УДК 519.112.71

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

**О. А. Малюгина, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 05.03.2010 г.

**Аннотация.** В работе рассматривается задача о назначениях с двумя критериями. Предлагается алгоритм решения, в основе которого лежит переход к двойственной задаче с последующим использованием метода Удзавы.
**Ключевые слова:** Дискретная оптимизация, задача о назначениях, многокритериальная задача, двойственная задача, алгоритм решения.

**Abstract.** In the work the assignment problem with two criteria is considered. The solution algorithm where translation to a dual problem is assumed as a basis is offered. Udzava method is used to tackle the given problem.
**Key words:** Discrete optimisation, assignment problem, multicriterion problem, dual problem, solution algorithm.

Рассматривается задача распределения вакантных рабочих мест между претендентами, в которой каждый претендент умеет выполнять определённый круг работ, не обязательно совпадающий со всеми работами. Предприятие в свою очередь имеет возможность обучать претендентов некоторым работам, если претендент не умеет выполнять какую-либо из них.

Пусть имеется $m$ претендентов (каждому из них отвечает индекс $i$, $i=1,\ldots,m$) на $n$ рабочих мест (каждому из них отвечает индекс $j$, $j = 1,\ldots,n$), причём $m > n$ (наличие конкуренции). Введём следующие обозначения. Обозначим через

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ый претендент} \\ \text{умеет делать } j\text{-ую работу;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В результате каждому претенденту ставится в соответствии вектор — перечень работ, которые он умеет делать:

$$s^i = \left\{s_{ij}, j = \overline{1,n}, s_{ij} \in \{0,1\}\right\},\ i = \overline{1,m}.$$

Кроме того, известна стоимость $c_{ij}^1$ затрат, связанных с назначением $i$-ого претендента на $j$-ое место. Рассматривается ситуация, характеризующаяся тем, что имеется возможность дополнительного обучения работам (из некоторого списка работ $P \subseteq \{1,\ldots,n\}$). Известна стоимость $c_{ij}^2$ затрат, связанных с обучением $i$-ого претендента $j$-ой работе.

Потребуем выполнение следующего условия: если $i$-ый претендент назначен на $j$-ую работу, то он не может быть направлен на обучение.

Введём в рассмотрение матрицу согласия

$$D = \{d_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \quad d_{ij} = \{0,1\}\},$$

где

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-ый претендент} \\ \text{согласен обучаться } j\text{-ой работе;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Требуется распределить претендентов по рабочим местам так, чтобы каждый принятый на работу претендент занял одно место, и на каждое рабочее место назначено не более одного претендента, умеющего делать данную работу. Аналогично, каждый направленный на обучение претендент должен занять одно место, и на каждое место обучения должно быть направлено не более одного претендента, согласного обучаться данной работе. При этом затраты, связанные с назначением и с дополнительным обучением, должны быть минимальны.

Для формализации задачи введём переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-ый претендент} \\ \text{назначен на } j\text{-ое место;} \\ 0, \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-ый претендент} \\ \text{направлен на обучение } j\text{-ой работе;} \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Математическая модель задачи выглядит при этом следующим образом [1]:

$$L_1(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$L_2(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 y_{ij} \to \min \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} s_{ij}x_{ij} = 1,\ \forall j \text{ что } \sum_{i=1}^{m} s_{ij} \ge 1\ , & (3) \\ \sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m}, & (4) \\ \sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_{ij} = 1,\ \forall j \text{ что } \sum_{i=1}^{m} d_{ij} \ge 1\ , & (5) \\ \sum_{j=1}^{n} d_{ij}y_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m}, & (6) \\ x_{lk}\sum_{j\in P} y_{lj} = 0,\ \forall l = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n}, & (7) \end{cases}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ y_{ij} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

$$\text{где } s_{ij} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

$$d_{ij} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Для использования стандартного алгоритма решения задачи (венгерского метода) вначале произведём корректировку матриц затрат в соответствии с исходной информацией:

$$c_{ij}^1 = \begin{cases} c_{ij}^1, \text{если } s_{ij} = 1, \\ M, \text{если } s_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$c_{ij}^2 = \begin{cases} c_{ij}^2, \text{если } d_{ij} = 1, \\ M, \text{если } d_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$c_{ij}^2 = \begin{cases} c_{ij}^2, \text{если } j \in P, \\ M, \text{если } j \notin P, \end{cases}$$

где $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Кроме того заметим, что ограничение (7) можно переписать в эквивалентной форме

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 - \sum_{j=1}^{n} y_{ij},\ i = \overline{1,m}.$$

В результате математическая модель задачи примет вид:

$$L_1(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min \qquad (8)$$

$$L_2(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 y_{ij} \to \min \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} & (10) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m} & (11) \\ \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} & (12) \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m} & (13) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 - \sum_{j=1}^{n} y_{ij},\ i = \overline{1,m}, & (14) \end{cases}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ y_{ij} = \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Здесь целевые функции (8) и (9) минимизируют затраты на назначение и на дополнительное обучение. Требования (10)—(13) являются стандартными ограничениями задачи о назначениях. Ограничение (14) означает, что один и тот же претендент не может быть одновременно назначен на работу и направлен на дополнительное обучение.

Вместо двухкритериальной задачи рассмотрим задачу с целевой функцией следующего вида:

$$\min\left\{\max\left(L_1(X), L_2(Y)\right)\right\}.$$

Обозначим через $\mu$ выражение $\mu = \max\left(L_1(X), L_2(Y)\right)$. Кроме того, через S обозначит множество $\{x, y\}$, удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$S = \left\{ (x,y) : \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \le 1,\ i = \overline{1,m} \\ x_{ij} = \{0,1\},\ y_{ij} = \{0,1\}, \\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \right\}.$$

Задача при этом примет вид:

$$\mu \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} x_{ij} - \mu \le 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{2} y_{ij} - \mu \le 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij} - 1 \le 0, \; i = \overline{1,m},$$

$$x_{ij}, y_{ij} \in S, \;\; i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

$$\mu \ge 0.$$

Функция Лагранжа для данной задачи может быть записана в виде:

$$\Phi(x,y,\mu,u,v,w) = \mu + u\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} x_{ij} - \mu\right) +$$

$$+v\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{2} y_{ij} - \mu\right) + \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij} - 1\right),$$

$$u, v, w \ge 0, \;\; x, y \in S, \;\; \mu \ge 0.$$

В результате исходная задача переписывается следующим образом

$$\min_{\substack{x,y\in S\\ \mu\ge 0}} \max_{u,v,w\ge 0} \Phi(x,y,\mu,u,v,w),$$

двойственная к ней имеет вид

$$\max_{u,v,w\ge 0} \min_{\substack{x,y\in S\\ \mu\ge 0}} \Phi(x,y,\mu,u,v,w) = \max_{u,v,w\ge 0} \omega(u,v,w).$$

Схема двойственного алгоритма Удзавы для решения подобных задач выглядит следующим образом:

Шаг 0. Задать начальные значения $u^0 \ge 0$, $v^0 \ge 0$, $w^0 \ge 0$, $x^0, y^0, \mu^0, N = 0$.

Шаг 1. Вычислить $x^{N+1} = \arg\min_{x\in S} \Phi(x, y^N, \mu^N, u^N, v^N, w^N)$,

$$y^{N+1} = \arg\min_{y\in S} \Phi(x^N, y, \mu^N, u^N, v^N, w^N).$$

Проверка на останов. Если тест на останов выполнен, ты выписать ответ $X^* = X^{N+1}$, $Y^* = Y^{N+1}$.

Иначе вычислить $\mu^{N+1}$.

Шаг 2. Вычислить $u^{N+1}$, $v^{N+1}$, $w_i^{N+1}$ по формулам

$$u^{N+1} = \left[u^N + \alpha\, \hat{\nabla}_u \omega(x^{N+1}, y^{N+1})\right]^+,$$

$$v^{N+1} = \left[v^N + \beta\, \hat{\nabla}_v \omega(x^{N+1}, y^{N+1})\right]^+,$$

$$w_i^{N+1} = \left[w_i^N + \gamma\, \hat{\nabla}_{wi} \omega(x^{N+1}, y^{N+1})\right]^+, \;\; i = \overline{1,m},$$

где через $\hat{\nabla}\omega$ обозначено соответствующее значение субградиента двойственной функции $\omega(\cdot)$.

Увеличить $N$ на единицу. Переход к шагу 1.

Для реализации вычислительной схемы преобразуем функцию Лагранжа следующим образом

$$\Phi(x,y,\mu,u,v,w) = \mu + u\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} x_{ij} - u\mu +$$

$$+v\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{2} y_{ij} - v\mu + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_i x_{ij} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_i y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (uc_{ij}^{1} + w_i) x_{ij} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (vc_{ij}^{2} + w_i) y_{ij} + \mu(1 - (u+v)),$$

$$u, v, w \ge 0, \;\; x, y \in S, \;\; \mu \ge 0.$$

В результате на первом шаге алгоритма решаются следующие задачи:

1. $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u^N c_{ij}^{1} + w_i^N) x_{ij} \to \min_{x\in S}, \qquad (15)$$

2. $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (v^N c_{ij}^{2} + w_i^N) y_{ij} \to \min_{y\in S}, \qquad (16)$$

3. $$\mu(1 - (u^N + v^N)) \to \min_{\mu\ge 0}, \qquad (17)$$

где задачи 1 и 2 являются задачами о назначениях с изменёнными в процессе работы алгоритма матрицами затрат [2].

Заметим, что в силу определения переменной $\mu$ справедливы ограничения

$$0 \le \mu \le \max(L_1(X^N), \;\; L_2(Y^N)).$$

Таким образом, задача по $\mu$ решается следующим образом:

$$\mu^N = 0, \text{ если } u^N + v^N < 1,$$

$$\mu^N - \forall, \text{ если } u^N + v^N = 1,$$

$$\mu^N = \max\left(L_1\left(X^N\right), L_2\left(Y^N\right)\right),$$

$$\text{если } u^N + v^N > 1.$$

Окончательно алгоритм решения исходной задачи (1)—(7) принимает следующий вид.

Модельная схема алгоритма:

1. Ввести начальные данные

$$u^0 \ge 0, v^0 \ge 0, w^0 \ge 0, N = 0, \eta \ge 0,$$

$$\alpha_N = \beta_N = \gamma_N = \frac{1}{N+1}.$$

2. Решить две задачи о назначениях (15) и (16).

3. Проверить, являются ли полученные матрицы назначений $X^N$ и $Y^N$ допустимыми в исходной задаче. Т.е. проверить выполнение неравенств

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{N} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^{N} - 1\right| \le \eta, \;\; i = \overline{1,m}.$$

Если неравенства выполняются, то $X^N$ и $Y^N$ являются $\eta-$ оптимальными решениями, в противном случае переход к пункту 4.

4. Решить задачу по $\mu$ (17).

5. Пересчитать значения двойственных переменных по формулам

$$u^{N+1} = \left[u^{N} + \alpha_{N}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} x_{ij}^{N} - \mu^{N})\right]^{+},$$

$$v^{N+1} = \left[v^{N} + \beta_{N}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{2} y_{ij}^{N} - \mu^{N})\right]^{+},$$

$$w_{i}^{N+1} = \left[w_{i}^{N} + \gamma_{N}(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{N} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^{N} - 1)\right]^{+}, \;\; i = \overline{1,m}.$$

Увеличить $N$ на единицу. Перейти к пункту 2.

Рассмотренный алгоритм программно реализован в среде Delphi и протестирован на многочисленных примерах с матрицами размерностью от $3 \times 3$ до $300 \times 300$. Алгоритм показал свою работоспособность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюгина О. А.* Комплектование штатов при наличии обучения / О. А. Малюгина, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова // Системное моделирование социально-экономических процессов : Труды 32-ой международной научной школы-семинара, Вологда, 5-10 октября 2009 г. Ч. III / под ред. В. Г. Гребенникова, И. Н. Щепиной, В. Н. Эйтингона ; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 2009 — 366 с.

2. *Корбут А. А.* Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн ; Под ред. Д. Б. Юдина. — М. : Наука, 1969 — 368 с.

**Малюгина Ольга Александровна** — магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет, тел. 8 904 214 94 45, e-mail: romashka16.12@mail.ru

**Maljugina Olga A.** — student, Voronezh State University, 8 904 214 94 45, e-mail: romashka16.12@mail.ru

**Медведев Сергей Николаевич** — магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет, тел. 8 906 671 62 05, e-mail: sergfootbolist@mail.ru

**Medvedev Sergey N.** — student, Voronezh State University, 8 906 671 62 05, e-mail: sergfootbolist@mail.ru

**Чернышова Галина Дмитриевна** — доцент кафедры Математических методов исследования операций факультета ПММ, кандидат технических наук, Воронежский Государственный Университет, тел. 8 903 854 70 78, e-mail: chern@vsau.ru

**Tchernyshova Galina D.** — docent, Cand. Tech.Sci., Voronezh State University, 8 903 854 70 78, e-mail: chern@vsau.ru