УДК 519.81

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Е. М. Мелькумова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.09.2010 г.

Аннотация. Результаты исследований задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Для эффективного решения такой задачи необходимо в первую очередь построить многокритериальную математическую модель, которую затем нужно оптимизировать, предварительно выбрав наиболее подходящий для этого метод.
В статье изучен один из подходов к решению задачи многокритериальной оптимизации – принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению, и рассматривается многокритериальная задача линейного программирования, которая решается с помощью этого метода.
Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, многокритериальная задача линейного программирования, область компромиссов, принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению, вектор идеального значения целевой функции.
Annotation. Research results of management and planning problems show that in real statement these problems are multicriterion. For effective solution to these problems it is necessary to construct multicriterion mathematical model and then it is necessary to optimize it, beforehand selecting the most appropriate method for this purpose.
This article research co-approach for the multicriterion linear programming problem – principle of all location criterion approximation to the ideal solution. With the help of this method the multicriterion linear programming problem solution is considered.
Key words: multicriterion optimization, multicriterion linear programming problem, region of compromise, principle of all location criterion approximation to the ideal solution, ideal value vector of objective function.

Результаты исследований задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Ранее, при исследовании проблемы многокритериальности часто все критерии, кроме одного, выбранного доминирующим, принимались в качестве ограничений, а оптимизация проводилась по доминирующему критерию. Такой подход к решению практических задач значительно снижает эффективность принимаемых решений. В данной статье приводится общая постановка задачи многокритериальной оптимизации и подход к ее решению.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача многокритериального математического программирования имеет вид:

$$\begin{gathered} f_1 \to \max, \\ f_2 \to \max, \\ \dots \\ f_k \to \max, \\ x \in X, \end{gathered}$$

при $x = (x_1, .., x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}$, где X – множество допустимых значений переменной x, k – число целевых функций (критериев), max означает, что данный критерий нужно максимизировать.

По существу многокритериальная задача отличается от обычной задачи оптимизации только наличием нескольких целевых функций вместо одной.

В задачах выбора решения, формализуемых в виде модели векторной оптимизации, первым естественным шагом следует считать выделение области компромиссов – решений, оптимальных по Парето.

Вектор $x \in X$ называется *оптимальным по Парето решением*, если не существует $x^0 \in X$ такого, что выполнены неравенства $f(x^0) \geq f(x)$ и $f(x^0) \neq f(x)$.

Областью компромиссов называется подмножество допустимого множества решений X, обладающего тем свойством, что все принадлежащие ему решения не могут быть улучшены одновременно по всем локальным критериям [1].

Оптимальное решение, выбираемое на основе многокритериального подхода, независимо от избираемого принципа оптимальности, всегда должно принадлежать области компромиссов. Иначе оно может быть улучшено и, следовательно, не является оптимальным. Таким образом, область компромиссов есть область потенциально оптимальных компромиссов. Отсюда следует, что при выборе решения по векторному критерию эффективности можно ограничить поиск оптимального решения областью компромиссов, которая, как правило, значительно уже всей области возможных решений X.

ПРИНЦИП ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО ВСЕМ ЛОКАЛЬНЫМ КРИТЕРИЯМ К ИДЕАЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ

В основу данного метода положена идея приближения по всем критериям [2].

Пусть дана задача многокритериального программирования

$$\begin{gathered} f_1 \to \max, \\ f_2 \to \max, \\ \ldots \\ f_k \to \max, (1) \\ x \in X \end{gathered} \tag{1}$$

и заданы граничные условия

$$\begin{gathered} \alpha_{\alpha 1}x_1 + \alpha_{\alpha 2}x_2 + .. + \alpha_{\alpha n}x_n = \\ = b_\alpha (\alpha = \overline{1, r}), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{r+\beta,1}x_1 + \alpha_{r+\beta,2}x_2 + .. + \alpha_{r+\beta,n}x_n \leq \\ \leq b_{r+\beta} (\beta = \overline{1, m-r}), \end{gathered} \tag{3}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, .., x_n \geq 0. \tag{4}$$

Среди решений системы (1–4) требуется отыскать такое значение вектора $x^* = (x_1^*, .., x_n^*)$, которое максимизирует как можно больше критериев.

Рассмотрим каждую отдельную функцию $f_i(x), i = \overline{1, k}$ и решим для нее задачу максимизации. Пусть соответствующие оптимальные планы – это векторы

$$x_i^* = (x_1^*, x_2^*, .., x_n^*), i = \overline{1, k}. \tag{5}$$

На этих оптимальных планах определим значения критериев, получив вектор значений целевых функций на совокупности оптимальных решений

$$f_i^* = (f_i(x_1^*), f_i(x_2^*), .., f_i(x_n^*)). \tag{6}$$

Заметим, что для некоторых задач оптимальные планы могут совпадать, но отличаться значениями целевых функций.

Составим вектор $F^0 = (F_1^0, .., F_k^0)$ такой, что $F_i^0 = f_i^*(x_i^*)$.

F^0 – вектор "идеальных" значений целевых функций. Будем искать такое решение задачи (1–4), которое минимизирует расстояние между вектором $f(x)$, содержащим текущие значения целевых функций, и вектором F^0.

Обозначим квадрат евклидовой нормы вектора $f(x) - F^0$, определенного для всех $x \in \Omega$ через

$$R(x) = || f(x) - F^0 ||^2 . \tag{7}$$

Поставленная задача теперь сформулируется так: дана система целевых функций (1) и даны условия задачи (2–4). Требуется определить точку $x \in \Omega$, в которой функция $R(x)$ достигает своего минимума.

Таким образом, отыскание оптимального плана $x^* \in \Omega$ в данной задаче сведено к оптимизации выражения (7) на множестве решений системы линейных неравенств (2–4). Поскольку выражение (7) представляет собой квадратичную функцию переменных $x_1, .., x_n$, то задача отыскания x^* свелась к задаче выпуклого программирования.

Задана выпуклая функция $R(x)$, определенная на множестве $X \in \Omega$. Требуется отыскать точку $x^* \in \Omega$, обеспечивающую выполнение условия $R(x^*) = \min_x R(x), x \in \Omega$.

Таким образом, алгоритм решения задачи (2–4) состоит из двух основных этапов: на первом осуществляется максимизация $F_i(x), i = \overline{1, k}$, а на втором – минимизация $R(x)$.

Рассмотрим применение данного метода к решению следующей задачи математического программирования.

Задан набор целевых функций

$$f_1(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$f_2(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$f_3(x) = 3x_1 + 9x_2 \to \max,$$
$$f_4(x) = 8x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$f_5(x) = 4x_1 - x_2 \to \max, \quad (8)$$
$$f_6(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \max,$$
$$f_7(x) = -2x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$f_8(x) = -3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$f_9(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \max.$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ &-x_1 + 3x_2 \le 9, \\ &2x_1 - x_2 \le 10, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо найти оптимальный план x^*.

Сначала решим задачу математического программирования с данными граничными условиями (9) и каждой целевой функцией, взятой в отдельности. Результат решения имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1^* = (6,2) \Rightarrow f_1(x_1^*) = 28, \\ &x_2^* = (3,4) \Rightarrow f_2(x_2^*) = 22, \\ &x_3^* = (3,4) \Rightarrow f_3(x_3^*) = 45, \\ &x_4^* = (6,2) \Rightarrow f_4(x_4^*) = 52, \\ &x_5^* = (6,2) \Rightarrow f_5(x_5^*) = 22, \\ &x_6^* = (5,0) \Rightarrow f_6(x_6^*) = 15, \\ &x_7^* = (0,3) \Rightarrow f_7(x_7^*) = 12, \\ &x_8^* = (0,3) \Rightarrow f_8(x_8^*) = 3, \\ &x_9^* = (0,0) \Rightarrow f_9(x_9^*) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получаем два вектора

$$X_i^* = \{(6,2),(3,4),(3,4),$$
$$(6,2),(6,2),(5,0),(0,3),(0,3),(0,0)\}. \quad (11)$$

$$f_i^* = \{28,22,45,52,22,15,12,3,0\}. \quad (12)$$

$$R(x) = || f(x) - F^0 ||^2 .$$

В качестве нормы (7) рассмотрим евклидово расстояние. Тогда имеем следующую задачу оптимизации

$$R(x) = ((4x_1 + 2x_2) - 28)^2 +$$
$$+((2x_1 + 4x_2) - 22)^2 + ((3x_1 + 9x_2) -$$
$$-45)^2 + ((8x_1 + 2x_2) - 52)^2 +$$
$$+((4x_1 - x_2) - 22)^2 + ((3x_1 - 2x_2) -$$
$$-15)^2 + ((-2x_1 + 4x_2) - 12)^2 +$$
$$+((-3x_1 + x_2) - 3)^2 + ((-4x_1 -$$
$$-3x_2) - 0)^2 \to \min.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим задачу выпуклого программирования

$$R(x) = 147x_1^2 + 133x_2^2 + 92x_1x_2 -$$
$$-1614x_1 - 1236x_2 + 6859 \to \min. \quad (13)$$

Решая данную задачу выпуклого программирования средствами EXCEL, получим в качестве решения точку

$$x^* = (4.4965, 3.0023).$$

Значение $R(x)$ при этом равно 1303.748. Стоит отметить, что находя значения $R(x)$ в точках, полученных в задачах одноцелевой оптимизации, получим следующий результат, приведенный в таблице:

Таблица

x	$R(x)$
$x = (6,2)$	1631
$x = (3,4)$	1628
$x = (5,0)$	2464
$x = (0,3)$	4348
$x = (0,0)$	6859
$x^* = (4.4965, 3.0023)$	1303.748

Таким образом, видно, что точка, полученная с помощью принципа приближения по всем локальным критериям к идеальному решению, является более оптимальной.

Возможна ситуация, когда все целевые функции имеют определенную степень важности. Тогда эти коэффициенты важности учитываются при вычислении $R(x)$, после чего $R(x)$ также минимизируется.

В статье изучен один из подходов к решению задачи многокритериальной оптимизации – принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению, и рассматривается многокритериальная задача линейного программирования, которая решается с помощью этого метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. Нечеткая оптимизация / Ю. П. Зайченко. – К. : Выща Школа, 1991 – 191 с.

2. *Борисов А. Н.* Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркурьева, Н. Н. Слядзь, В. И. Глушков. – М. : Радио и связь, 1989. – 303 с.

Мелькумова Екатерина Михайловна – аспирант факультета ПММ каф. Математических методов исследования операций, Воронежский госуниверситет. Тел. (4732)208-282. E-mail: pmim@yandex.ru.

Melcumova Ekaterina Michailovna – the post-graduate student at the faculty of Applied Mathematics, informatics and mechanics of the dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282. E-mail: pmim@yandex.ru.