УДК 621.395

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

М. А. Дрюченко, Е. В. Воронова, А. А. Сирота

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.03.2010 г.

Аннотация. Рассматриваются свойства сходимости весовых коэффициентов линейных нейронных сетей, используемых для восстановления регрессионных и авторегрессионных моделей случайных процессов и полей в условиях прямого и косвенного обучения. Приводятся результаты статистического имитационного моделирования для случайных полей с заданной функцией корреляции.
Ключевые слова: нейронные сети, регрессионные модели, имитационное моделирование, прямое и косвенное обучение.

Abstract. In this paper there is considered a convergence property of the linear neural networks weights, used for the restoration the regression and auto regression models of random processes and fields in case of direct and indirect learning. There are shown the results of statistical simulation modeling for random fields with given correlation function.
Key words: neural networks, regression models, simulation modeling, direct and indirect learning.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из принципиальных вопросов, которые всегда возникают при исследовании информационных систем с использованием компьютерных имитационных моделей, является разработка алгоритмов и программ генерации сигналов и помех, действующих в каналах передачи информации. Проблема состоит в том, что указанные алгоритмы, как правило, достаточно сложны и требуют больших, а зачастую, может быть, и наибольших вычислительных ресурсов по отношению к другим компонентам разрабатываемого программного обеспечения [1, 2]. При этом во многих задачах нельзя использовать упрощенные модели и алгоритмы генерации сигналов и помех, так как это может привести к потере адекватности всей имитационной модели и, соответственно, к неправильным результатам при проведении экспериментов, направленных на оценку эффективности исследуемой системы.

При известных корреляционных или спектральных характеристиках алгоритмы моделирования векторных случайных процессов и полей реализуют подходы и методы, которые подробно рассмотрены [1, 3—5]. Однако во многих случаях такие характеристики отсутствуют. В частности, в задачах обработки изображений возникает задача разработки алгоритмов имитации изображений пространственно-распределенных объектов и фонов как реализаций случайных полей (задача синтезирования искусственных изображений) при наличии ограниченных по объему эталонных образцов изображений [6—12]. Известные подходы к решению данной задачи используют алгоритмы генерации случайно распределенных значений яркости изображения, обеспечивающие формирование реализации случайного поля с текстурой, адекватной реальным для данных условий наблюдения изображениям. При отсутствии априорной информации относительно статистических характеристик изображений эффективный подход для построения подобных алгоритмов, по мнению авторов [2, 13, 14], может быть основан на применения искусственных нейронных сетей (НС), обучаемых по совокупности эталонных примеров. Нейросетевой алгоритм формирования каждого элемента изображения позволяет получить отклик сети на входные воздействия, являющиеся элементами некоторой геометрически определенной окрестности этого элемента, т.е. в форме авторегрессионной модели и реализованной на ее основе рекуррентной процедуры генерации случайного поля. Использование аппарата НС позволяет эффективно решить проблему нахождения пространственных связей между элементами изображения (в том числе и нелинейных), представляя их в виде весов нейронной сети, получаемых в ходе обучения по эталонным фрагментам реального изображения. Целью данной статьи является теоретический и экспериментальный анализ условий и свойств сходимости весовых коэффициентов нейронных сетей линейного типа при восстановлении регрессионных и авторегрессионных моделей (АР-моделей) случайных процессов и полей.

АНАЛИЗ СВОЙСТВ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОЙ РЕГРЕССИИ

Пусть $x = (x_1 ... x_M)^T$ – случайный вектор с математическим ожиданием $M[x] = m_x$ и матрицей ковариации $M[(x - m_x)(x - m_x)^T] = R_{xx}$, а $y = (y_1 ... y_N)^T$ – случайный вектор с математическим ожиданием $M[y] = m_y$ и матрицей ковариации $M[(y - m_y)(y - m_y)^T] = R_{yy}$. Пусть также связь между x и y определяется линейным оператором вида

$$y = Fx + c + v,$$

где $F = \|f_{nm}\|$ – матрица размера $N \times M$; c – векторная константа; $v = (v_1 ... v_N)^T$ – случайный, независимый от x и y, вектор возмущения $(M[v] = 0, M[vv^T] = R_{vv})$. Фактически y и x подчиняются модели многомерной регрессии. При этом матрица F и вектор c с учетом независимости v и x, y связаны со статистическими характеристиками x, y и v следующим образом:

$$\begin{gathered} m_y = Fm_x + c, \\ y - m_y = Fx + c - m_y - Fm_x + Fm_x + c = \\ = F(x - m_x) + v, \\ R_{yx} = M[(y - m_y)(x - m_x)^T] = FR_{xx}{}^T, \\ R_{yy} = M[(y - m_y)(y - m_y)^T] = FR_{xx}F^T + R_{vv}. \end{gathered}$$

В итоге, если R_{xx} – невырожденная матрица (что, обычно, выполняется), то связь параметров модели векторной регрессии со статистическими характеристиками случайных векторов имеет вид

$$\begin{gathered} c = m_y - Fm_x, \\ F = R_{yx}R_{xx}^{-1}, \\ R_{vv} = R_{yy} - FR_{xx}F^T. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть теперь проводится обучение однослойной нейронной сети линейного типа с матрицей весов $W = \|w_{nm}\|$ размера $N \times M$ и вектором смещения $w_0 = (w_{10} \dots w_{N0})^T$. Для обучения сети используется выборка $\{x^{(p)}, y^{(p)}\}$, $p = \overline{1,P}$. Найдем необходимое и достаточное условия минимума целевой функции при обучении НС.

Целевая функция при обучении сети имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}(y^{(p)} - \tilde{y}^{(p)})^T(y^{(p)} - \tilde{y}^{(p)}) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}(y^{(p)} - Wx^{(p)} - w_0)^T(y^{(p)} - Wx^{(p)} - w_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\left(y_n^{(p)} - \sum_{m=1}^{M}W_{nm}x_m^{(p)} - w_{n0}\right)^2,$$

где $\tilde{y}^{(p)}$ – реакция НС на входное воздействие $x^{(p)}$. Необходимое условие минимума может быть получено на основе решения системы уравнений вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial E}{\partial w_{n0}} = 0, \\ n = \overline{1,N}, \\ \frac{\partial E}{\partial w_{nm}} = 0, \\ n = \overline{1,N}, \\ m = \overline{1,M}. \end{gathered}$$

Сначала получим решение для компонентов вектора смещения

$$\begin{gathered} \frac{\partial E}{\partial w_{n0}} = -\sum_{p=1}^{P}\left(y_n^{(p)} - \sum_{m=1}^{M}w_{nm}x_m^{(p)} - w_{n0}\right) = 0, \\ w_{n0} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}y_n^{(p)} - \sum_{m=1}^{M}w_{nm}\frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}x_m^{(p)}, \\ n = \overline{1,N}, \end{gathered}$$

где $\tilde{m}_x$, $\tilde{m}_y$ – выборочные математические ожидания векторов входа и выхода. Теперь запишем выражение для частной производной E по элементам матрицы W с учетом подстановки полученного решения для вектора w_0

$$\frac{\partial E}{\partial w_{nm}} = -\sum_{p=1}^{P}\left(y_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} w_{nk}x_k^{(p)} - w_{n0}\right)x_m^{(p)} =$$
$$= -\sum_{p=1}^{P}(y_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} w_{nk}(x_k^{(p)} - \tilde{m}_{x,k}) - \tilde{m}_{y,n})\times$$
$$\times(x_k^{(p)} - \tilde{m}_{x,m}) = 0,$$
$$n = \overline{1,N},\ m = \overline{1,M}.$$

Это эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\tilde{r}_{nm}^{yx} - \sum_{k=1}^{M} w_{nk}\tilde{r}_{km}^{xx} = 0,$$
$$n = \overline{1,N},\ m = \overline{1,M},$$

где $\tilde{r}_{nm}^{yx}$, $\tilde{r}_{km}^{xx}$ – элементы выборочных матриц ковариации $\tilde{R}_{yx}$, $\tilde{R}_{xx}$.

$$\tilde{r}_{nm}^{yx} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(y_n^{(p)} - \tilde{m}_{y,n})(x_m^{(p)} - \tilde{m}_{x,m}),$$
$$\tilde{r}_{km}^{xx} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(x_k^{(p)} - \tilde{m}_{x,k})(x_m^{(p)} - \tilde{m}_{x,m}).$$

В матричном виде получим следующее уравнение:

$$\tilde{R}_{yx} - W\tilde{R}_{xx} = 0.$$

Оценки $\tilde{R}_{yx}$, $\tilde{R}_{xx}$ являются оценками максимального правдоподобия матриц ковариации R_{yx}, R_{xx}. В тоже время они являются смещенными оценками [15]. Несмещенные оценки определяются соотношениями:

$$\hat{R}_{yx} = \frac{P}{P-1}\tilde{R}_{yx},$$
$$\hat{R}_{xx} = \frac{P}{P-1}\tilde{R}_{xx}.$$

При $P > M$ матрица $\tilde{R}_{xx}$ является положительно определенной [15]. Отсюда получим окончательное выражение для матрицы весов НС и вектора смещений

$$w_0 = \tilde{m}_y - W\tilde{m}_x,$$
$$W = \tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1}. \qquad (2)$$

Таким образом, структура соотношений (1) для параметров исходной модели F, c и модели (2), восстанавливаемой с помощью НС W, w_0 сохраняется, при этом w_0 и W является выборочными оценками.

Рассмотрим теперь достаточное условие минимума целевой функции. Оно определяется условием положительной определенности матрицы вторых частных производных по всем определяемым в ходе обучения параметрам НС

$$P_W = \left\|\frac{\partial^2 E}{\partial w'_{nm}\partial w'_{kt}}\right\| \geq 0, \qquad (3)$$

где w'_{nm}, $n = \overline{1,N}$, $m = \overline{0,M}$ – элементы матрицы весов, включая и веса смещения. Для упрощения выкладок оценим выполнимость условия (3) для каждого нейрона в отдельности, учитывая, что для однослойной нейронной сети процесс обучения и минимизации целевой функции осуществляется независимо. Для n-го нейрона объединим вектор весов и смещение в расширенный вектор

$$w'_n = (w'_{n0}, w'_{n1}...w'_{nM})^T,$$
$$w'_{nm} = w_{nm}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 E}{\partial w'_{n0}\partial w'_{n0}} = \frac{\partial^2 E}{\partial w_{n0}\partial w_{n0}} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial w_{n0}}\left(\sum_{p=1}^{P}\left(y_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} w_{nm}x_m^{(p)} - w_{0n}\right)\right) = P,$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial w'_{nr}\partial w'_{nm}} = \frac{\partial^2 E}{\partial w_{nr}\partial w_{nm}} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial w_{nr}}\left(\sum_{p=1}^{P}\left(y_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} w_{nk}x_k^{(p)} - w_{0n}\right)x_m^{(p)}\right) =$$
$$= \sum_{p=1}^{P} x_r^{(p)}x_m^{(p)},$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial w'_{nm}\partial w'_{n0}} = \frac{\partial^2 E}{\partial w_{nm}\partial w_{n0}} = \sum_{p=1}^{P} x_m^{(p)},$$
$$r = \overline{1,M},$$
$$m = \overline{1,M}.$$

В итоге получим следующую матрицу вторых частных производных:

$$P_w^{(n)} = \begin{pmatrix} P & \sum_{p=1}^{P} x_1^{(p)} & \dots & \sum_{p=1}^{P} x_M^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{p=1}^{P} x_M^{(p)} & \sum_{p=1}^{P} x_M^{(p)}x_1^{(p)} & \dots & \sum_{p=1}^{P} x_M^{(p)}x_M^{(p)} \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{p=1}^{P} P_w^{(n,p)}$$

где $P_w^{(n,p)} = X^{(p)}X^{(p),T}$, $X^{(p)} = (1, x_1^{(p)}...x_M^{(p)})^T$ – полученный путем включения единицы в качестве первой компоненты расширенный вектор.

Условия достаточности выполняются если матрица $P_w^{(n)}$, положительно определена, то есть для любого нетривиального вектора y:

$y^T P_w^{(n)} y > 0$, $n = \overline{1,N}$. Выполним следующее преобразование для $P_w^{(n)}$ [15]

$$P_w^{(n)} = \sum_{p=1}^{P} X^{(p)} X^{(p),T} =$$
$$= \sum_{p=1}^{P} (X^{(p)} - \bar{X})(X^{(p)} - \bar{X})^T +$$
$$+P\bar{X}\bar{X} = R_c^{(n)} + R_\mu^{(n)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \ \dots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & P\tilde{R}_{xx} \\ 0 & \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} P & P\bar{X}_1 \ \dots \ P\bar{X}_M \\ P\bar{X}_1 & \\ \vdots & P\tilde{R}_\mu \\ P\bar{X}_M & \end{pmatrix},$$

где $\bar{X} = P^{-1} \sum_{p=1}^{P} X^{(p)} = (1, \tilde{m}_{x,1}, \dots, \tilde{m}_{x,M})^T$; $\tilde{R}_\mu = \|\tilde{m}_{xi}\tilde{m}_{xj}\|$ – матрица $\tilde{m}_x \tilde{m}_x^T$; $\tilde{R}_{xx}$ – ранее введенная матрица ковариации выборки $x^{(p)}$, $p = \overline{1,P}$. Представим любой нетривиальный вектор в виде $y = y_1 + y_2 \neq 0$, $y_1 = (0, y_1 \dots y_m)^T$, $y_2 = (y_0, 0 \dots 0)^T$. Тогда

$$(y_1 + y_2)^T P_w^n (y_1 + y_2) =$$
$$= y_1^T P_w^n y_1 + y_2^T P_w^n y_2 + 2Py_0^2 =$$
$$= Py_1^T \tilde{R}_{xx} y_1 + 2\sum_{i=1}^{M} y_i \tilde{m}_{xi} y_0 + 2Py_0^2 =$$
$$= Py_1^T \tilde{R}_{xx} y_1 + P[(y_0 + Y_1^T \tilde{m}_x)^2 - (Y_1^T \tilde{m}_x)^2].$$

Возможны два варианта: если $y_0 \neq 0$, то, как минимум, $y_1^T \tilde{R}_{xx} y_1 \neq 0$, но при этом второе слагаемое всегда больше нуля; если $y_0 = 0$, то $y_1 \neq 0$ и тогда первое слагаемое $y_1^T \tilde{R}_{xx} y_1 > 0$ в силу положительной определенности $\tilde{R}_{xx}$. Таким образом, условие достаточности минимума целевой функции при обучении НС доказано.

Оценим выборочную матрицу ковариации остаточной ошибки выхода НС T_v

$$T_v = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{P} (y^{(p)} - Wx^{(p)} - w_0) \times$$
$$\times (y^{(p)} - Wx^{(p)} - w_0)^T =$$
$$= \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{P} (y^{(p)} - \tilde{m}_y - W(x^{(p)} - \tilde{m}_x)) \times$$
$$\times (y^{(p)} - \tilde{m}_y - W(x^{(p)} - \tilde{m}_x))^T =$$
$$= \tilde{R}_{yy} - \tilde{R}_{yx} W^T - W\tilde{R}_{xy} + W\tilde{R}_{xx} W^T.$$

Учитывая, что $W = \tilde{R}_{yx} \tilde{R}_{xx}^{-1}$, получим выражение

$$T_v = \tilde{R}_{yy} - \tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1}\tilde{R}_{xy} - \tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1}\tilde{R}_{xy} +$$
$$+\tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1}\tilde{R}_{xx}\tilde{R}_{xx}^{-1}\tilde{R}_{xy} =$$
$$= \tilde{R}_{yy} - \tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1}\tilde{R}_{xy} = R_{vv},$$

которое определяет выборочную матрицу ковариации $\tilde{R}_{vv}$. Согласно [15] она является оценкой максимального правдоподобия. Напомним, что $R_{vv} = R_{yy} - FR_{xx}F^T$. Это значит, что оптимальная оценка матрицы ковариации шума может быть получена после фиксации коэффициентов сети. При этом несмещенная оценка получается как $\tilde{R}_{vv} P / (P - M)$.

Теорема. Нижняя граница Рао-Крамера для диагональных элементов матрицы ошибок при оценке параметров многомерной регрессии в случае гауссовских случайных векторов определяется соотношениями:

$$R_\lambda \geq I^{-1} = R_v \otimes M[A^{-1}],$$
$$A = \sum_{p=1}^{P} \left(x^{(p)} - \tilde{m}_x\right)\left(x^{(p)} - \tilde{m}_x\right)^T,$$
$$M[a^{ii}] = \frac{\delta_{xx}^{ii}}{P - M},$$

где $\xi^P = \{x^P, y^P\}$ – совокупность наблюдений; $x^P = \{x^{(1)} \dots x^{(P)}\}$, $y^P = \{y^{(1)} \dots y^{(P)}\}$, $x^{(p)} \in R^M$, $y^{(p)} \in R^N$ – гауссовские векторы, связанные между собой регрессией $y = Fx + v + c$; λ – оцениваемый вектор параметров регрессии; P – количество наблюдений; $P(\lambda, \xi^P)$ – совместная плотность распределения $\{\lambda, \xi^P\}$; I – информационная матрица Фишера; δ_{xx}^{ii} – диагональный элемент матрицы R_{xx}^{-1}.

Доказательство. Согласно [17] нижняя граница Рао-Крамера для оценки вектора λ определяется неравенством

$$R_\lambda = M[(\lambda - \hat{\lambda})(\lambda - \hat{\lambda})^T] \neq I^{-1},$$
$$I = M\left\|\frac{\partial \ln P(\lambda, \xi^P)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln P(\lambda, \xi^P)}{\partial \lambda_j}\right\|,$$

где $\hat{\lambda}$ – используемая оценка, получаемая по совокупности наблюдений ξ^P; R_λ – матрица ковариации ошибок оценивания. В рассматриваемом случае вектор λ содержит компоненты оцениваемой матрицы регрессии F и смещения c.

Ранее получено, что нейронная сеть формирует регрессию $y = Wx + w_0 + v$ с оценками

$$W = \tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1},$$

$$\tilde{R}_{yx} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(y^{(p)} - \tilde{m}_y)(x^{(p)} - \tilde{m}_x),$$

$$\tilde{R}_{xx} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(x^{(p)} - \tilde{m}_x)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T,$$

$$w_0 = \tilde{m}_y - W\tilde{m}_x,$$

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}x^{(p)},$$

$$\tilde{m}_y = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}y^{(p)}.$$

Отсюда можно переписать уравнение регрессии в виде $y - \tilde{m}_y = W(x - \tilde{m}_x) + v$ и обозначить $\tilde{y} = y - \tilde{m}_y$, $\tilde{x} = x - \tilde{m}_x$. Полученные оценки являются оценками наименьших квадратов; они же для гауссовских векторов являются оценками максимума правдоподобия. Учитывая, что $\xi^P = \{x^P, y^P\}$, запишем совместную плотность распределения следующим образом:

$$P(\lambda, \xi^P) = P(\lambda / \xi^P)P(\xi^P).$$

Найдем $P(\lambda / \xi)^P$, где λ – составной вектор из элементов матрицы F и вектора c. Для этого используем соотношения:

$$y^{(p)} = Fx^{(p)} + v^{(p)} + c,$$

$$p = \overline{1, P},$$

$$\tilde{m}_y = F\tilde{m}_x + \tilde{m}_v + c,$$

$$c = \tilde{m}_y - F\tilde{m}_x - \tilde{m}_v,$$

$$M[c / \xi^P] = \tilde{m}_y - F\tilde{m}_x = \tilde{c},$$

$$R_c = M[(c - \tilde{c})(c - \tilde{c})^T] =$$

$$= M[\tilde{m}_v\tilde{m}_v^T] = M\left[\frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}v^{(p)}\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}v^{(k),T}\right] = \frac{1}{P}R_v.$$

так как $M\left[v^{(p)}v^{(k),T}\right] = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ R_v, & p = k. \end{cases}$

Таким образом, плотность $P[c / \xi^P]$ является гауссовской величиной, распределенной по закону $P[c / \xi^P] = N(c, \tilde{c}, R_v)$.

Для упрощения последующих выкладок введем расширенный вектор наблюдений x и расширенную матрицу регрессии F

$$x = \left(x_1 \ldots x_m, 1\right)^T,$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1M} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ f_{N1} & & f_{NM} & c_N \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать

$$y^{(p)} = Fx^{(p)} + v^{(p)},$$

$$p = \overline{1, P},$$

$$\tilde{m}_y = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}y^{(p)} = F\tilde{m}_x + \tilde{m}_v,$$

$$(y^{(p)} - \tilde{m}_y)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T =$$
$$= F(x^{(p)} - \tilde{m}_x)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T +$$
$$+(v^{(p)} - \tilde{m}_v)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T,$$

$$p = \overline{1, P}.$$

$$\sum_{p=1}^{P}(y^{(p)} - \tilde{m}_y)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T =$$
$$= \sum_{p=1}^{P}F(x^{(p)} - \tilde{m}_x)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T +$$
$$+\sum_{p=1}^{P}(v^{(p)} - \tilde{m}_v)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T.$$

Отсюда F как функция ξ^P и ее условное среднее представляются в виде

$$F = [\tilde{R}_{yx} - \sum_{p=1}^{P}(v^{(p)} - \tilde{m}_v)(x^{(p)} - \tilde{m}_x)^T]\tilde{R}_{xx}^{-1},$$

$$\hat{\lambda} = M[F / \xi^P] = \tilde{R}_{yx}\tilde{R}_{xx}^{-1} = \tilde{F} = W.$$

Теперь определим матрицу ковариации отдельных строк F: f_i и f_j [15]

$$y_i^{(p)} = f_i x_i^{(p)} + v_i^{(p)},$$

$$y_j^{(p)} = f_j x_j^{(p)} + v_j^{(p)},$$

$$F - \tilde{F} = \sum_{p=1}^{P}\left(v^{(p)} - \tilde{m}_v\right)\left(x^{(p)} - \tilde{m}_x\right)^T\tilde{R}_{xx}^{-1},$$

$$M\left[\left(f_i - \tilde{f}_i\right)^T\left(f_j - \tilde{f}_j\right)\big/\xi^P\right] =$$
$$= \tilde{R}_{xx}^{-1}M\left[\sum_{p=1}^{P}\left(x^{(p)} - \tilde{m}_x\right)\left(v_i^{(p)} - \tilde{m}_{vi}\right)^T \cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{k=1}^{P}\left(v_j^{(k)} - \tilde{m}_{vj}\right)\left(x^{(k)} - \tilde{m}_x\right)^T\right]\tilde{R}_{xx}^{-1} =$$
$$= \tilde{R}_{xx}^{-1}\left(x^{(p)} - \tilde{m}_x\right)P\delta_{vij}\left(x^{(p)} - \tilde{m}_x\right)^T\tilde{R}_{xx}^{-1} =$$
$$= \delta_{vij}P\tilde{R}_{xx}^{-1} = \delta_{vij}A^{-1}.$$

То есть условная матрица ковариации ошибок при оценке элементов строк F является кронеровским (прямым) произведением матриц R_v и A^{-1}

$$D_\lambda = R_v \otimes A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_{v11}A^{-1} & \ldots & \delta_{v1N}A^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{vN1}A^{-1} & \ldots & \delta_{vNN}A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$P[\lambda / \xi^P] = N(\lambda, \hat{\lambda}, D_\lambda),$$

$$\ln P[\lambda / \xi^P] = const - \frac{1}{2}(\lambda - \hat{\lambda})^T D_\lambda^{-1}(\lambda - \hat{\lambda}),$$

$$\left\| \frac{\partial \ln P(\lambda / \xi^P)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln P(\lambda / \xi^P)}{\partial \lambda_j} \right\| = D_\lambda^{-1},$$

$$M[D_\lambda^{-1}] = R_v \otimes M[A^{-1}].$$

Теперь необходимо найти $M[A^{-1}]$. Это возможно для диагональных элементов A^{-1}: $a^{ii}, i = \overline{1, M}$. Согласно [16] для любого вектора L справедливо

$$\frac{L^T R_{xx}^{-1} L}{L^T A^{-1} L} \sim \chi^2(P - M),$$
$$x \in R^M.$$

Положим $L = \{\underbrace{0, 0, \ldots}_{1\ldots i-1} 1, \underbrace{\ldots 0, 0}_{i+1\ldots M}\}^T$, тогда получим

$$\delta_{xx}^{ii} \big/ a^{ii} \sim \chi^2\left(P - M\right),$$

где δ_{xx}^{ii} и a^{ii} – диагональные элементы матриц R_{xx}^{-1} и A^{-1}. Найдем теперь $M[a^{ii}]$. Обозначим $u = a^{ii}$, $v = u^{-1}$, тогда

$$P\left(u^{-1}\right) = P\left(v\right) \sim \chi^2\left(P - M\right)\left(\delta_{xx}^{ii}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\left(P - M\right)/2\right) \cdot 2^{(P-M)/2}} v^{\frac{P-M-2}{2}} e^{-\frac{v}{2}} \left(\delta_{xx}^{ii}\right)^{-1}.$$

Найдем плотность $P(u)$ по правилу преобразования плотностей

$$P(u) = \frac{\delta_{xx}^{ii}}{\Gamma\left(\left(P - M\right)/2\right) 2^{(P-M)/2}} \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{P-M+2}{2}} e^{-\frac{1}{2u}}.$$

Выполнив замену $u = 1/t$, $du = -1/u_2\, dt$, получим

$$M[u] =$$
$$= \int_\infty^0 \frac{\delta_{xx}^{ii}}{\Gamma\left(\left(P - M\right)/2\right) 2^{(P-M)/2}} t^{\frac{P-M+2}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{1}{t^3}\right) dt =$$
$$= \frac{\delta_{xx}^{ii}}{\Gamma((P - M)/2) 2^{\frac{P-M}{2}}} \int_0^\infty t^{\frac{P-M}{2}-2} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

Воспользуемся известным соотношением [17, с. 259]

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-Px} dx = \Gamma(\alpha) p^{-\alpha},$$

тогда получим

$$M[u] = \frac{\delta_{xx}^{ii} \Gamma\left(\left(P - M\right)/2 - 1\right) 2^{\frac{P-M}{2}-1}}{\Gamma\left(\left(P - M\right)/2\right) 2^{\frac{P-M}{2}}} =$$
$$= \frac{\delta_{xx}^{ii} \Gamma\left(\left(P - M\right)/2 - 1\right)}{2\Gamma\left(\left(P - M\right)/2\right)}.$$

В итоге с учетом $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ окончательно получим

$$M[u] = M[a^{ii}] = \frac{\delta_{xx}^{ii}}{P - M}.$$

Следствие. При $P \to \infty$ матрица $W = \tilde{F} = \tilde{R}_{yx} \tilde{R}_{xx}^{-1}$ сходится к истинной матрице регрессии F по вероятности.

Известно, что сходимость двух матриц друг к другу определяется сходимостью их элементов [15]. Зафиксируем любые положительные ε и μ. Тогда записав неравенство Чебышева для любого элемента W: w_{ij} в виде

$$P\left[\left|w_{ij} - f_{ij}\right| > \varepsilon\right] \le \frac{D\left[w_{ij}\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\delta_{vii} \delta_{xx}^{jj}}{P - M}$$

и выбрав

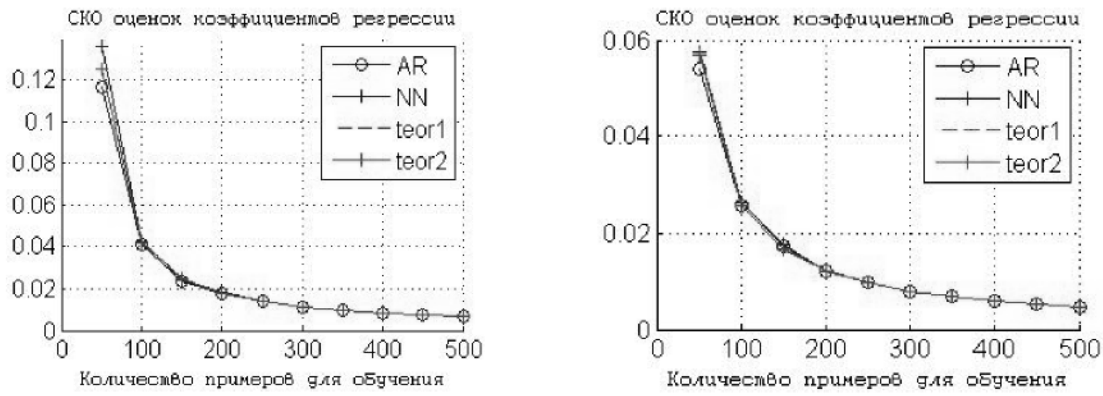
$$P > M + \delta_{vii} \delta_{xx}^{jj} / \mu,$$

получим, что для элементов W выполняются условия сходимости по вероятности.

Для проведения последующего анализа удобно в качестве суммарной среднеквадратичной ошибки (СКО) использовать выражение для усредненного следа trR_λ в виде

$$E = \frac{trR_\lambda}{MN} = \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^{N \times M} \delta_{\lambda kk} =$$
$$= \frac{1}{MN(P - M)} \sum_{i=1}^{N} \delta_{vii} \sum_{j=1}^{M} \delta_{xx}^{jj}, \qquad (4)$$

Для иллюстрации сходимости полученных оценок параметров многомерной регрессии (2) и весовых коэффициентов нейронной сети к истинным значениям параметров многомерной регрессии выполнено статистическое имитационное моделирование при использовании в качестве обучающих данных реализаций гауссовского случайного поля (ГСП). Использовался подробно описанный в [2] алгоритм генерации фрагментов случайного поля прямоугольной формы на основе его развертки в случайный вектор x, факторизации матрицы ковариации (факторизации Холецкого) полученного вектора и выполнения процедуры корреляционного согласования для нахождения случайного век-



а) б)

Рис. 1. Среднеквадратичная ошибка для оценок коэффициентов регрессии

тора $y = Fx + v + c$, отражающего соседний фрагмент случайного поля. При моделировании функция пространственной корреляции ГСП задавалась в виде $R(x, x', y, y') = \sigma^2 \exp(-\alpha r)$, $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ с параметром корреляции $\alpha = 0.25$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$. На рис. 1 а,б представлены графики усредненных значений суммарной среднеквадратичной ошибки (СКО) оценки коэффициентов регрессии для 100 экспериментов при генерации фрагментов ГСП размеров 5x5 и 3x3, соответственно.

На графиках используются следующие обозначения: AR – суммарная СКО коэффициентов регрессии, полученных на основе (2); NN – суммарная СКО коэффициентов регрессии, полученных как весовые коэффициенты при обучении однослойной нейронной сети; teor1 – среднестатистическое значение следа матрицы $D_\lambda = R_v \otimes A^{-1}$; teor2 – нижняя граница Рао-Крамера для следа матрицы R_λ в виде (4). Анализ полученных зависимостей показывает, что теоретические соотношения и экспериментальные результаты демонстрируют практически полное совпадение.

ОЦЕНИВАНИЕ АР-МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Рассмотрим задачу восстановления АР-модели случайного процесса (поля) по наблюдениям в присутствии аддитивного шума. Пусть $x_1 = (x_{1,1} \ldots x_{1,M})^T$ и $x_2 = (x_{2,1} \ldots x_{2,M})^T$ – случайные векторы. Пусть также $m_{x1} = M[(x_1]$, $M[(x_1 - m_{x1})(x_1 - m_{x1})^T] = R_{xx11}$, причем x_2 связан с x_1 матричным уравнением $x_2 = Fx_1 + Gu$, где F – матрица размера $M \times M$; G – матрица размера $M \times L$; u – вектор возмущения размерности $L\left(M[u] = m_u, M[uu^T] = R_{uu}\right)$. Тогда

$$m_{x2} = Fm_{x1},$$

$$R_{xx2} = FR_{xx11}F^T + GR_{uu}G^T.$$

Векторы x_1 и x_2 являются ненаблюдаемыми векторами состояний системы. Наблюдению доступны векторы $z_1 = (z_{1,1} \ldots z_{1,N})^T$ и $z_2 = (z_{2,1} \ldots z_{2,N})^T$

$$z_1 = Hx_1 + v_1,$$

$$z_2 = Hx_2 + v_2,$$

где H – матрица размера $N \times M$; v_1, v_2 – шумы наблюдений, $M[v_1] = M[v_2] = 0$, $M[v_1 v_1^T] = M[v_2 v_2^T] = R_{vv}$, $M[v_1 v_2^T] = 0$.

Из теоремы о нормальной корреляции известно, что оптимальная в среднеквадратичном оценка x_1 по наблюдению z_1 имеет вид

$$x_{1/1} = m_{x1} + R_{xz11} R_{zz11}^{-1} (z_1 - \tilde{z}_{1/0})^T,$$

$$\tilde{z}_{1/0} = m_{z1} = Hm_{x1},$$

$$R_{xz11} = M[(x_1 - m_{x1})(z_1 - m_{z1})^T] = R_{xx11}H^T,$$

$$P_{zz11} = M[(z_1 - m_{z1})(z_1 - m_{z1})^T] = = HR_{xx11}H^T + R_{vv}.$$

а оптимальная оценка x_2 по наблюдению z_1 равна $\tilde{x}_{2/1} = F\tilde{x}_{1/1}$. Матрицы ошибок этих оценок имеют следующий вид:

$$P_{x1/1} = P_{xx11}{}^{T} - R_{xz11}R_{zz11}^{-1}R_{zx11},$$
$$P_{x2/1} = FP_{xx11}F^{T} + GR_{u}G^{T},$$
$$R_{zx11} = R_{xz11}^{T}.$$

При этом оптимальная оценка z_2, то есть прогноз наблюдений на один шаг вперед, имеет вид

$$z_{2/1} = H\tilde{x}_{2/1} = HF\tilde{x}_{1/1} = \\ = HF(m_{x1} + R_{xx11}H^{T} \cdot \\ \cdot(HP_{xx11}H^{T} + R_{vv})^{-1}(z_1 - Hm_{x1}). \quad (5)$$

Матрица ковариации ошибки такой оценки равна

$$P_{z2/1} == HR_{x2/1}H^{T} + R_{vv}.$$

Для упрощения записи далее будем считать что $m_{x1} = m_{x2} = 0$. Докажем сначала, что при обучении однослойной линейной НС по совокупности $\{z_1^{(p)}, z_2^{(p)}\}$, $p = \overline{1,P}$ получаемые оценки при $P \to \infty$ сходятся по вероятности к теоретическим оценкам. Рассматривается однослойная сеть с матрицей весов W размера $N \times M$ (смещение также для упрощения записи в явном виде не вводится). Целевая функция при обучении сети имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}(z_2^{(p)} - Wz_1^{(p)})^{T}(z_2^{(p)} - Wz_1^{(p)}).$$

Из результатов предыдущего раздела статьи следует, что $W = \tilde{R}_{zz21}\tilde{R}_{zz11}^{-1}$, где

$$\tilde{R}_{zz21} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} z_2^{(p)}z_1^{(p),T} = \\ = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(Hx_2^{(p)} + v_2^{(p)})(Hx_1^{(p)} + v_1^{(p)})^{T} = \\ = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(Hx_2^{(p)}x_1^{(p)}H^{T} + v_2^{(p)}v_1^{(p),T} + \\ +Hx_2^{(p)}v_1^{(p),T} + v_2^{(p)}x_1^{(p)}H^{T}), \quad (6)$$

$$\tilde{R}_{zz11} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} z_1^{(p)}z_1^{(p),T} = \\ = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(Hx_1^{(p)} + v_1^{(p)})(Hx_1^{(p)} + v_1^{(p)})^{T} = \\ = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(Hx_1^{(p)}x_1^{(p)}H^{T} + v_1^{(p)}v_1^{(p),T} + \\ +Hx_1^{(p)}v_1^{(p),T} + v_1^{(p)}x_1^{(p)}H^{T}\Big).$$

Используя неравенство Чебышева, а также выражения для первого и второго моментов слагаемых $\tilde{R}_{zz21}$, $\tilde{R}_{zz11}$, можно показать, что имеют место сходимости по вероятности

$$\tilde{R}_{zz11} \xrightarrow{P\to\infty} HFP_{xx11}H^{T},$$
$$\tilde{R}_{zz11} \xrightarrow{P\to\infty} HP_{xx11}H^{T} + R_{vv}.$$

В итоге для (6) с учетом следствия доказанной ранее теоремы можно определить предельное соотношение, как по сомножителям, так и в целом

$$W \xrightarrow{P\to\infty} (HFP_{xx11}H^{T})(HP_{xx11}H^{T} + R_{vv})^{-1},$$

то есть преобразование, выполняемое после обучения нейронной сетью с весовой матрицей W, при $P \to \infty$ реализует близкую к оптимальной оценку (прогноз) вектора наблюдений z_2 по наблюдению z_1.

Представляет интерес решение более сложной задачи: получения алгоритма оценки ненаблюдаемого вектора x_2 путем косвенного обучения нейронной сети только на основе выборки наблюдений $\{z_1^{(p)}, z_2^{(p)}\}$, $p = \overline{1,P}$. Рассматривается двухслойная НС (рис. 2), первый слой которой обучается, а второй фиксирован и определяется матрицей H известного вида. Матрицу весов первого слоя сети обозначим H, а общую матрицу весов НС $W' = HW$.

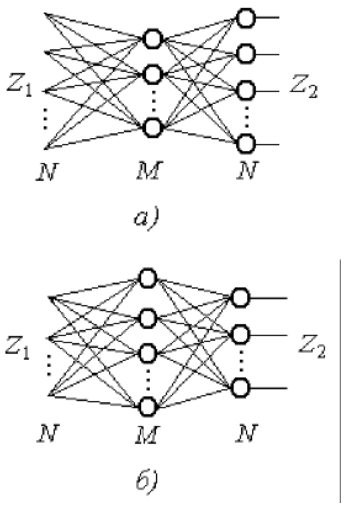


Рис. 2.

Обозначим вектор сигналов в скрытом слое

$$\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_M)^{T} = H\gamma,\ \gamma_k = \sum_{i=1}^{N} w_{ki}z_{1,i}.$$

а вектор сигналов на выходе НС

$$z_2 = H\gamma,\ z_{2,j} = \sum_{k=1}^{M} h_{jk}\gamma_k = \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} h_{jk}w_{ki}z_{1,i}.$$

Тогда целевая функция, которая минимизируется в ходе обучения НС, имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{N}\left(z_{2,j}^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} h_{jk}\sum_{i=1}^{N} w_{ki} z_{1,i}^{(p)}\right)^2.$$

Рассмотрим необходимое условие минимума целевой функции, исходя из следующих уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{mn}} = -\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{N}\left(z_{2,j}^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} h_{jk}\sum_{i=1}^{N} w_{ki} z_{1,i}^{(p)}\right) h_{jm} z_{1,n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} h_{jm}\left(\sum_{p=1}^{P} z_{2,j}^{(p)} z_{1,n}^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} h_{jk}\sum_{i=1}^{N} w_{ki}\sum_{p=1}^{P} z_{1,i}^{(p)} z_{1,n}^{(p)}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{N} h_{jN}\left(\tilde{r}_{j,n}^{2,1} - \sum_{k=1}^{M} h_{jk}\sum_{i=1}^{N} w_{ki}\tilde{r}_{i,n}^{1,1}\right) = 0,$$

$$m = \overline{1,M},\;\; n = \overline{1,N}.$$

В матричном виде получим эквивалентные уравнения

$$H^T H W \tilde{R}_{zz11} = H^T \tilde{R}_{zz21}.$$

Тогда, при условии, что $H^T H$ невырожденная (положительно определенная) матрица, получим

$$W = (H^T H)^{-1} H^T \tilde{R}_{zz21}\tilde{R}_{zz11}^{-1}, \qquad (7)$$

где $\tilde{R}_{zz21}$ и $\tilde{R}_{zz11}$ имеют вид (6).

Докажем теперь, что полученное решение является достаточным условием минимума целевой функции. Достаточное условие после обучения НС соответствует положительной определенности матрицы вторых частных производных по всем параметрам

$$P_W = \left\|\frac{\partial^2 E}{\partial w_{nm}\partial w_{nr}}\right\| > 0,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial w_{nm}\partial w_{nr}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial w_{nr}}\left(\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{N}\left(z_{2,j}^{(p)} - \sum_{k=1}^{M} h_{jk}\sum_{i=1}^{N} w_{ki} z_{1,i}^{(p)}\right) h_{jm} z_{1,n}^{(p)}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} h_{jm}\left(\sum_{k=1}^{M} h_{jk}\sum_{i=1}^{N} z_{1,i}^{(p)} z_{1,n}^{(p)}\right),$$

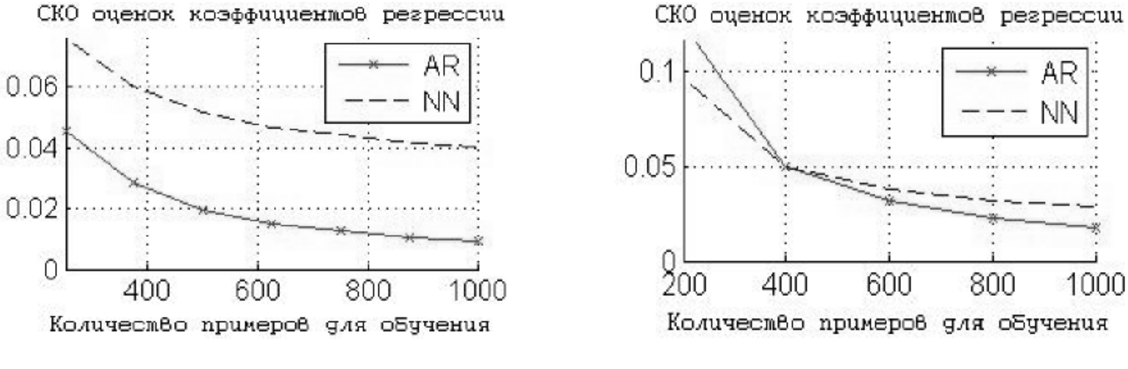
$$P_W = P H^T H \tilde{R}_{zz11}.$$

Таким образом, достаточное условие выполняется в силу положительной определенности $\tilde{R}_{zz1}$ и положительной определенности $H^T H$. Аналогично, можно показать, что имеет место сходимость по вероятности

$$W \xrightarrow{P\to\infty} F P_{xx11} H^T (H P_{xx11} H^T + R_{vv})^{-1}, \quad (8)$$

то есть сходимость к весовой матрице оптимальной оценки вектора x_2 по наблюдениям z_1 [18]. Это означает, что в скрытом слое при достаточно больших P формируется оптимальная в среднеквадратичном оценка x_2 по наблюдениям z_1. Данный результат свидетельствует о возможности косвенного однозначного обучения сети указанной архитектуры по наблюдаемым параметрам для оценки ненаблюдаемых параметров x при известной матрице H, такой что $H^T H > 0$.

Для иллюстрации сходимости полученных оценок параметров многомерной авторегрессии и весовых коэффициентов нейронной сети при обучении по наблюдениям к истинным значениям ниже представлены результаты статистического имитационного моделирования для гауссовского случайного поля. Алгоритм генерации аналогично предыдущему примеру основан на развертке фрагмента поля в вектор x_1 и факторизация матрицы ковариации случайного вектора с последующей процедурой корреляционного согласования для получения слу-



а) б)

Рис. 3. Среднеквадратичная ошибка для оценок коэффициентов авторегрессии чайного вектора $x_2 = Fx_1 + Gu$ соседнего фрагмента поля, где G – матрица, определяемая при таком согласовании [2]. При моделировании функция пространственной корреляции ГСП задавалась в аналогичном виде с параметром корреляции $\alpha = 0.1$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$. Обе реализации случайного поля являются ненаблюдаемыми векторами состояний, наблюдению доступны векторы z_1 и z_2, связанные с векторами состояния линейным оператором H в присутствии шума v. На рис. 3 а,б представлены графики результатов статистических экспериментов для фрагментов случайных полей размером 8x8 пикселя с дисперсией шума $\sigma_{v1} = \sigma_{v2} = 0.01$, отличающихся способом задания матрицы H. Соответственно здесь матрица H задавалась двумя способами: каждый элемент матрицы принимал значение 1 или −1 с вероятностью 0.5; матрица задавалась таким образом, чтобы наблюдаемое случайное поле представляло собой усредненное в соседних точках исходное случайное поле. На графиках используются следующие обозначения: AR – суммарная СКО оценки коэффициентов АР, полученных непосредственно на основе соотношения (7), относительно предельных значений (8); NN – суммарная СКО весовых коэффициентов W, полученных при обучении линейной НС, имеющей архитектуру, представленную на рис. 2, также по отношению к предельному значению коэффициентов АР (8).

Полученные результаты наглядно демонстрируют, что нейронные сети могут успешно применяться в задачах восстановления регрессионных и авторегрессионных моделей по прямым и косвенным наблюдениям в присутствии шумов для получения линейных оценок случайных векторов, описывающих многомерные случайные процессы или поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ермаков С. М.* Статистическое моделирование // Наука, 1982. – 296 с.

2. *Алгазинов Э. К.* Анализ и компьютерное моделирование информационных процессов м систем / Э. К. Алгазинов, А. А. Сирота. – М.: Диалог-МИФИ, 2009. – 416 с.

3. *Быков В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике // Сов.радио, 1971. – 328 с.

4. *Пригарин С. М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей // ИВМиМГ СО РАН, 2005. – 259 с.

5. *Информационные технологии в радиотехнических системах.* Учебное пособие // В. А. Васин, И. Б. Власов, Ю. М. Егоров и др.; Под. ред. И. Б. Федорова. – М.: изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 672 с.

6. *Джайн А. К.* Успехи в области математических моделей для обработки изображений // ТИИЭР. – 1981. – т. 69. – № 5. – С. 9 – 39.

7. *Харалик Р. М.* Статистический и структурный подходы к описанию текстур. // ТИИЭР. – 1979. – т. 67 – № 5. – С. 96 – 119.

8. *P. P. Raghu, R. Poongodi, B. Yegnanaraypa* A combined neural network approach for texture classification. // Neural Networks. – 1995. – Vol. 8. – № 6 – pp. 975 – 987.

9. *Террайен Ч. У., Куатьери Т. Ф., Даджон Д. Е.* Алгоритмы анализа изображений, основанные на статистических моделях. // ТИИЭР. – 1986. – т. 74 – № 4. – С. 4 – 25.

10. *J. S. D. Bonet.* Multiresolution sampling procedure for analysis and synthesis of texture images // SIGGRAPH '97, – 1997, –p. 361 – 368.

11. *Efros A. A. Leung T. K.* Texture synthesis by non-parametric sampling // IEEE International Conference on Computer Vision, – Corfu, Greece, – 1999.

12. *Бондур В. Г., Аржененко Н. И., Линник В. Н., Титова И. Л.* Моделирование многоспектральных аэрокосмических полей яркости. // Исследование Земли из космоса. – 2003. – № 2. – С. 3 – 17.

13. *Сирота А. А., Маслов О. В.* Нейросетевые модели и алгоритмы имитации текстур цветных изображений земной поверхности // Нейрокомпью-

Сирота Александр Анатольевич – д. т. н., профессор кафедры информационных систем Воронежского государственного университета. Тел.: 89030306943. Email: sir@cs.vsu.ru.

Дрюченко Михаил Анатольевич – аспирант кафедры информационных систем Воронежского государственного университета. Email: aldram@box.vsi.ru , тел.: 89601218782.

Sirota A. A. – doctor of technical sciences, professor VSU information system department. Email: sir@cs.vsu.ru, Tel: 89030306943.

Druchenko M.A. – VSU information system department postgraduate student. Email: aldram@box.vsi.ru , Tel: 89601218782.

Воронова Елена Владимировна – аспирант кафедры информационных систем Воронежского государственного университета. Email: helsraven@mail.ru, тел.: 89042146157.

Voronova E.V. – VSU information system department postgraduate student. Email: helsraven@mail.ru, cell.: 89042146157.