 3.1 ее можно было бы исключить из R, получив при этом меньшее эквивалентное отношение. Таким образом, при наличии указанной пары отношение R не может быть логической редукцией.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что не существует ни одной пары $(a,b) \in R$, для которой справедливо $a \xrightarrow{R\setminus\{(a,b)\}} b$. Требуется доказать, что в этом случае R есть логическая редукция. Предположим противное – пусть существует отношение $R_0 \subset R$, эквивалентное R, и пусть $(a,b) \in R \setminus R_0$. Тогда, поскольку $(a,b) \in R$, в силу эквивалентности рассматриваемых отношений справедливо $a \xrightarrow{R_0} b$. Так как отношение R_0 не содержит пару (a,b), то $R_0 \subseteq R \setminus \{(a,b)\}$, и логическая связь $a \xrightarrow{R_0} b$ противоречит сделанному предположению – таких пар (a,b) в R нет. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 3.4 основывается на лемме 5.7 и принципиальных трудностей не содержит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hsiang J.* Refutational theorem proving using term-rewriting systems / J. Hsiang // Artif. Intell. – 1985. – V. 25. – P. 255–300.

2. *Buchberger B. Algebraic Simplification* / B. Buchberger, R. Loos // Computer Algebra – Symbolic and Algebraic Computation / eds. B. Buchberger, G. E. Collins, R. Loos. – Vienna – New York : Springer-Verlag, 1982. – P. 11–43.

3. *Воробьев С. Г.* Условные системы подстановок термов и их применение в проблемно-ориентированной верификации программ / С. Г. Воробьев : автореф. дис. ... к. ф.-м. н. – Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1987.

4. *Toyama Y.* On Equivalence Transformations for Term Rewriting Systems / Y. Toyama // Proceedings of the 1983 and 1984 RIMS Symposia on Software Science and Engineering II / eds E. Goto, K. Araki and T. Yuasa // Lecture Notes In Computer Science. – London : Springer-Verlag. – 1986. – Vol. 220. – P. 44–61.

5. *Klop J. W.* Term rewriting systems / J. W. Klop // Handbook of Logic in Computer Science (Vol. 2): Background: Computational Structures / eds S. Abramsky, D. M. Gabbay and S. E. Maibaum // Osborne Handbooks of Logic In Computer Science. – New York : Oxford University Press. – 1992. – Vol. 2. – P. 1–116.

6. *Dershowitz N.* Canonical Conditional Rewrite Systems / N. Dershowitz, M. Okada, G. Sivakumar // Proceedings of the 9th international Conference on Automated Deduction (May 23–26, 1988) / eds E. L. Lusk, R. A. Overbeek // Lecture Notes In Computer Science. – London : Springer-Verlag. – 1988. –Vol. 310. – P. 538–549.

7. *Махортов С. Д.* Основанный на решетках подход к исследованию и оптимизации множества правил условной системы переписывания термов / С. Д. Махортов // Интеллектуальные системы. – 2009. – Т. 13, вып 1–4. – С. 51–68.

8. *Баранов Д. В.* Исследование и оптимизация условных систем переписывания на основе продукционно-логической модели / Д. В. Баранов, С. Д. Махортов // XII национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2010: Труды конференции. Т. 1. – М. : Физматлит, 2010. – С. 29–37.

9. *Aho A. V.* The transitive reduction of a directed graph. SIAM J. Computing 1 : 2 / A. V. Aho, M. R. Garey, J. D. Ulman, 1972. – P. 131–137.

10. *Расёва Е.* Математика метаматематики : пер. с англ. / Е. Расёва, Р. Сикорский. – М. : Наука, 1972. – 591 с.

Баранов Денис Владимирович – преподаватель кафедры МО ЭВМ ф-та ПММ ВГУ. Тел. (4732) 208-698. E-mail: Denis.Baranov@dataart,com.

Baranov D. V. – the Tutor of Department of Applied and System Software of Voronezh State University, Russia. Phone (4732) 208-698. E-mail: Denis.Baranov@dataart,com.