УДК 681.3

ПОДХОД К КОМБИНИРОВАНИЮ НЕЗАВЕРШЕННОГО МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ И АЛГОРИТМА ИМИТАЦИОННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ

Б. Ф. Мельников, С. Н. Эйрих

Тольяттинский государственный университет

Поступила в редакцию 01.04.2010 г.

Аннотация. В настоящей статье рассматривается гибрид незавершенного метода ветвей и границ и алгоритма имитационной нормализации для решения задач дискретной оптимизации. Основное внимание уделяется исследованию комбинирования алгоритмов, возможностям распараллеливания и возможностям применения алгоритма для всего класса задач.
Ключевые слова: Незавершённый метод ветвей и границ, имитационная нормализация, задачи дискретной оптимизации.

Abstract. In this paper, a combination of the truncated branch-and-bound method and simulated annealing for solving discrete optimization problem is considered. The basic attention is the combining algorithms, parallelization properties and possibilities of applying the algorithm to the entire class of problems.
Key words: Truncated branch-and-bound method, simulated annealing algorithm, discrete optimization problems.

ВВЕДЕНИЕ

Для задач дискретной оптимизации характерны такие отличительные признаки как факториальный рост вычислительной сложности и допустимость приближенного решения. Представителями указанного класса задач являются NP-полные задачи оптимизации [1].

В настоящей работе рассматривается гибрид незавершённого метода ветвей и границ и параллельного варианта алгоритма имитационной нормализации для решения NP-полных задач оптимизации. Обоснованием выбора имитационной нормализации для комбинирования служили следующие соображения:

— алгоритм основан на простой и ясной идее — и легко реализуем;

— алгоритм может применяться почти для всех задач оптимизации;

— благодаря стохастическому критерию принятия решений и ненулевой вероятности принятия ухудшенных решений алгоритм не попадает в локальные оптимумы.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Алгоритм, который будет описан в данной работе, применим для решения многих задач дискретной оптимизации. В их числе задача коммивояжера (ЗКВ), минимизация недетерминированных конечных автоматов, минимизация дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), задача построения т.н. бинарных фазоманипулированных (БФМ) сигналов с минимальными автокорреляционными свойствами. Однако из-за ограниченного размера статьи алгоритм будет рассмотрен на примере решения ЗКВ.

Задача коммивояжера — классическая проблема дискретной комбинаторной оптимизации [2]. Она заключается в том, чтобы найти кратчайший Гамильтонов цикл в графе. В области задач дискретной оптимизации ЗКВ служит своеобразным полигоном, на котором испытываются новые методы решения.

Приведём некоторые варианты ЗКВ:

— «случайная» — все элементы матрицы ЗКВ генерируются как случайные величины с заданным законом равномерного распределения;

— «геометрическая» — случайно генерируются координаты всех городов как точек единичного квадрата (с равномерным распределением обеих координат), а элементы матрицы ЗКВ суть расстояния между соответствующими точками;

— «псевдо-геометрическая» — все элементы матрицы метрической ЗКВ после генерации дополнительно умножаются на случайные числа, формируемые с заданным нормальным законом распределения с $\mu = 1$.

По мнению авторов, именно псевдо-геометрический вариант является наиболее «приближенным к реальной действительности» — и при этом наименее исследованным [11]. Итак, в данной работе будет рассматриваться псевдогеометрическая ЗКВ, для которой общая длина пути будет вычисляться по формуле (x и y — координаты города, λ — некоторое случайное число, μ — дополнительный параметр города):

$$L = \sum \left[\sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} + \right. \\ \left. + \lambda \left(\mu_i + \mu_{i+1} \right)^2 \right]. \tag{1}$$

Описание алгоритма имитационной нормализации

Название данного алгоритма связано с методами имитационного моделирования в статистической физике [3], основанными на технике Монте-Карло. Нормализация — это физический процесс, который заключается в нагреве и последующем контролируемом охлаждении субстанции. Алгоритм имитационной нормализации можно представить следующей схемой [4, 5]:

1. Задать начальное корректное решение X^0 и считать его текущим ($X = X^0$).

2. Задать начальную температуру T_0 и считать её текущей ($T = T_0$).

3. Применить операцию мутации решения к текущему решению X и получить новый корректный вариант решения X'.

4. Найти изменение целевой функции $\Delta f = f(X') - f(X)$:

— если $\Delta f \le 0$ (решение улучшилось), то новый вариант решения считать текущим ($X = X'$), к п. 5;

— если $\Delta f > 0$ (решение ухудшилось), то принять с вероятностью $p = e^{\frac{-\Delta f}{T}}$ в качестве текущего решения новый вариант решения X', к п. 5.

5. Вызвать функции изменения текущей температуры и шага мутации.

6. Если не выполнен критерий останова, то перейти к п. 3.

Алгоритм имитационной нормализации для задачи коммивояжера [8]:

1. *Конфигурация* (допустимое решение). Города пронумерованы числами $k = 1..n$, каждый город имеет координату (x_i, y_i). Последовательность $(k_1, k_2, .., k_n)$ интерпретируется как порядок городов — маршрут объезда.

2. *Мутация*. Часть пути удаляется, а затем заменяется на другую, случайно выбранную, часть пути.

3. *Целевая функция*. Общая длина пути, вычисляемая по формуле (1).

4. *График охлаждения*. Начальная температура и конфигурация генерируется случайно. После выбора соседнего состояния X', увеличиваем температуру T таким образом, чтобы X' можно было принять с вероятностью 1. Далее понижаем температуру по формуле (2) через каждые d шагов.

2. КОМБИНАЦИЯ НЕЗАВЕРШЁННОГО МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ И ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВАРИАНТА АЛГОРИТМА ИМИТАЦИОННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ

Для многих *NP*-трудных задач наилучшие решения были получены алгоритмами имитационной нормализации. В настоящее время известно несколько подходов к распараллеливанию алгоритма имитационной нормализации [6, 7]:

— параллельный независимый запуск алгоритма на нескольких узлах;

— параллельный запуск алгоритма с периодическим обменом информацией;

— разбиение пространства решений на области и поиск решения в каждой области отдельно [8].

Для более оптимального разбиения с одновременным отсечением самых неоптимальных областей будем применять незавершённый МВГ, описанный в [9, 10].

Несложная эвристика, преобразующая завершённый МВГ в незавершённый, заключается в следующем. Каждый раз при получении очередной правой задачи [10] (назовём её задачей T) мы фактически строим *последовательность правых задач* (ППЗ) [9, 10]. Естественно, каждый раз строятся (и включаются в список задач для потенциального решения в последующем) и соответствующие левые задачи. Используя этот метод, получим непересекающиеся области возможных решений. Для ЗКВ замкнутость областей получается путем добавления дополнительных параметров: список A дуг, которые обязательно должны присутствовать в решении и список B дуг, которые *не* должны присутствовать в решении.

Преобразование пути осуществляется с помощью случайной перестановки двух номеров городов, но с ограничением: не принимать перестановку при удалении из неё дуг из списка A или при появлении в ней дуг из списка B.

Итоговый комбинированный алгоритм:

1. *сформировать области решений, построив ППЗ незавершенным МВГ, добавляя списки дуг, которые присутствуют и не присутствуют в решении;*

2. осуществить поиск решений в областях каждым узлом сети алгоритмом имитационной нормализацией с модифицированной мутацией;

3. в каждой области после выполнения фиксированного числа итераций узел инициирует обмен, передавая наилучшее изменение целевой функции f остальным узлам, которые в свою очередь перезапускают алгоритм;

4. узел заканчивает поиск, если в течение заданного числа итераций не произошло уменьшение целевой функции (длина пути) или превышено допустимое число итераций. Итоговое решение — наилучшее среди всех узлов.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для количества городов от 100 до 250 (в псевдогеометрической версии ЗКВ, не допускающей применения методов, описанных в [7, 8], а также в библиотеке TSPLib) нами были получены следующие результаты:

— последовательный алгоритм, использующий разбиение на области, по сравнению с классическим алгоритмом делает в 2—3 раза меньше итераций;

— в среднем параллельный алгоритм получал решение примерно в 2 раза быстрее, чем последовательный, применяющий разбиение на области;

— в среднем увеличение скорости выполнения параллельного алгоритма по сравнению с последовательным не зависит от параметров входного графа.

Также было проведено исследование качества решений при одинаковом времени работы алгоритмов. Получены следующие результаты. Параллельный алгоритм в среднем получает решение со временем выполнения на 1.8 % меньшим, чем последовательный, и на 2.7 % меньшим, чем классический (рис. 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе комбинированный метод ветвей и границ и параллельный алгоритмы имитационной нормализации показал высокую эффективность при решении задач дискретной оптимизации. Параллельный алгоритм может быть эффективно реализован на локальной вычислительной сети, поскольку не требует высокого трафика обмена между узлами сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goodman S., Hedetniemi S.* Introduction to design and analysis of algorithms. — N.Y., McGraw-Hill Book Company, 1977.

2. *Junger M., Thienel S., Reinelt G.* Provably good solutions for the traveling salesman problem. —

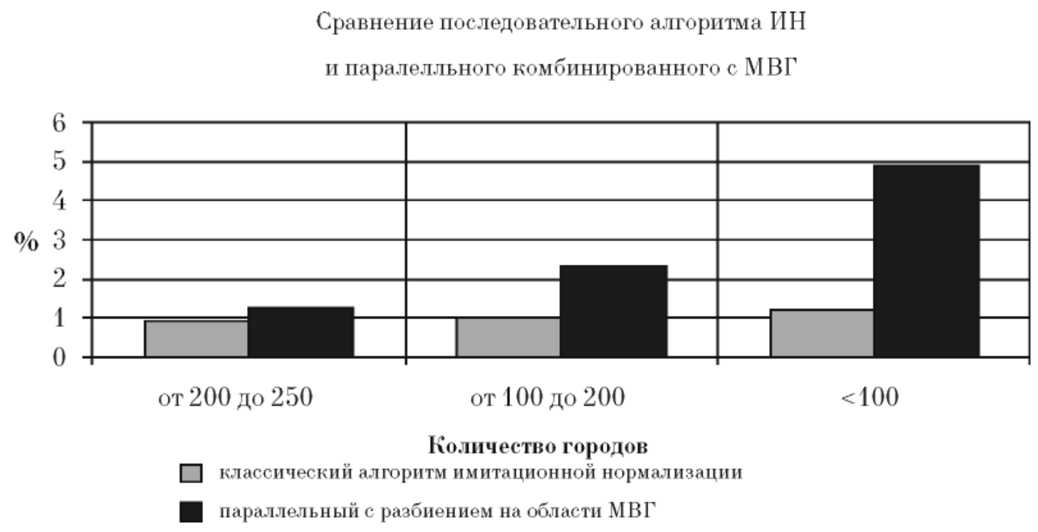

Рис. 1. Сравнение последовательного алгоритма ИН и параллельного комбинированного с МВГ

Zeitschrift für Operations Research, Vo. 40 (1994) 183—217.

3. *Binder K.* Monte Carlo methods in statistical physics. Berlin: Springer, 1978.

4. *Aarts E. H. L., Korst J. H. M., P. J. M. van Laarhoven.* Simulated annealing. In: Local search in combinatorial optimization. Chichester: Wiley, 1997, 91—120.

5. *Hromkovic J.* Algorithms for Hard Problems. — Springer, 2003.

6. *Greening D. R.* Parallel simulated annealing techniques. — Emergent computation. 1991, 293—306.

7. *Gomez G. C.* A general interface for distributed and sequential simulated annealing. — Qualifier II Research. Purdue University. 1994.

8. *Allwright J., Carpenter D.* A distributed implementation of simulated anneling for traveling salesman problem. — Parallel Computing. 1989. No 3, 335—338.

9. *Melnikov B.* Discrete Optimization Problems — Some New Heuristic Approaches, Proceedings of the Eighth International Conference on High-Performance Computing in Asia-Pacific Region, p.73—80, November 30 — December 03, 2005.

10. *Melnikov B.* Multiheuristic approach to the problems of discrete optimization — Cybernetics and Systems Analysis (National Academy of Sciences of Ukraine), 2006, No 3, 32—42.

11. *Мельников Б., Романов Н.* Ещё раз об эвристиках для задачи коммивояжёра. — В кн.: Теоретические проблемы информатики и ее приложений, вып. 4, Саратов, изд-во СГУ, 2001, С. 81—92.

Мельников Борис Феликсович — д.ф.-м.н., профессор кафедры «Прикладная математика и прикладная информатика», председатель докторского диссертационного совета по физико-математическим наукам, Тольяттинский государственный университет. Тел. (8482) 53-95-14, e-mail: B.Melnikov@tltsu.ru

Эйрих Станислав Николаевич — аспирант кафедры «Прикладная математика и прикладная информатика», Тольяттинский государственный университет. Тел. (8482) 20-21-22, e-mail: boots@rambler.ru

Melnikov B.F. — professor, department of Applied Mathematics and Applied Informatics, Togliatti State University. e-mail: B.Melnikov@tltsu.ru

Eyrih S.N. — post-graduate student, department of Applied Mathematics and Applied Informatics, Togliatti State University. e-mail: boots@rambler.ru