УДК 517.518

ПОСТРОЕНИЕ ЗАТУХАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧЕ

С. П. Зубова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 17.11.2010 г.

Аннотация: Для линейной стационарной системы управления с условиями прохождения траектории системы через контрольные точки и дополнительными условиями на управление в контрольных точках строятся функции управления и состояния в виде функций, убывающих на бесконечности.
Ключевые слова: система управления, контрольные точки, условия на управление, построение убывающих управления и состояния.
Abstract: Linear time-invariant control system are considered. Trajectory of the system pass throw the control points. Added conditions for control points are given.
The control and state functions in the form of functions decreasing at infinity are constructed.
Key words: control system, control points, conditions for control, construction of control and state decreasing with the time.

1.ВВЕДЕНИЕ

Динамическая система *полностью управляема* при $t \in [0, \infty)$, если под воздействием некоторого управляющего фактора (управления) она может быть переведена из произвольного начального состояния в любое конечное состояние за любой ограниченный промежуток времени.

Для динамической системы, описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) = \square x(t) + \square u(t), \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^k$; A, B — матрицы соответствующих размеров, $t \in [0, T]$ требуется найти *управление* $u(t)$, при действии которого *вектор состояний* системы $x(t)$ (*траектория* системы, *движение* системы) удовлетворяет уравнению (1) и условиям

$$x(0) = x_0,$$
$$x(T) = x_T,$$
$$\forall x_0, x_T \in R^n.$$

Постановка этой задачи и один из критериев управляемости системы (1) принадлежит Р. Калману [1]. Получено большое количество критериев полной управляемости системы (1), только лишь в [2] для случая $m = 1$ приводится 16 эквивалентных критериев.

Методов же построения $u(t)$ явно недостаточно.

В [3] и др. для системы (1) функция $u(t)$ построена в виде:

$$u(t) = B^* e^{tA^*} \times$$
$$\times (\int_0^T e^{-sA} BB^* e^{sA^*} ds)^{-1} (e^{-TA} x^T - x^0),$$

где * — знак сопряжения).

В работе [4] управляющая функция строится в виде

$$u(t) = B_p^+ e^{tA_p} P_r(t),$$

где $P_r(t)$ — многочлен по степеням t, матрицы B_p^+, A_p описаны в работе [5]. Построение функции $u(t)$ по этим формулам и исследование ее на практике весьма затруднительно.

В работе [5] разработан метод построения $u(t)$ и $x(t)$ в виде многочленов по степеням t с векторными коэффициентами, в работе [6] найдены $u(t)$ и $x(t)$ в полиномиальном виде для задачи с контрольными точками. Краевые условия здесь расширяются следующим образом:

$$x(t_i) = x_i^{00}, \quad i = \overline{0, m+1}, \qquad (2)$$

$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, $m \in N$, $\forall x_i \in R^n$, то есть система должна быть «в нужное время в нужном месте».

В настоящей работе к условиям (2) добавлено требование

$$D_j u\Big|_{t_i} = u_i^{\,j},\quad j = \overline{0, r_i},\quad r_i \in N \tag{3}$$

с произвольными значениями $u_i^{\,j} \in R^k$. Здесь $D_j(\cdot)$ — производная по t порядка j. То есть в точках t_i контролируются и значения управления, и скорость изменения управления, и так далее.

Такие задачи возникают при нахождении управления динамической системой с условием прохождения траектории системы через контрольные точки (t_i, x_i^{00}) и контроле за управлением в моменты t_i. Например, в задачах о движении объектов с мягкой стыковкой, в задачах безударной стыковки различных режимов в технологических процессах.

К примеру, движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием реактивной силы описывается уравнением Мещерского, приводящемся к виду (1). Пусть за время $[0, T]$ требуется перевести точку из состояния x_0 в состояние x_2 управлением, действующим лишь на $[0, t_1]$, $0 < t_1 < T$, и так, чтобы и управление, и траектория были гладкими. То есть требуется найти дифференцируемую на $[0, T]$ вектор-функцию

$$u(t) = \begin{cases} \upsilon(t), & t \in [0, t_1], \\ 0, & t \in [t_1, T], \end{cases}$$

удовлетворяющую условию

$$D_j \upsilon\Big|_{t_1} = 0,\quad j = 0,1$$

при подстановке которой в уравнение (1) решение $x(t)$ этого уравнения удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$, $x(T) = x_2$.

Для решения этой задачи следует найти значение $x(t_1)$ такое, что решение уравнения (1) на $[t_1, T]$ при $u(t) \equiv 0$ принимает при $t = T$ значение x_2. Это $x(t_1) = e^{(t_1 - T)A} x_2$. Затем решить задачу управления на $[0, t_1]$, где $u(t) = \upsilon(t)$, с условиями $x(0) = x_0$, $x(t_1) = e^{(t_1 - T)A} x_2$. Если $\upsilon(t)$ – гладкая вектор-функция, то $u(t)$, благодаря условию на $\upsilon(t)$, гладкая вектор-функция, тогда и $x(t)$ гладкая вектор-функция.

Вторая проблема, которая затрагивается в данной работе – случай «невыключения» системы в конечный момент времени T. Если в конечной точке не осуществилось переключение режимов, то полиномиальная функция стремится к бесконечности при $t \to \infty$, а тригонометрическая функция будет периодической с постоянной амплитудой. Правильная дробно-рациональная функция (степень числителя меньше степени знаменателя) свободна от этих недостатков, при $t \to \infty$ она стремится к нулю [7].

В задачах оптимального управления найденное оптимальное управление не всегда может быть реализовано на практике (например, в силу его разрывности), и его можно заменить близким непрерывным дробно- рациональным управлением. Для этого достаточно взять определенное количество точек, через которые проходит теоретически найденная оптимальная управляющая функция, и построить дробно-рациональную функцию управления, проходящую через эти точки.

Можно также находить оптимальное управление в классе дробно-рациональных функций. Для этого достаточно взять дробно-рациональную функцию, в числителе которой многочлен большей степени, чем необходимо для нахождения управления. Построенная управляющая функция будет зависеть от дополнительных параметров, затем исследовать на экстремум по этим параметрам минимизирующий функционал, рассматриваемый в задаче оптимального управления.

Управление в виде дробно-рациональной функции построено в [7] для достаточно частной задачи.

В данной работе дробно-рациональные функции управления и состояния системы (1) с условиями (2), (3) строятся в более простом, чем в [7] виде за счёт выбора другой формы знаменателя.

2.ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Заметим, что от условий (2) и (3) можно перейти к эквивалентным условиям

$$\dot{x}(t_i) = x_i^{01},\quad D_j x(t_i) = x_i^{0j}, \tag{4}$$

где

$$x_i^{01} = Ax(t_i) + Bu(t_i) = Ax_i^{00} + Bu_i^0,$$
$$x_i^{0j} = AD_{j-1}x(t_i) + D_{j-1}u(t_i),$$
$$i = \overline{0, m+1},$$
$$j = \overline{0, r_i + 1}.$$

Для построения дробно-рационального управления $u(t)$ системы (1) и состояния $x(t)$, удовлетворяющего условиям (4), используются следующие факты.

Ф. 1. Если $G \in L(R^l, R^k)$, то имеют место разложения

$$\begin{aligned} R^l &= CoimG \dotplus KerG, \\ R^k &= ImG \dotplus CokerG. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь и далее обозначено: $P(G)$ и $Q(G)$ – проекторы на $KerG$ и $CokerG$ соответственно, отвечающие разложениям (5), $G^- = \tilde{G}^{-1}(I - Q(G))$, $\tilde{G}$ — сужение G на $CoimG$, I — единичная матрица в соответствующем пространстве. Матрица G^- называется полуобратной матрицей (отображения и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково).

Ф. 2. Уравнение

$$Gv = w \tag{6}$$

имеет решение v тогда и только тогда, когда

$$Q(G)w = 0. \tag{7}$$

При выполнении этого условия

$$v = G^- w + P(G)v, \tag{8}$$

где $P(G)v$ — произвольная вектор-функция из $KerG$.

Таким образом, соотношение (6) эквивалентно системе (7), (8).

Ф. 3. Лемма. *Существует правильная дробно-рациональная вектор-функция в* R^n

$$\upsilon(t) = \frac{P_p(t)}{(t+T)^{p+1}},$$

удовлетворяющая условиям

$$D_j \upsilon(t_i) = \upsilon_i^j, \quad j = \overline{0, \nu_i}; \quad i = \overline{0, m+1},$$

где $P_p(t) = \sum\limits_{s=0}^{p} \alpha_s t^s$, $\alpha_s \in R^n$, $p = m + \nu + 1$, $\nu = \sum\limits_{i=0}^{m+1} \nu_i$, υ_i^j — произвольные элементы из R^n.

Доказательство леммы состоит в доказательстве существования соответствующих коэффициентов α_s.

Коэффициенты α_s, $s = \overline{0, \nu_o}$ находятся из условий $D_j \upsilon(0) = \upsilon_0^j$ следующим образом. Из условия

$$\upsilon(0) = \frac{\alpha_0}{T^{p+1}} \upsilon_0^j$$

находится α_0. Далее:

$$D_1 \upsilon(t) = (D_1 P_p(t))(t+T)^{-p-1} + P_p(t)(-p-1)(t+T)^{-p-2},$$

следовательно,

$$D_1 \upsilon(0) = \frac{\alpha_1}{T^p} - \frac{\alpha_0(p+1)}{T^{p+2}} = \upsilon_0^1,$$

откуда находится α_1, и так далее. Получаем:

$$P_p(t)\upsilon(0) = P_{\nu_0}(t) + \sum_{s=\nu_0+1}^{p} \alpha_s t^s$$

с известным многочленом $P_{\nu_0}(t) = \sum\limits_{s=0}^{\nu_0} \alpha_s t^s$. Условие $\upsilon(t_i) = \upsilon_i^0$ дает

$$\sum_{s=\nu_0+1}^{p} \alpha_s t^s = b_i^0,$$

где $b_i^0 = \upsilon_i^0 (t_i + T)^{p+1} - P_{\nu_0}(t_i)$.

Из условия $D\upsilon(t_i) = \upsilon_i^1$ находим

$$\sum_{s=\nu_0+1}^{p} s\alpha_s t^s = b_i^1,$$

где

$$b_i^1 = \upsilon_i^1 (t_i + T)^{p+1} + (p+1)\frac{P_{\nu_0}(t_i) + b_i^0}{t_i + T} - DP_{\nu_0}(t_i).$$

Остальные условия $D_j \upsilon(t_i) = \upsilon_i^j$ при $j = \overline{2, \nu_i}$, дают:

$$\sum_{s=\nu_0+1}^{p} D_j \alpha_s t_i^s = b_i^j \tag{9}$$

с известными векторами b_i^j. Пусть $\alpha_s = (\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{ns})$, $\beta_i^j = (\beta_{1i}^j, \beta_{2i}^j, \ldots, \beta_{ni}^j)$; α_{ks}, $\beta_{ki}^j \in R^1$; $k = \overline{1, n}$.

Система (9) распадается на n систем

$$\sum_{s=\nu_0+1}^{p} D_j \alpha_{ks} t_i^s = b_{ki}^j, \quad k = \overline{1, n}.$$

Элементы определителя системы (9) для каждого k и i образуют ν_{i+1} строк определителя Вронского для функций $t^{\nu_0+1}, t^{\nu_0+2}, \ldots, t^p$ в точке t_i. Этот определитель отличен от 0, и из системы (9) находятся коэффициенты α_s, $s = \overline{\nu_0 + 1, p}$. Таким образом, строится функция $\upsilon(t)$. Лемма доказана.

Перейдем к решению системы (1). Соотношение (1) в силу Ф. 2 при $G = B$ эквивалентно системе

$$u(t) = B^- \dot{x}(t) - B^- Ax(t) + P(B)u(t), \tag{10}$$

$$x(t) = Q(B)x(t) + (I - Q(B))x(t), \tag{11}$$

$$Q(B)\dot{x}(t) = Q(B)A\,Q(B)(Q(B)x(t)) + \\ +Q(B)A(I - Q(B))(I - Q(B))x(t), \quad (12)$$

где $P(B)u(t)$ — произвольная вектор-функция из $KerB$.

В результате обозначений

$$x(t) = x^0(t),$$
$$u(t) = u^0(t),$$
$$Q(B)x(t) = x^1(t),$$
$$(I - Q(B))x(t) = u^1(t),$$
$$Q(B)A\,Q(B) = A_1,$$
$$Q(B)A(I - Q(B)) = B_1$$

приходим от (12) к уравнению

$$\dot{x}^1(t) = A_1x^1(t) + B_1u^1(t)$$

с условиями

$$D_jx^1(t_i) = Q(B)Ax^0(t_i) = (des) = x_i^{1j},$$
$$i = \overline{0, m+1},$$
$$j = \overline{0, r_i + 1}.$$

(символ « $= (des) =$ » читается «обозначим»).

Последнее уравнение имеет вид вполне аналогичный виду исходного уравнения (1), но $x^1(t)$ и $u^1(t)$ принадлежат пространствам $CokerB$ и ImB, имеющим не большие размерности, чем R^n и R^k. К этому уравнению снова применим **Ф. 2** с $G = B_1$ и так далее.

В работе [1] доказано, что уравнение (1) эквивалентно системе

$$u^s(t) = B_s^-\dot{x}^s(t) - \\ -B_s^-A_sx^s(t) + P(B_s)u^s(t), \quad (13)$$

$$x^s(t) = x^{s+1}(t) + u^{s+1}(t), \quad (14)$$

$$\dot{x}^p(t) = A_px^p(t) + B_pu^p(t), \\ s = \overline{0, p-1}, \quad (15)$$

с произвольными вектор-функциями $P(B_s)u^s(t)$ из $KerB$. Здесь

$$x^s(t) = Q(B_{s-1})x^{s-1}(t),$$
$$u^s(t) = (I - Q(B_{s-1}))x^{s-1}(t),$$
$$A_s = Q(B_{s-1})A_{s-1}Q(B_{s-1}),$$
$$B_s = Q(B_{s-1})A_{s-1}(I - Q(B_{s-1}))$$

число p таково, что B_p — сюръективная матрица ($Q(B_p) = \{0\}$).

Заметим, что число p обладает свойством:

$$rank(B\,AB...A^{p-1}B) < n,$$

но

$$rank(B\,AB...A^pB) = n$$

Справедлива

Теорема. *Система* (1) *с условиями* (4) *эквивалентна системе* (13—15) *с условиями*

$$D_jx^q(t_i) = x_i^{qj}, \quad (16)$$

$$D_jP(B_s)u^s(t_i) = \\ = P(B_s)(I - Q(B_{s-1}))x_i^{s-1j} \quad (17)$$

где $s = \overline{1, p}$, $j = \overline{0, r_i + p + 2}$.

3. МЕТОДИКА

Через $S_k(t)$ будем обозначать многочлен по степеням t порядка k с векторными коэффициентами.

Для построения $x(t)$ и $u(t)$ следует теперь взять $x^p(t)$ в виде дробно- рациональной функции, удовлетворяющей условиям (16). Это функция вида

$$x^p(t) = \frac{S_{r+(p+1)(m+1)}(t)}{(t+T)^{r+(p+1)(m+2)+1}},$$
$$r = \sum_{i=0}^{m+1} r_i.$$

Из соотношения (13) найти $u^p(t)$:

$$u^p(t) = B_p^-\dot{x}^p(t) - \\ -B_p^-A_px^p(t) + P(B_p)u^p(t),$$

где в качестве $P(B_p)u^p(t)$ взять дробно-рациональную вектор-функцию, удовлетворяющую условиям (17) при $s = p$:

$$u^p(t) = \frac{S_{r+(p+1)(m+2)}(t)}{(t+T)^{r+(p+1)(m+2)+2}}.$$

Получим дробно-рациональные функции $x^p(t)$ и $u^p(t)$. В сумме они в силу (14) при $s = p-1$ дают $x^{p-1}(t)$. Затем по формуле (13) при $s = p-1$ строится $u^{p-1}(t)$ с дробно-рациональной функцией $P(B_{p-1})u^{p-1}(t)$, удовлетворяющей условиям (17). Сумма $x^{p-1}(t) + u^{p-1}(t)$ — это $x^{p-2}(t)$ и так далее.

Таким образом, будут построены $x(t)$ и $u(t)$ виде:

$$x(t) = \frac{S_{r+(p+1)(m+2)}(t)}{(t+T)^{r+(p+1)(m+2)+p+1}},$$

$$u(t) = \frac{S_{r+(p+1)(m+2)}(t)}{(t+T)^{r+(p+1)(m+3)+1}},$$

с многочленами $S_{r+(p+1)(m+2)}(t)$ порядка $r + (p+1)(m+2)$ по степеням t с векторными коэффициентами из R^n и R^k соответственно. Это гладкие вектор-функции, стремящиеся к 0 при $t \to \infty$.

Пример. Построим дробно-рациональное управление и состояние системы

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 - x_3 + u_1 + u_2,\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2,\\ \dot{x}_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 + u_2,\\ t \in [0, T]\end{gathered} \tag{18}$$

с условиями

$$\begin{gathered}x_k(0) = x_{k0}^{00},\\ x_k(t_1) = x_{k1}^{00},\\ x_k(T) = x_{k2}^{00},\\ k = 1,2,3,\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}u_k(0) = u_{k0}^{0},\\ u_k(t_1) = u_{k1}^{0},\\ u_k(T) = u_{k2}^{0},\\ \dot{u}_k(0) = u_{k0}^{1},\\ k = 1,2.\end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $n = 3$, $s = 2$, $m = 1$, $r_0 = 1$, $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $0 < t_1 < T$.

Условия (20) заменим условиями

$$\begin{gathered}\dot{x}_k(0) = x_{k0}^{01},\\ \dot{x}_k(t_1) = x_{k1}^{01},\\ \dot{x}_k(T) = x_{k2}^{01},\\ k = 1,2,3,\\ \ddot{x}_k(0) = x_{k0}^{02},\\ k = 1,2,3,\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}x_{1i}^{01} = x_{1i}^{00} + 5x_{2i}^{00} - x_{3i}^{01} + u_{1i}^{0} + u_{2i}^{0},\\ x_{2i}^{01} = x_{1i}^{00} + x_{2i}^{00},\\ x_{3i}^{01} = x_{1i}^{00} - 2x_{2i}^{00} + x_{3i}^{01} + u_{2i}^{0},\\ i = 0,1,2,\\ x_{10}^{02} = x_{10}^{01} + 5x_{20}^{01} - x_{30}^{01} + u_{10}^{0} + u_{20}^{0},\\ x_{30}^{02} = x_{10}^{01} - 2x_{20}^{01} + x_{30}^{01} + u_{20}^{0}.\end{gathered}$$

Из первого и третьего уравнений системы (18) находим:

$$\begin{gathered}u_2 = \dot{x}_3 - x_1 + 2x_2 - x_3,\\ u_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_3 - 7x_2 + 2x_3.\end{gathered} \tag{21}$$

Второе уравнение системы (18) есть уравнение для нахождения $x_1(t)$:

$$x_1 = \dot{x}_2 - x_2, \tag{22}$$

то есть $p = 1$.

В качестве $x_2(t)$ следует взять дробно-рациональную функцию, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered}x_2(t_i) = x_{2i}^{01},\\ \dot{x}_2(t_i) = x_{2i}^{01},\\ i = 1,2,3;\\ t_0 = 0,\\ t_2 = T,\\ \ddot{x}_2(0) = x_{20}^{12},\\ \dddot{x}_2(0) = x_{20}^{13},\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$x_{20}^{1i}(0) = x_{10}^{0i} + x_{20}^{0i},\ i = 2,3,$$

следовательно,

$$x_2(t) = \frac{S_7(t)}{(t+T)^8}.$$

Полагаем: $S_7(t) = \sum_{s=0}^{7} \alpha_i t^i,\ \alpha_i \in R^3$.

Из условия $x_2(0) = x_{20}^{00}$ получаем: $\frac{\alpha_0}{T^8} = x_{20}^{00}$, откуда

$$\alpha_0 = x_{20}^{00} \cdot T^8 \tag{24}$$

Условие $\dot{x}_2(0) = x_{20}^{01}$ дает:

$$\frac{\dot{S}_7(0)}{T^8} - \frac{8S_7(0)}{T^9} = x_{20}^{01},$$

откуда находим

$$\alpha_1 = 8x_{20}^{00} \cdot T^7 + x_{20}^{01} \cdot T^8. \tag{25}$$

Из условия $\ddot{x}_2(0) = x_{20}^{12}$ получаем

$$\frac{\ddot{S}_7(0)}{T^8} - 16\frac{\dot{S}_7(0)}{T^9} + 72\frac{S_7(0)}{T^{10}} = x_{20}^{01},$$

следовательно,

$$\begin{gathered}\alpha_2 = 28x_{20}^{00} \cdot T^6 +\\ +8x_{20}^{01} \cdot T^7 + 0,5x_{20}^{12} \cdot T^8.\end{gathered} \tag{26}$$

И из условия $\dddot{x}_2(0) = x_{20}^{13}$ находим

$$\begin{gathered}\frac{\dddot{S}_7(0)}{T^8} - 24\frac{\ddot{S}_7(0)}{T^9} +\\ +226\frac{\dot{S}_7(0)}{T^{10}} - 720\frac{S_7(0)}{T^{11}} = x_{20}^{13}.\end{gathered}$$

Из этого равенства получаем

$$\begin{gathered}\alpha_3 = 8x_{20}^{00} \cdot T^5 + 52x_{20}^{01} \cdot T^6 +\\ +4x_{20}^{12} \cdot T^7 + \frac{1}{6}x_{20}^{13} \cdot T^8.\end{gathered} \tag{27}$$

Теперь

$$S_7(t) = \sum_{s=4}^{7} \alpha_s t^s + P_3(t),$$

где $P_3(t) = \sum_{s=0}^{3} \alpha_s t^s$ с коэффициентами α_s, определяемыми формулами (24–27).

Для нахождения коэффициентов α_s, $s = \overline{4,7}$ имеем из (23) условия

$$x_2(t_1) = x_{21}^{00},$$
$$\dot{x}_2(t_1) = x_{21}^{01},$$
$$x_2(T) = x_{22}^{00},$$
$$\dot{x}_2(T) = x_{22}^{01},$$

откуда получаем:

$$\sum_{s=4}^{7} \alpha_s t_1^s = x_{21}^{00}(t_1 + T)^8 - f_3(t_1),$$
$$\sum_{s=4}^{7} s\alpha_s t_1^{s-1} = 8x_{21}^{00}(t_1 + T)^7 +$$
$$+x_{21}^{01}(t_1 + T)^8 - \dot{f}_3(t_1),$$
$$\sum_{s=4}^{7} \alpha_s T^s = x_{22}^{00}(2T)^8 - f_3(T),$$
$$\sum_{s=4}^{7} s\alpha_s T^{s-1} = 8x_{22}^{00}(2T)^7 +$$
$$+x_{22}^{01}(2T)^8 - \dot{f}_3(T).$$

Эти уравнения образуют систему с определителем

$$\begin{vmatrix} t_1^4 & t_1^5 & t_1^6 & t_1^7 \\ 4t_1^3 & 5t_1^4 & 6t_1^5 & 7t_1^6 \\ T^4 & T^5 & T^6 & T^7 \\ 4T^3 & 5T^4 & 6T^5 & 7T^6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, строится $x_2(t)$. Вектор-функция $x_1(t)$ находится из уравнения (22). В качестве $x_3(t)$ можно взять произвольную дробно-рациональную функцию, удовлетворяющую условиям

$$x_3(0) = x_{30}^{00},$$
$$x_3(t_1) = x_{31}^{00},$$
$$x_3(T) = x_{32}^{00},$$
$$\dot{x}_3(0) = x_{30}^{01},$$
$$\dot{x}_3(t_1) = x_{31}^{00},$$
$$\dot{x}_3(T) = x_{32}^{01}.$$

Затем по формулам (21) строится управляющая вектор-функция $u(t)$ в виде

$$u(t) = \frac{S_8(t)}{(t + T)^9}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды I Конгресса ИФАК, М., — 1961. — Т. 2. — С. 521—547.

2. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. — 454 с.

3. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. — 424 с.

4. *Раецкая Е. В.* Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем. Канд. диссерт., Воронеж, 2004.

5. *Зубова С. П., Раецкая Е. В., Лё Хай Чунг.* О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // А и Т, 2008. № 11, С. 41—47.

6. *Зубова С. П., Лё Хай Чунг.* Построение полиномиального управления линейной стационарной системой с контрольными точками и дополнительными ограничениями. Системы управления и информационные технологии, Москва—Воронеж, 2008, № 1.2 (31), С. 225—228.

7. *Шумилов В. Ф.* К проблеме управления плавной стыковкой режимов технологических процессов // А и Т, 2006. № 7 , С. 53—62.

Зубова Светлана Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского государственного университета. Тел.: (4732) 66-60-76, 208-690; e-mail: spzubova@mail.ru

Zubova Svetlana Petrovna – Ph.D, assistant professor, chair of mathematical analysis, Voronezh State University. Tel.: (4732) 66-60-76, 208-690; e-mail: spzubova@mail.ru