УДК 517.11

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ НЕЧЕТКОЙ СИСТЕМЫ

Т. М. Леденева, Е. В. Кочергин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.04.2010 г.

Аннотация. В статье рассматриваются подходы к построению базы правил нечеткой системы, решающей задачу кусочно-линейной аппроксимации.
Ключевые слова: нечеткая система, кусочно-линейная аппроксимация, база правил.

Abstract. The article reviews approaches to building up a rule base for fuzzy system, which solves the problem of piecewise-linear approximation.
Key words: fuzzy system, piecewise-linear approximation, rule base.

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с техникой нечеткого моделирования [1] аппроксимация неизвестной функции осуществляется нечеткой системой, одним из основных компонентов которой является база нечетких правил. Нечеткое правило (или нечеткое продукционное правило) — это, по сути, нечеткое условное высказывание вида

$$R_i: \text{ если } x \text{ есть } A_i, \text{ то } y \text{ есть } B_i,$$

где посылка (условие) x есть A_i и заключение y есть B_i являются нечеткими высказываниями, A_i, B_i — лингвистические значения соответственно входной и выходной переменных. Совокупность нечетких правил $\{R_i\}_{i=\overline{1,N}}$ образует базу правил. Заметим, что в случае причинной связи между входными и выходными переменными $R_i = A_i \to B_i$, где символом $\to$ обозначена импликация, иначе $R_i = A_i \times B_i$.

Актуальная задача разработки нечетких систем — формирование оптимальной базы правил. Как известно, количество правил, используемых для аппроксимации, растет экспоненциально в зависимости от числа входных и выходных переменных. Преодоление быстро растущей размерности возможно при использовании специальных методов, которые решают задачу структурной и параметрической оптимизации базы правил. Цель данной статьи заключается в разработке и исследовании специальных подходов к сокращению количества правил, основанных на следующих предположениях:

а) база правил должна обеспечивать возможность достижения требуемой точности нечеткой модели;

б) модель должна быть «прозрачной» (интуитивно понятной), а число правил, содержащихся в базе, должно быть как можно меньшим.

Указанные свойства нечеткой модели — точность и количество правил — являются взаимоисключающими. При большом числе правил достижение высокой точности модели потенциально является простой задачей, а уменьшение числа правил в общем случае снижает точность.

В статье нами развивается подход, основанный на покрытии графика функции «заплатками» различной формы [1]. Ограничимся случаем единственной входной переменной. Пусть в результате наблюдения поведения неизвестной функции получена совокупность точек $\{(x_k, y_k)\}_{k=\overline{1,K}}$. Применяя к ней алгоритм нечетких средних [3], получим, что каждый кластер может быть описан, например, эллипсоидом (на плоскости эллипсом). Проекция эллипсов на оси позволяет сформировать функции принадлежности для значений входной лингвистической переменной (рис. 1).

Если для выходной переменной это тоже можно сделать, то получим логическую модель нечеткой системы с оптимальным количеством правил. Если это сделать нельзя, то, составив уравнения осей эллипса, получим TS-модель. В рамках данного подхода нами исследовалась возможность замены эллипсоидов гиперпарал-

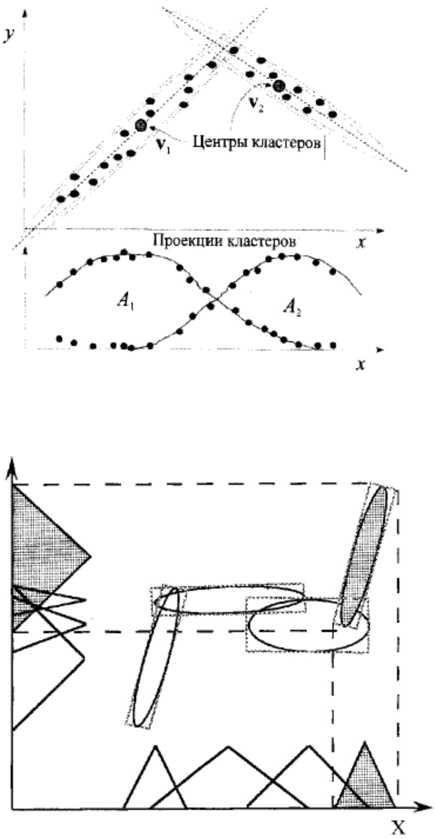


Рис. 1.

лелепипедами (на плоскости — прямоугольниками), что значительно упрощает вычисления. В качестве базового также был выбран метод k-средних. Большое значение для него, а также других, относящихся к этому типу, имеют определение функции расстояния и форма кластера. Слово «средние» в названии метода относится к определению способа формирования центра, который в данном случае называется центром кластера. Центр — точка данных, которая выбирается произвольно, а затем итеративно уточняется, пока не начинает представлять собой среднее всех точек кластера. Для формирования начальных значений процесса кластеризации используется произвольное количество точек (как раз параметр k на это указывает). Выбор начальных центров может осуществляться следующим образом: выбор k точек, максимизирующих начальное расстояние; равномерное распределение k-наблюдений по одной из осей; случайный выбор k точек; выбор первых k точек. В результате формируется начальное разбиение множества точек на кластеры. Затем и далее вычисляются центры кластеров как покоординатные средние, т.е. в виде вектора, компоненты которого представляют собой средние значения одноименных компонент векторов, соответствующих точкам, попавшим в данный кластер. Объекты опять перераспределяются, и процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено одно из условий:

— кластерные центры стабилизировались, т. е. все наблюдения принадлежат кластеру, которому принадлежали до текущей итерации;

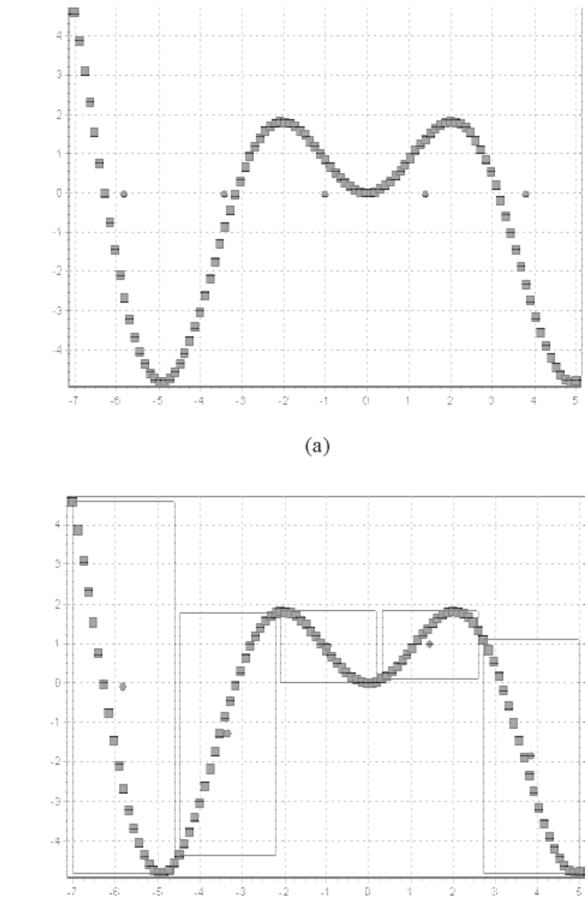
— число итераций равно максимальному числу итераций.

Хотя не существует каких-либо оценок сложности алгоритма, на практике он сходится за достаточно малое число итераций.

В рамках вычислительного эксперимента нами выявлялась степень влияния типов расстояния на количество итераций, позволяющих обеспечить заданную точность. Результаты исследования представлены в табл. 1.

Таблица 1.

№	Функция расстояния	Количество итераций	Особенности
1	$D_{\text{Евклид}}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	7	Расстояние между двумя объектами не изменяется при введении в анализ нового объекта, который может оказаться выбросом; на расстояние могут сильно влиять различия между масштабами осей, по координатам которых вычисляется это расстояние
2	$D_{\text{Спирмена}}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$	7	Сильное влияние оказывают отдельные большие выбросы.
3	$D_{\text{Хемминга}}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^2$	11	Влияние отдельных больших выбросов уменьшается.
4	$D_{\text{Чебышева}}(x,y)=\max_{i=\overline{1,n}}\lvert x_i-y_i\rvert$	Заданный уровень точности за 50 итераций достигнут не был	Расстояния стоит использовать, когда работа осуществляется с объектами, особенно различающимися по какой-либо одной координате.



(а)

(б)

Рис. 2. а) тестовый набор из 1000 точек (функция $f_3(x) = x\sin(x),\ x \in [-7{,}5]$) и начальные кластеры (5), точность равна 0,01; б) аппроксимация, полученная на итерации 10 для $D_{\text{Хемминга}}(x, y)$.

Заметим, что рис. 2б) позволяет сделать вывод о возможности использования «прямоугольных» кластеров. Для кусочно-линейной аппроксимации достаточно взять уравнения диагоналей прямоугольников (на плоскости). Однако, не всякая функция расстояния позволяет получить такое покрытие неизвестной функции. Даже если все удачно складывается по оси абсцисс, т.е. для входной переменной удается сформировать лингвистическую шкалу $\{A_i\}$, может оказаться, что единственно возможным представлением нечеткой системы является TS-модель [2]. Описанный подход положен в основу компьютерной программы (рис. 3), позволяющей построить базу нечетких правил на основе наблюдаемых данных. Программа может быть использована для формирования первоначальной базы правил для аппроксимации неизвестной функции $y = f(x)$ при $n = 1$ (анализ временных рядов). Заметим, что по оси ординат лингвистическую шкалу построить невозможно, поэтому актуализируется TS-модель (ее фрагмент представлен на рис. 4).

Количество правил в базе определяется количеством термов лингвистической шкалы для входной переменной, и может быть значительным. С другой стороны, покрытие неизвестной функции заплатками различной формы можно осуществить иначе, покрывая, например, эллипсами экстремумы (рис. 5).

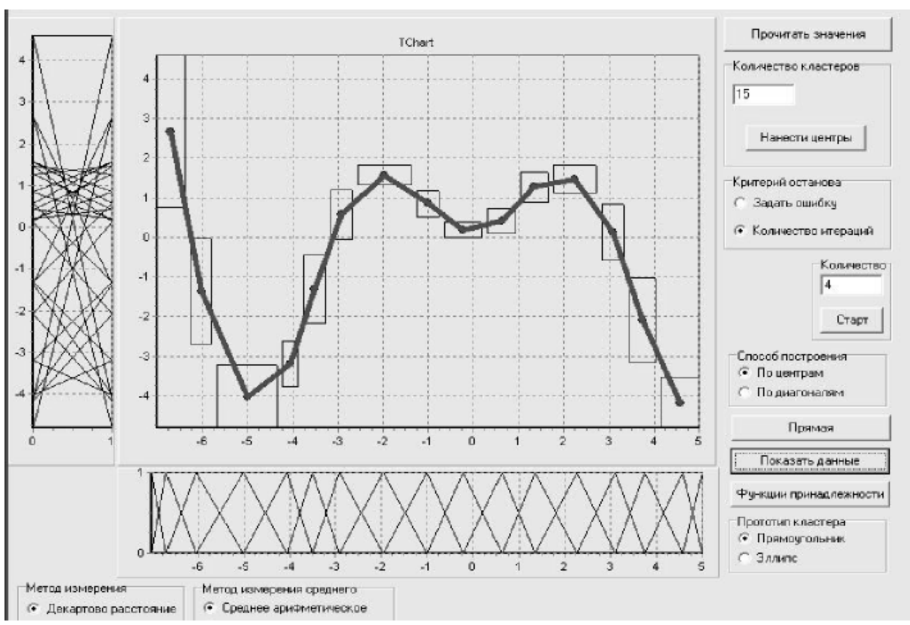


Рис. 3.

R_1 : если x если A_1, то $y = -0,1557x - 7$,
R_2 : если x если A_2, то $y = 0,1795x - 6,28$,

R_3 : если x если A_3, то $y = 0,832x - 5,68$,
R_4 : если x если A_4, то $y = 0,3093x - 4,24$,

R_5 : если x если A_5, то $y = 0,2779x - 3,76$,
R_6 : если x если A_6, то $y = 0,4228x - 3,16...$

Рис. 4.

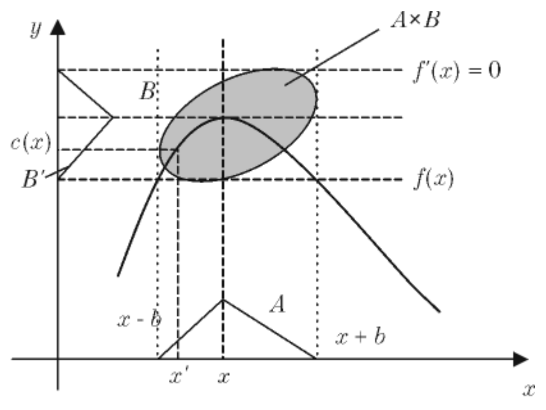


Рис. 5.

В этом случае важно определить центр кластера, а кривая аппроксимируется прямой, соединяющей эти центры.

Основу нечеткого логического вывода составляет схема правильных рассуждений modus ponens

$$\frac{\begin{array}{c}\text{условие если } x \text{ есть } A, \text{ то } y \text{ есть } B\\ \text{факт } x \text{ есть } A'\end{array}}{\text{заключение } y \text{ есть } B'},$$

где A, A', B, B' - нечеткие множества (точнее, нечеткие числа), определяемые своими функциями принадлежности на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Заключение B' определяется по формуле

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

или в терминах функции принадлежности нечетких множеств в виде

$$\forall y \in Y\left(\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)\right\}\right).$$

Если в качестве импликации $\to$ рассматривать $\min$, то получим, что

$$\forall y \in Y\left(\mu_{B'}(y) = \right.$$
$$\left. = \min\left\{\mu_B(y), \sup_{x \in X}\left\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\right\}\right\}\right).$$

Если нечеткое множество A' является синглетоном, то

$$\forall y \in Y\left(\mu_{B'}(y) = \min\left\{\mu_B(y), \mu_A(x)\right\}\right).$$

Естественный подход к сокращению количества правил — это оставить такие заплатки, которые покрывают локальные экстремумы функции $f(x)$. Предположим, что известны точки, в которых $f'(x) = 0$.

Рассмотрим задачу аппроксимации нечеткой системы $F : X \to Y$ некоторой функцией $f : X \to Y$, которая минимизирует среднеквадратическую ошибку аппроксимации

$$E = \int_X \left(f(x) - F(x)\right)^2 dx,$$

где $[u, v]$ — промежуток, на котором осуществляется аппроксимация.

Рассмотрим, каким образом осуществляется аппроксимация с помощью единственного правила

$$\text{если } x \text{ есть } A, \text{ то } y \text{ есть } B,$$

где A, B — нечеткие множества с функциями принадлежности $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$.

Пусть носитель нечеткого множества A определяется в виде $Supp(A) = \Delta = [x - a, x + b] \subset [u, v]$, где $a, b \in \mathbb{R}^+$, форма нечеткого множества при этом не существенна. Будем считать, что функция принадлежности $\mu_B(y)$ является симметричной, тогда B имеет такой же центр тяжести, что и выходное множество B', которое определяется правилом

$$\mu_{B'}(y) = \min\{\mu_B(y), \mu_A(x')\}.$$

От нечеткого множества S к обычному числу можно перейти с помощью методов дефазификации [1]. Самый распространенный подход — использование центра тяжести, который определяется формулой

$$y' = Centr(S) = \frac{\int_{\min}^{\max} x\mu_S(x)dx}{\int_{\min}^{\max} \mu_S(x)dx}.$$

В нашем случае

$$y' = Centr(B') = \frac{\int_Y \mu_A(z)\mu_B(y)ydy}{\int_Y \mu_A(z)\mu_B(y)dy} =$$

$$= \frac{\mu_A(z)\int_Y \mu_B(y)ydy}{\mu_A(z)\int_Y \mu_B(y)ydy} = \mu_A(z) \cdot Centr(B) = F(z)$$

для всех таких z, что $\mu_A(z) > 0$, т.е. $z \in \Delta$, иначе $F(z) = 0$.

Заметим, что для минимизации $E(x)$ на Δ нужно, чтобы центры тяжести множеств A, B, а также функции $f(x)$ были совмещены. Положим

$$c(x) = \frac{1}{a+b}\int_{x-a}^{x+b} f(t)\,dt,$$

тогда

$$(a+b)\cdot c(x) = F(x+b) - F(x-a),$$

где $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

$$c(x) = \frac{F(x+b) - F(x-a)}{a+b} = \\ = \frac{F(x+b) - F(x-a)}{(x+b) - (x-a)}.$$

Известно, что если некоторая функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[d,e]$ и дифференцируема в (d,e), то найдется, по крайней мере, одна точка $z \in (d,e)$, в которой

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi(e) - \varphi(d)}{e - d}.$$

Если для функции $\varphi(x)$ выполняются условия данной теоремы, то к ее графику можно провести, по меньшей мере, одну касательную, параллельную секущей, проведенной через точки $(d,\varphi(d))$, $(e,\varphi(e))$. В частном случае, если $\varphi(x)$ непрерывна на $[d,e]$, дифференцируема в (d,e) и $\varphi(d) = \varphi(e)\overleftrightarrow{AB}$, то найдется, по крайней мере, одна точка $z \in (d,e)$, в которой $\varphi'(z) = 0$, т.е. график функции $\varphi(x)$ в точке z имеет касательную, параллельную оси абсцисс.

На основе теоремы Лагранжа получим, что $c(x) = F'(z)$ для некоторых $z \in \Delta$. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$F(z) = \begin{cases} c(x), & z \in I(x), \\ 0, & z \in I(x). \end{cases}$$

Заметим, что прямая, проведенная через точку $c(x)$, пересекает $f(x)$ в двух точках — при $f'(x) > 0$ и при $f'(x) < 0$, и, следовательно, существует точка, в которой $f'(x) = 0$, причем эта единственная точка является точкой экстремума функции $f(x)$. С другой стороны, $f(x)$ имеет экстремум на Δ там, где $\mu_A(z) > 0$.

Рассмотрим задачу определения такого интервала $I(x) = [x-a, x+b]$, который порождает заплатку $A \times B$ и минимизирует при этом среднеквадратическую ошибку аппроксимации, которая теперь зависит от x. Каждое значение x порождает нечеткую систему F_x. Необходимо определить такое значение x^*, которое порождает оптимальную нечеткую систему $F^* = F_{x^*} \in \{F_x\}_{x\in X}$, минимизирующую среднеквадратическую ошибку

$$E(x) = \int_u^v \left(f(t) - F_x(t)\right)^2 dt = \\ = \int_u^{x-a} f^2(t)\,dt + \\ + \int_{x-a}^{x+a} \left(f(t) - c(x)\right)^2 dt + \int_{x+b}^{v} f^2(t)\,dt.$$

Чтобы определить точки минимума $E(x)$, найдем

$$E'(x) = \left(f^2(x-a) - f^2(x+b)\right) + \\ + \frac{d}{dx}\left(\int_{x-a}^{x+b}\left(f(t) - c(x)\right)^2 dt\right) = \\ = \left(f^2(x-a) - f^2(x+b)\right) + \left(f(x+b) - c(x)\right)^2 - \\ - \left(f(x-a) - c(x)\right)^2 - \\ -2\int_{x-a}^{x+b}\left(f(t) - c(x)\right)c'(x)\,dt,$$

причем $\int_{x-a}^{x+b}\left(f(t) - c(x)\right)c'(x)\,dt = 0.$

Тогда

$$E'(x) = 2c(x)\left(f(x+b) - f(x-a)\right).$$

Приравнивая производную нулю, получаем, что для минимизации среднеквадратической ошибки необходимо $\left[\begin{array}{l} f(x+b) = f(x-a) \\ c(x) = 0 \end{array}\right.$. Из второго условия следует, что существует точка $z \in \Delta$, в которой $F'(z) = 0$. Экстремальное значение z принадлежит нечеткому множеству A с некоторой ненулевой степенью, тогда заплатка $A \times B$ покрывает экстремальную точку $(z, f(z))$ достаточной ширины нечетким множеством, так что $\mu_{A\times B}(z, f(z)) > 0$. Это оптимальная заплатка для точки $(z, f(z))$.

Рассмотрим частный случай — аддитивную нечеткую систему [1] с базой правил

$$R_i: \text{если } x \text{ есть } A_i, \text{ то } y \text{ есть } B_i$$

$$(i = \overline{1,N}),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор входных переменных, $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ — вектор лингвистических значений входных переменных, y — выходная переменная.

В такой системе для каждого входного значения $x' = (x_1', \ldots, x_n')$ с помощью правила R_i с весом w_i формируется выходное нечеткое множество по формуле

$$\mu_{B_i'}(y) = \mu_{B_i}(y) \cdot \mu_A(x'),$$

а затем строится результирующее выходное нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{B'}(y) = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \mu_{B_i}(y).$$

Дефазификация по методу центра тяжести приводит к формуле

$$F(z) = \frac{\sum_{j=1}^{N} w_j \mu_{A_j}(z) V_j c_j}{\sum_{j=1}^{N} w_j \mu_{A_j}(z) V_j},$$

где $V_j = \int_Y \mu_{B_j}(y)\, dy.$

В правиле R_i нечеткому множеству A_i соответствует интервал $\Delta_i = [x_i - a_i, x_i + b_i]$, а нечеткое множество B имеет центр тяжести c_i, который совпадает с локальным центром тяжести функции $f(x)$ на Δ_i. Значение входной переменной x нечеткую систему F_x. Необходимо определить такую нечеткую систему $F^* = F_{x^*} \in \{F_x\}_{x \in X}$, которая минимизирует среднеквадратическую ошибку аппроксимации. В общем случае Δ_i могут перекрываться. Число правил может не совпадать с числом экстремумов.

Чтобы определить x^*, который минимизирует $E(x)$, найдем градиент этой функции и полученные частные производные приравняем 0.

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{u}^{x_i - a_i} \left(f(t) - F(t)\right)^2 dt + $$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{x_i - a_i}^{x_i + b_i} \left(f(t) - F(t)\right)^2 dt +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{x_i + b_i}^{v} \left(f(t) - F(t)\right)^2 dt =$$

$$= 2 \int_{x_i + a_i}^{x_i - b_i} \left(f(t) - F(t)\right) \frac{\partial F(t)}{\partial x_i} dt.$$

$\frac{\partial E}{\partial x_i} = 0$, когда $f = F$ или

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} == V_i \frac{d\mu_{A_i}(x)}{dx} \times$$

$$\times \left[c_i \sum_{j=1}^{N} V_j \mu_{A_j}(x) - \sum_{j=1}^{N} V_j \mu_{A_j}(x) c_j \right] = 0.$$

Таким образом, получаем условия для нахождения параметров функций принадлежности

$$\frac{d\mu_{A_i}(x)}{dx} = 0$$

8; 8

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} V_j \mu_{A_j}(x) c_j}{\sum_{j=1}^{N} V_j \mu_{A_j}(x)}.$$

С помощью нейросетевых алгоритмов можно так настроить параметры функций принадлежности нечетких множеств A_i, чтобы данное условие выполнялось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / Ф. Пегат. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 798 с.

2. Takagi, T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control // IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, 1985, № 15 (1), pp. 116—132.

3. Gustafson D. E., Kessel W. C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix // IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, 1989. pp. 761—767.

Леденева Татьяна Михайловна — д. т. н., проф., каф. Математических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. Тел. (4732) 208-282. E-mail: dean@amm.vsu.ru.

Ledenyova Tatyna Michaylovna — Doctor of Technic Sciences, Professorю The dept. of the Mathematical Methods of Oreration Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282. E-mail: dean@amm.vsu.ru.

Кочергин Е.В. – аспирант кафедры автоматизированных и вычислительных систем Воронежского государственного технического университета. Тел. 8-920-404-13-32.

Kochergin E.V. — Post-graduate student, the dept. of calculation and automation systems, Voronezh State University. Tel. 8-920-404-13-32.