УДК 519.86.71

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОПРЯЖЕНИЯ ИНТЕРЕСОВ СОБСТВЕННИКОВ ФИРМЫ И ЕЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО В УСЛОВИЯХ ЗАИМСТВОВАНИЯ

**Н. Б. Баева, Н. А. Чернышова**

*Воронежский государственный университет*

**Поступила в редакцию 17.11.2010 г.**

**Аннотация.** Предложена процедура стимулирования деятельности управляющего фирмой, собственники которой отделены от управления ею и в силу нехватки собственных финансовых средств, использующие заимствование. Исследована зависимость величины стимулирующего параметра от капитала фирмы и численности её персонала. Предложен аналитический вид траектории сбалансированного роста фирмы в условиях заимствования
**Ключевые слова**: заимствование финансовых средств, сопряжение интересов, принцип максимума Понтрягина
**Annotation:** Stimulation procedure for the work of the top manager of the company, which owners are separated from the management process and use loans due to the lack of their financial resources, is presented in this article. Dependence of the stimulation parameter value from the company's capital and the number of employees is investigated. Analytical form of trajectory of the balanced company's development under the circumstances of borrowing is offered.
**Keywords:** borrowing of financial resources, coupling of interests, Pontriagin maximal principle.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее время характеризуется активным поиском идей, методов, подходов и средств усиления темпов развития экономики в целом и каждого хозяйствующего субъекта в отдельности. Значительное число последних стало частными фирмами, владельцы акций которых отделены от управления фирмами. В таких условиях благополучность состояний фирм фактически определяется успешностью топ-менеджера, его профессионализмом, его стремлением работать в интересах фирмы, а не только своих. Одним из реальных способов установления таких условий является направленное материальное стимулирование деятельности управляющего. Эти вопросы рассматривались в ряде работ [см., напр. 1, 2, 3, 4, 5]. В условиях же выхода России из финансового кризиса весьма интересен, с нашей точки зрения, подход поиска направлений сближения интересов фирмы, в целом, и ее управляющего, основанный на решении задачи оптимального управления специального вида с фазовой переменной – объемом используемого капитала и управляющим параметром – величиной дополнительных стимулирующих выплат, описанный в работе [6]. В данной статье предлагается модификация подхода, состоящая в решении задачи оптимального стимулирования управляющего в условиях привлечения фирмой заемных средств на проведение текущей производственной деятельности и развитие фирмы. Это тем более важно, что работа фирм в таких условиях требует специфических механизмов сбережения, накопления и распределения финансовых средств, а это вызывает необходимость применения новых подходов к процессу стимулирования деятельности управляющего фирм.

Для описания предлагаемого подхода введем, прежде всего, понятие функции заимствования, исследуем ее свойства и рассмотрим способ отыскания ее аналитического вида.

## ФУНКЦИЯ ЗАИМСТВОВАНИЯ: ПОНЯТИЕ, СВОЙСТВА, АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВИД

Возможности заимствования фирмами финансовых средств, в значительной степени, определяются, с одной стороны, инвестиционной активностью внешней среды – $\delta$, с другой – величиной активной части основных фондов фирмы – $K^{ak}$, так как последние являются основой залога, обеспечивающего возможность взятия кредита.

Функцию заимствования, учитывая сказанное выше, мы определим как непрерывную дифференцируемую, монотонно неубывающую по аргументам функцию:

$$g = P(K^{ak}, \delta), \tag{1}$$

где $K^{ak} \in G_{ak}$, где $G_{ak} \in [\underline{G}, \overline{G}]$, $\delta \in [0,1]$.

Здесь $G_{ak}$ – множество возможных изменений величины активной части фондов, а инвестиционная активность внешней среды $\delta$ может рассматриваться, как непрерывная, дифференцируемая, убывающая по изменению средней ставки банков по кредитам r функция. Учитывая сказанное выше, функцию инвестиционной активности можно определить так:

$$\delta = W(r), r \in G_r. \tag{2}$$

Выбор функции $\delta$ в виде (2) объясняется следующими соображениями. Если средняя ставка по кредитам равна 0, то $\delta$ выбирается равной 1, рост ставки уменьшает характеристику инвестиционной активности среды, причем в точке $r^*$ темп влияния величины $\delta$ на рост $r$ меняет свой характер. При $r \to \infty$, $\delta$ принимается стремящейся к нулю.

Теперь перейдем к определению аналитического вида функции заимствования. Учитывая (1), (2) представим функцию заимствования в виде:

$$g = P(K^{ak}, W(r)). \tag{3}$$

Аналитический вид функции (3) находится на основе выбора выпуклой линейной комбинации базовых функций, в качестве которых выбираются функции без предела роста, функция с пределом роста с точкой и без точки перегиба и др. [4] Для отыскания параметров функции (3) используется метод наименьших квадратов, построенный на основе обработки рядов, характеризующих $t$ изменения параметров на входе: $K^{ak}, r(t)$ и выходе $g(t)$. Здесь $t \in [t_0, T]$, $[t_0, T]$ – промежуток изменения функции $K^{ak}, r(t)$ во времени.

Один из возможных видов функции заимствования приведен ниже

$$g = P(K^{ak}, W(r)) = \varphi(K^{ak}) \cdot f(W(r)). \tag{4}$$

Здесь $\varphi(K^{ak})$ – функция, характеризующая зависимость величины выдаваемого кредита от величин активной части капитала, $Q = f(W(r))$ функция инвестиционной активности, играющая роль калибровочной, меняющейся от 0 до 1 функции.

Ниже для простоты в качестве функции заимствования использовалась функция:

$$g(t) = (\Theta K(t) + \Theta_0) W(r). \tag{5}$$

Здесь $\Theta$ – доля активной части капитала фирмы, т.е. $K^{ak}(t) = \Theta K(t) + \Theta_0$, $K(\mathrm{t})$ – капитал фирмы, $W(r)$ - показатель инвестиционной активности внешней среды.

## МОДЕЛЬ СОПРЯЖЕНИЯ ИНТЕРЕСОВ УПРАВЛЯЮЩЕГО ФИРМЫ И ЕЕ СОБСТВЕННИКОВ В УСЛОВИЯХ ЗАИМСТВОВАНИЯ

Модель оптимального сопряжения интересов фирмы и управляющего предлагается рассматривать в следующем виде:

$$J = \int_0^T [\alpha\mu R(t) + \alpha\gamma K(t) + \\ + \alpha c w L(t) + (1-\alpha) R(t)] e^{-rt} dt \to \max \tag{6}$$

при ограничениях

$$(1-\beta) R_k + (1-\rho)(1-\mu) R(t) = \\ = \gamma K(t) + c w L(t) + w L(t) + \overline{\delta} K(t) + \\ + \pi(t) K(t) + \frac{\partial K(t)}{\partial t} + Q(t) \tag{7}$$

и начальных условиях

$$L(0) = L_0,\ K(0) = K_0, \tag{8}$$

где $t \in [0..T], 0 \le \mu < 1,\ \ 0 < \alpha \le 1,\ \ 0 \le \underline{\gamma} \le \gamma \le \le \min(1 - \overline{\delta} - \pi, \gamma)$; $0 \le \underline{c} \le c \le \overline{c} < 1$.

Будем считать, что $R(t) = F(K(t), L(t))$, $I(t) = \mu R(t)$, $W(t) = \gamma K(t) + c w L(t)$, $Q(t) = V \times \times R(t) + V_0$.

Здесь, $R(t)$ – функция реализации продукции фирмы, т.е. общий объем продаж (в денежном выражении) в момент $t$, $K(t)$ – объем капитала фирмы, $W(t)$ – зарплата управляющего, $r$ – предположительный уровень дисконтирования, $\pi$ – константа минимальной прибыли, а именно, прибыль держателей акций, если $\pi > 0$, и их потери, если $\pi < 0$, в расчете на единицу вложений, $\overline{\delta} K$ – амортизация, где $\overline{\delta}$ – уровень амортизации капитала $K(t)$, $\frac{\partial K(t)}{\partial t}$ – чистые инвестиции, С – доля, выделяемая управляющему от общего фонда оплаты труда – $VL(t)$. Здесь V – средняя зарплата, $L(t)$ – численность персонала фирмы, $R_k$ – величина суммы заимствования в кредит, $\beta$ – плата за кредит, $Q(t)$ – затраты на ресурсы, $v$ – доля стоимости материальных ресурсов в общей стоимости объема выпуска, $v_0$ – стоимость материальных ресурсов, не зависящая от стоимости объема выпуска предприятия, $\rho_1 \cdot R(t)$ – начальный капитал фирмы, являющийся гарантией ее функционирования.

Множество всех непрерывно дифференцируемых функций $K(t), L(t)$, удовлетворяющих ограничениям (7) при заданном параметре $\mu$ и начальном условии (8), назовем допустимым множеством $\Omega(\mu)$.

Построенная модель является задачей оптимального управления с фазовой переменной $K(t)$, управляющей функцией $L(t)$ и параметрами управления $(\alpha, \mu)$. В модели предполагается, что получаемая выручка делится на две части. Первая часть с весовым коэффициентом $\mu$ в целевой функции состоит из дохода управляющего. Вторую часть с весом $(1-\mu)$ составляют расходы на продолжение жизнедеятельности фирмы.

Для проведения дальнейших рассуждений введем несколько дополнительных функций: $F = F(K, L)$ – производственная функция фирмы, зависящая от объема вложенного капитала и фонда заработной платы сотрудников. Будем считать, что данная функция является однородной функцией первого порядка, удовлетворяющей следующим свойствам:

а) $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0,\ \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0;$

б) $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0,\ \dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0;$

в) $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} \to \infty$ для $K \to 0$;

г) $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} \to 0$ для $K \to \infty$.

Заметим, что к этому классу относится, например, функция Кобба-Дугласа.

Построим функцию $\varphi(k)$ на основе $F(K,L)$ следующим образом: $\varphi(k) = F\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}, 1\right)$.

Функция $\varphi(k)$ построена на основе $F\left(\dfrac{K}{L}, 1\right)$, и поэтому для нее выполняются следующие свойства:

а) $\varphi'(k) > 0;$

б) $\varphi''(k) < 0;$

в) $\varphi'(k) \to \infty$ для $k \to 0$;

г) $\varphi'(k) \to 0$ для $k \to \infty$.

Для упрощения используемых ниже вычислений построим вспомогательную функцию $z(k)$:

$$z(k) = \varphi'(k)k - \varphi(k). \tag{9}$$

Будем искать такую постоянную точку $\mu, 0 < \mu < 1$, и такое допустимое управление $L(t)$, и фазовую траекторию

$$\begin{gathered} \mu^* = \arg \max_{K(t), L(t), \mu} J(K(t), L(t), \mu); \\ K(t), L(t) \in \Omega(\mu), 0 \le \mu \le 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Для нахождения оптимального коэффициента $\mu$ сформулируем и докажем следующую теорему:

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия $z(k(t)) \le 0, t \in [0..T]$; $z(k(t)) = 0$ ; $z(k(0)) < 0, (c+1)w \le |z(k(0))|$, тогда оптимальное значение $\mu$ в смысле (10) в задаче (6)–(8) существует и определяется следующим образом:

$$\mu = 1 + \frac{(c+1)w}{z(k(0))}.$$

**Доказательство.** Учитывая факт, что производственная функция $F(K(t), L(t))$ – однородна, построим функцию Гамильтона для задачи (6)–(8)

$$\begin{gathered} H(\lambda, K, L, t) = \\ = \left[(1-\alpha+\alpha\mu)L(t)\varphi\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) + \right. \\ \left. + \alpha\gamma K(t) + \alpha c w L(t)\right] e^{-rt} + \\ + \lambda(t)((\nu - \rho) \times \\ \times (1-\mu)L(t)\varphi\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) - \\ -(\gamma + \bar{\delta} + \pi_c)K(t) - \\ -(c+1)wL(t) - (vR(t) + v_0)). \end{gathered} \tag{11}$$

Далее, учитывая [11], выпишем систему необходимых условий оптимальности, вытекающих из принципа максимума Понтрягина

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial K} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial K}{\partial t} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
[(1-\alpha+\alpha\mu)(\varphi\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)- \\
-\varphi'\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)^{*}\dfrac{K(t)}{L(t)})+\alpha cw]e^{-rt}+ \\
+\lambda(t)((1-\mu)(\varphi\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)- \\
-\varphi'\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)^{*}\dfrac{K(t)}{L(t)})-(c+1)w)=0 \\
\lambda'(t)=-[(1-\alpha+\alpha\mu)\varphi'\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)+\alpha\gamma]e^{-rt}- \\
-\lambda(t)((1-\mu)\varphi'\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)-(\gamma+\overline{\delta}+\pi_c)) \\
K'(t)=(1-\mu)L(t)\varphi\left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)- \\
-(\gamma+\overline{\delta}+\pi_c)K(t)-(c+1)wL(t)=0
\end{cases}
\qquad (12)
$$

Обозначим $k(t)=K(t)/L(t)$ и продифференцируем по $t$. Получим

$$k'(t)=\frac{K'(t)}{L(t)}-\frac{K(t)}{L(t)}\cdot\frac{L'(t)}{L(t)}. \qquad (13)$$

Из (12), учитывая, что $l(t)=\dfrac{L'(t)}{L(t)}$, получим,

$$\frac{K'(t)}{L(t)}=k'(t)+k(t)l(t). \qquad (14)$$

Разделив уравнения системы (11) на $L(t)u$, учтя введенные обозначения, получим:

$$
\begin{cases}
\lambda(t)=-\dfrac{[(1-\alpha+\alpha\mu)z(k(t))-\alpha cw]e^{-rt}}{(1-\mu)z(k(t))+(c+1)w} \\
\lambda'(t)=-[(1-\alpha+\alpha\mu)\varphi'(k(t))+\alpha\gamma]e^{-rt}- & 15 \\
-\lambda(t)\Big((1-\mu)\varphi'(k(t))-(\gamma+\overline{\delta}+\pi_c)\Big) & 16 \\
k'(t)+k(t)l(t)=(1-\mu)\varphi(k(t))- \\
-(\gamma+\overline{\delta}+\pi_c)k(t)-(c+1)w
\end{cases}
$$

Будем, кроме этого, учитывать условие трансверсальности для задачи с закрепленным левым концом и свободным правым концом, а также условие оптимальности по параметру $\mu$ (см. [7, 8]). Заметим при этом, что в правом конце интервала справедливо следующее

$$(1-\mu)z(k(t))+(c+1)w\geq 0, \qquad (17)$$

откуда,

$$\mu\geq 1+\frac{(c+1)w}{z(k(t))}. \qquad (18)$$

Так как $\mu$ по условию принадлежит отрезку [0,1], то из (18) следует

$$\mu=1+\frac{(c+1)w}{z(k(0))}. \qquad (19)$$

При этом учитывается, что $k(0)$ – положительная величина (это справедливо, так как в начальный момент времени фирма, как правило, имеет некоторый объем собственного капитала и определенную численность персонала). Учитывая, что по условию $(c+1)w\leq|z(k(0))|$, имеем $0\leq\mu\geq 1$. При этом в точке T имеем $z(k(T))=0$, тогда $\lambda(T)=\dfrac{\alpha ce^{-r}}{c+1}$, а $\mu$ – любое.

Таким образом, оптимальный параметр $\mu$ существует, отвечает всем необходимым свойствам для этой величины и определяется формулой (19). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1 может быть легко перенесено на случай рассмотрения производственных функций $Y=F(K,L)$, удовлетворяющих следующим соотношениям.

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}>0,\ \ \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}>0;\\
&\text{б)}\ \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}<0,\ \ \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}<0; \qquad (20)\\
&\text{в)}\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\to\infty \text{ для } K\to 0;\\
&\text{г)}\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\to 0 \text{ для } K\to\infty.
\end{aligned}
$$

Этому набору свойств удовлетворяет, например, функция CES.

Функция $\varphi(k)$, построенная на основе $F(\frac{K}{L},1)$, в этом случае удовлетворяет следующим свойствам:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ \varphi'(k)>0;\\
&\text{б)}\ \varphi''(k)<0; \qquad (21)\\
&\text{в)}\ \varphi'(k)\to 0 \text{ для } k\to 0;\\
&\text{г)}\ \varphi'(k)\to\infty \text{ для } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

Введем, как было проделано ранее в (9), вспомогательную функцию $z(k)$, тогда с учетом предположений (21) следует, что функция $z(k(t))\geq 0$, $t\in[0..T]$. Для данного случая можно сформулировать и доказать следующую теорему

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия: функция $z(k(t))\geq 0$, $t\in[0..T]$, $\alpha cw\leq z(k(t))\leq$ $\leq\dfrac{\alpha cw}{(1-\alpha)}$; тогда оптимальное значение $\mu$ в смысле (10) в задаче (6)–(8) существует и определяется следующим образом:

$$\mu = \frac{cw}{z(k(T))} - \frac{1}{\alpha} + 1\,.$$

*Доказательство*. Первоначальные преобразования полностью совпадают с формулами (10)–(16) из предыдущей теоремы. Будем, как и в предыдущем случае, учитывать условие трансверсальности для задачи с закрепленным левым концом и свободным правым концом, а также условие оптимальности по параметру $\mu$ (см. [7, 8])

$$\begin{cases} \lambda(T) = 0 \\ \int_0^T \lambda(t) F(K(t), L(t))dt \geq 0, 0 \leq \mu \leq 1 \end{cases} \tag{22}$$

Система (22) эквивалента следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \lambda(T) = 0 \\ \lambda(t) \geq 0, 0 \leq \mu \leq 1, t \in [0..T] \end{cases} \tag{23}$$

В силу того, что, из уравнения (14) следует: откуда, $\mu \geq \dfrac{cw}{z(k(t))} - \dfrac{1}{\alpha} + 1$

Положим,

$$\mu = \frac{cw}{z(k(t))} - \frac{1}{\alpha} + 1\,. \tag{24}$$

Учитывая, что $\alpha cw \leq z(k(T)) \leq \dfrac{\alpha cw}{(1-\alpha)}$ имеем $0 \leq \mu \leq 1$. При подстановке (24) в точку T имеем $\lambda(T) = 0$.

Таким образом, оптимальный параметр $\mu$ существует, отвечает всем необходимым свойствам для этой величины и определяется формулой (24). Теорема доказана.

Описанный в данном пункте подход позволяет рассчитать коэффициент стимулирования работы управляющего $\mu$ на основе формул (19) и (24) при достаточно жестких ограничениях, сформулированных в теореме 1 и теореме 2. Поскольку, в некоторых случаях (например, в условиях заимствования), эти условия не выполняются, необходим механизм расчета $\mu$ при более общих предположениях. К описанию этого мы и переходим.

## МЕХАНИЗМ ВЫБОРА ТРАЕКТОРИИ РАЗВИТИЯ ФИРМЫ В УСЛОВИЯХ ЗАИМСТВОВАНИЯ

Выбор величины параметра стимулирования работы управляющего фирмой, основан на учете оптимальных соотношений между величиной выплат всему персоналу фирмы, ее размером, а также объемом выполняемых им работ.

Построенная модель (6)–(8), при некоторых упрощающих предположениях, может оказаться основой для расчета траектории развития фирмы.

Для математического анализа построенной модели оптимального управления (6)–(8), используя функцию, выписываем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} j = \Big[ & \alpha\mu L(t)\varphi\left(\frac{K}{L}\right) + \alpha\gamma K(t) + \\ & +\alpha C_M L(t) + (1-\alpha)L(t)\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\Big] e^{-rt} + \\ & +\lambda(t)[-(1-\mu)(1-\rho_1)L(t)\varphi\left(\frac{K}{L}\right) - \\ & -\sigma(1-\beta)(\chi K(t) + \chi_0) + \\ & +(\gamma + \bar{\delta} + \pi_c)K(t) + \frac{dK}{dt} + (w_{\alpha v} + \\ & +C_M)L(t) + vL(t)\varphi\left(\frac{K}{L}\right) + v_0]. \end{aligned} \tag{*}$$

На основе функции Лагранжа составим систему уравнений Эйлера-Лагранжа

$$J_K = \frac{d}{dt} J_K = 0;$$
$$J_L = 0;$$
$$J_\lambda = 0.$$

Получим новый целевой функционал: $W = \int_0^\infty J dt \to \max$, при условиях

$$L(0) = L_0\,,\ K(0) = K_0\,.$$

Вводя новые обозначения $k(t) = K(t)/L(t)$; $l(t) = (dL(t)/dt)/L(t)$ получим $K'(t)/L(t) = k'(t) + k(t)l(t)$. Решив, далее, систему уравнений Эйлера-Лагранжа получаем следующее:

$$\lambda(t) = \\ = \frac{[(1-\alpha+\alpha\mu)z(k) - \alpha C_m]e^{-rt}}{((1-\mu)(1-\rho_1) - v)\, z(k) + (W_{av} + C_m)};$$

$$\lambda'(t) = \left[\frac{z'_t(k)[(1-\alpha+\alpha\mu)(W_{\alpha v} + C_m) + ((1-\mu)(1-\rho) - \nu)\alpha C_m]}{[((1-\mu)(1-\rho_1) - \nu)\, z(k) + (W_{\alpha v} + C_m)]^2}\right] e^{-rt} - r\lambda(t)\,.$$

Тогда, если обозначить,

$$U=\big((1-\mu)(1-\rho_1)-v\big)z(k)+(W_{\alpha v}+C_m);$$

$$\begin{aligned}V=\Big[\big((1-\mu)(1-\rho_1)-v\big)z(k)+(W_{\alpha v}+C_m)\Big]\times\\ \times[(1-\alpha+\alpha\mu)\varphi'(k)+\alpha\gamma]+\\ +[(1-\alpha+\alpha\mu)z(k)]\cdot[r+(\gamma+\delta+\pi_c-\\ -(1-\beta)l)+\big(v-(1-\mu)(1-\rho_1)\varphi'(k)\big)].\end{aligned}$$

и рассчитать $k'(t)=\dfrac{z_t'(k)}{\varphi''\big(k(t)\big)k(t)}$, можно, выразив $z_t'(k)$, получить

$$k'=\frac{UV}{\varphi''(k)k[(1-\alpha+\alpha\mu)(W_{\alpha v}+C_m)+ +\big((1-\mu)(1-\rho)-v\big)\alpha C_m]}. \quad (25)$$

Анализ соотношения (25) позволяет построить шкалу проверки состояний фирмы. Для построения шкалы проведем следующие рассуждения.

В силу того, что

$$[(1-\alpha+\alpha\mu)(W_{\alpha v}+C_m)+ +\big((1-\mu)(1-\rho)-v\big)\alpha C_m]>0,$$

а $\varphi''(k)<0, k'=0$ знаменатель выражения (25) отличен от 0. Поэтому из соотношения следует, что либо $V=0$, либо $U=0$. Учитывая, что по условию $U(k)$ и $V(k)$ монотонно убывают, то уравнения $U(k)=0$; $V(k)=0$ имеют единственное решение. Стало быть, уравнение $k'=0$ имеет два корня $k_1(\alpha,\mu)$, $k_2(\alpha,\mu)$. Если предположить, что $k_1<k_2$, то могут быть выделены интервалы $(0,k_1),(k_1,k_2),(k_2,\infty)$, определяющие поведение оптимального решения k.

Анализ поведения решения $k(t)$ позволяет сделать вывод, что существует одна точка неустойчивого равновесия $k_1(\alpha,\mu)$, и две точки устойчивого равновесия 0 и $k_2(\alpha,\mu)$. Если начальное значение $k_0=K_0/L_0$ меньше, чем $k_1$, то $K(t)\to 0$ и фирма гибнет. В противном случае, размеры фирмы стабилизируются и стремятся к $k_2(\mu)$, который может рассматриваться как оптимальный размер.

В силу того, что общее аналитическое выражение, для $k(t)$ не удалось получить, рассмотрим, следующие упрощающие предположения: пусть объем выпуска фирмы формируется на основе производственной функции Кобба-Дугласа:

$$F(K(t),L(t))=AK(t)^{\eta}L(t)^{1-\eta} \quad (26)$$

и пусть задана предельная норма замещения трудовых ресурсов капиталом. Для функции Кобба-Дугласа она имеет вид:

$$b=\frac{(1-\eta)K}{\eta L}. \quad (27)$$

С учетом этих предположений уравнение (25) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{dK(t)}{dt}+(W_{\alpha v}+C_m)\frac{(1-\eta)K(t)}{\eta b}+\\ +(\gamma+\delta+\pi_c-(1-\beta)\chi l)K(t)+\\ +(v-(1-\mu)(1-\rho_1))A\frac{(1-\eta)K(t)}{\eta b}\times\\ \times\left(\frac{\eta b}{(1-\eta)}\right)^{\eta}+v_0-(1-\beta)\chi_0 l_0=0.\end{aligned} \quad (28)$$

Вводя далее следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\xi=((1-\mu)(1-\rho_1)-v)\times\\ \times(1-\eta)/(\eta b)(\eta b/(1-\eta))^{\eta}+(1-\beta)\chi l-\\ -(\gamma+\delta+\pi_C)-(W_{\alpha v}+C_m)(1-\eta)/\eta b;\\ C=(1-\beta)\chi_0 l_0-v_0\end{aligned} \quad (29)$$

уравнение (28) запишем в виде:

$$\frac{dK(t)}{dt}-\xi K(t)-C=0.$$

Считаем, что мы рассматриваем промежуток времени, в течение которого величины $\xi$ и $C$ не зависят от времени $t$. В этом случае будем иметь неоднородное дифференциальное уравнение относительно фазовой переменной $K(t)$ с начальным условием $K(0)=K_0$:

$$\begin{cases}\dfrac{dK(t)}{dt}-\xi K(t)-C=0\\ K(0)=K_0\end{cases} \quad (30)$$

Решая систему (30), получаем численное выражение для величины капитала фирмы: $K(t)=K_0e^{\xi t}+C(e^{\xi t}-1)/\xi$, при выполнении (29). Следует заметить, что проведенный выше анализ задачи (4)–(6) позволяет сделать следующий вывод.

Пусть функционирование некоторого экономического объекта описывается соотношениями (6)–(8), причем производственная задача объекта формируется в виде функции Кобба-Дугласа, а функция заимствования определена в виде соотношения (5). Тогда величина капитала, рассматриваемого экономического объекта в момент времени $t$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}K(t)=K_0e^{\xi t}+C(e^{\xi t}-1)/\xi;\\ \xi=((1-\mu)(1-\rho_1)-v)\times\\ \times(1-\eta)/(\eta b)(\eta b/(1-\eta))^{\eta}+(1-\beta)\chi l-\\ -(\gamma+\delta+\pi_C)-(W_{\alpha v}+C_m)(1-\eta)/\eta b;\\ C=(1-\beta)\chi_0 l_0-v_0;\ K(0)=K_0.\end{aligned} \quad (31)$$

Соотношение (31) имеет довольно широкое применение.

Во-первых, оно может быть использовано для оценки изменения величины капитала фирмы за исследуемый промежуток времени $[t_0, T]$, причем, варьируя управляющими параметрами $\mu, W_{\alpha v}, b, C_m, \gamma$, можно выбрать целесообразную траекторию роста капитала анализируемого экономического объекта. Это возможно сделать, используя следующую оптимизационную задачу:

$$Z = (\lambda_1(1-\mu)R(T) + \lambda_2(\mu R(T) + \\ +W_M))e^{-rt} \to \max;$$

$$\begin{cases} K(t) = K_0 e^{\xi t} + C(e^{\xi t} - 1)/\xi; \\ \xi = ((1-\mu)(1-\rho_1) - v)(1-\eta)/(\eta b) \times \\ \times(\eta b/(1-\eta))^{\eta} + (1-\beta)\chi l - \\ -(\gamma + \delta + \pi_C) - (W_{\alpha v} + C_m)(1-\eta)/\eta b; \\ C = (1-\beta)\chi_0 l_0 - v_0; \\ 0 \le \mu \le \overline{\mu}, \\ \underline{W_{\alpha v}} \le W_{\alpha v} \le \overline{W}_{\alpha v}, \\ \underline{b} \le b \le \overline{b}; \\ K(0) = K_0. \end{cases}$$

Данная задача обеспечивает выбор траектории развития фирмы, обеспечивающей переход фирмы к режиму устойчивого роста. Во-вторых, можно исследовать величину изменения части параметров при остальных фиксированных. Это можно сделать следующим образом:

Величину трудовых ресурсов фирмы можно определить, опираясь на соотношение (31) и на предположение о том, что норма замещения (27) зафиксирована

$$L(t) = \frac{(1-\eta)}{\eta b} K(t) = \\ = \frac{(1-\eta)}{\eta b}\left[K_0 e^{\xi t} + C(e^{\xi t} - 1)/\xi\right]. \tag{32}$$

Величину объема выпуска фирмы, рассчитываемой на основе выбора производственной функции, например, Кобба-Дугласа, а также соотношений (31) и (32)

$$R(t) = AK(t)^{\eta} L(t)^{1-\eta} = \\ = AK(t)^{\eta}\left(\frac{(1-\eta)}{\eta b}\right)^{1-\eta}(K(t)^{\eta})^{1-\eta} = \\ = A\left(\frac{(1-\eta)}{\eta b}\right)^{1-\eta} K(t) \tag{33}$$

Выявления зависимости изменения величины $K_t$ от изменения $\mu_1, .., \mu_n$.

Экспериментальные расчеты, проведенные на основе данных и условий работы одного из банков Воронежа, позволили рассчитать оптимальное значение $\mu = 0,001$ и оптимальную траекторию развития банка для $t \in [1, 5]$. Результаты расчетов приведены в следующей таблице.

Таким образом, результаты проведенных расчетов позволяют составить прогноз развития экономического объекта, обладающего заданными характеристиками, за необходимый промежуток времени и выявить такой уровень управляющих параметров, который обеспечит эффективное развитие фирмы и поможет осуществить сопряжение интересов собственников и управляющего.

Таблица

*Показатели функционирования банка*

| Параметры управления | | | Результаты расчетов показателей функционирования фирмы в момент времени $t = 5$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $b$ | $W_{av}$ | $K(5)$ | $L(5)$ | $R(5)$ | $\alpha I(5) + (1-\alpha)R(5)$, $\alpha = 0,4$ |
| 0,005 | 22750 | 10000 | 61481375 | 900 | 5704396 | 3456216 |
| 0,001 | 22750 | 10000 | 61503786 | 901 | 5729680 | 3462277* |
| 0,0009 | 22750 | 10000 | 61504346 | 901 | 5729719 | 3462071 |
| 0,00001 | 22750 | 10000 | 61508830 | 901 | 5730032 | 3460221 |

* – наилучший вариант выбора параметров управления

Здесь $I(5) = 0,01K(5) + 300L(5)$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных расчетов позволяют составить траекторию развития экономического объекта, способного достичь желательных характеристик, за необходимый промежуток времени и выявить такой уровень управляющих параметров, который обеспечит эффективное развитие фирмы и поможет осуществить сопряжение интересов собственников фирмы и ее управляющего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мишурова И.В.* Управление мотивацией персонала / И.В. Мишурова, П.В. Кутелев. – М. : ИКЦ Март, 2003. – 344 с.

2. *Лахтин Г.А.* Управление в организации и мотивации персонала / Г.А. Лахтин. – М. : Наука, 2002. – 254 с.

3. *Каралев А.П.* Моделирование математического стимулирования / А.П. Каралев. – М. : ИНФРА-М, 1999. – 388 с.

4. *Новиков Д.А.* Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели) / Д.А. Новиков. – М. : ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

5. *Баева Н.Б.* Математические методы поддержки процессов регулирования в сфере реализации продукции сложных экономических систем / Н.Б. Баева, Н.А. Жданкина // Вестник ВГУ. Сер. Моделирование и оптимизация в автоматизировании сложных систем, 2002. – 252 с.

6. *Яновский Л.П.* Динамическая модель выживания крупной фирмы с рентоориентированным менеджментом / Л.П. Яновский // Экономика и математические методы. – 2000. – Т. 36, № 2. – С. 34–38.

**Баева Нина Борисовна** – доцент кафедры ММИО факультета ПММ ВГУ, тел. раб. (4732) 208-282

**Чернышова Наталья Александровна** – соискатель кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ ВГУ, тел. раб. (4732) 208-282

**Baeva Nina Borisovna** – Associate Professor, the department of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282.

**Chernishova Natalia Aleksandrovna** – Post-graduate student, the department of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282.