УДК 62-50

СИНТЕЗ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.03.2010 г.

Аннотация. Предлагается новый метод синтеза конечномерного регулятора для устойчивого объекта с распределенным запаздыванием. Для синтеза регулятора применяется метод синтеза модальных систем управления в частотной области. Конечномерный регулятор получается с помощью аппроксимации объекта с распределенным запаздыванием отрезком ряда Бурмана-Лагранжа.
Ключевые слова: конечномерный регулятор, объект с распределенным запаздыванием, устойчивость, модальное управление, аппроксимация.

Abstract. A new method is proposed to construct a finite-dimensional modal controller for a stabile plant with distributed time-delay. The controller is obtained by using a method to synthesis of modal control systems in frequency domain. The finite-dimensional controller makes use of the Burman-Lagrange approximation of the plant with distributed time-delay.
Keywords: finite-dimensional controller, plant with distributed time-delay, stability, modal control, approximation.

ВВЕДЕНИЕ

В теории автоматического управления сохраняется постоянный интерес к системам с чистым и распределенным запаздыванием. Это объясняется тем, что в большинстве производственных процессов имеются запаздывания, которыми нельзя пренебречь. Основная трудность при анализе и синтезе систем с запаздыванием состоит в том, что объект с запаздыванием является бесконечномерным.

Простейший и достаточно широко распространенный на практике путь решения задач синтеза систем автоматического управления объектами с запаздыванием связан с изначальным приближенным представлением объекта известными методами «подходящей» моделью объекта с сосредоточенными параметрами и последующим применением хорошо разработанного аппарата теории управления сосредоточенными системами. К недостаткам такого подхода относятся, прежде всего, возможная потеря сущностных физических свойств объекта управления, порождаемых пространственной распределенностью параметров, а также ряд проблем технического характера, таких, как высокая размерность вектора переменных состояния сосредоточенной модели, неустойчивость процесса аппроксимации относительно погрешностей промежуточных вычислений и др.

Вообще говоря, для объектов с запаздыванием синтез конечномерных регуляторов по аппроксимирующим моделям может привести к неверным результатам, если синтез осуществлять основываясь только на точности аппроксимации, не учитывая специфики объекта с запаздыванием. Применение аппроксимации для синтеза регулятора не гарантирует существование конечномерного регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы с запаздыванием.

В данной статье рассматривается частотный метод построения конечномерного регулятора для устойчивого объекта с распределенным запаздыванием.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел, а через $\mathcal{H}_n$ — множество многочленов Гурвица из $\mathcal{R}_n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-07-00072-а).

Рассмотрим объект с распределенным запаздыванием

$$W(p)=\frac{B(p)}{A(p)}e^{-\beta(p)/\alpha(p)}, \qquad (1)$$

где $A(p)\in\mathcal{H}_m$, $B(p)\in\mathcal{R}_l$, $m\ge l$; $\alpha(p)\in\mathcal{H}_k$, $\beta(p)\in\mathcal{R}_q$; требуется найти передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V(p)=\frac{S(p)}{R(p)},\ S(p)\in\mathcal{R}_s, R(p)\in\mathcal{R}_r,\quad s\le r<+\infty, \qquad (2)$$

обеспечивающего устойчивость и заданные показатели качества переходного процесса замкнутой системы управления, структурная схема которой представлена на рис. 1.

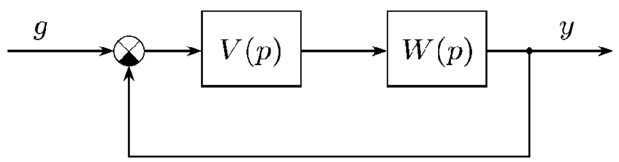

Рис. 1.

Таким образом, сформулированная выше задача сводится к проблеме синтеза конечномерного регулятора для бесконечномерного объекта, которым является объект с распределенным запаздыванием.

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Передаточная функция линейного стационарного объекта дает полное описание данного объекта. Все другие важные характеристики объекта получаются из передаточной функции. Передаточные функции объектов с запаздыванием являются трансцендентными, т.е. являются бесконечномерными, что представляет собой основную проблему при анализе и синтезе систем управления такими объектами. Наиболее простым и эффективным способом решения указанной выше проблемы можно считать аппроксимацию бесконечномерной передаточной функции с помощью дробно-рациональной функции конечного порядка. Выбор в качестве аппроксимирующих моделей дробно-рациональных функций объясняется тем, что, во-первых, вопросы аппроксимации дробно-рациональными функциями в комплексной области являются достаточно хорошо изученными в математической литературе, во-вторых, применение дробно-рациональных аппроксимаций дает возможность решать задачи анализа и синтеза систем управления запаздывающими объектами с помощью хорошо развитых методов теории автоматического управления сосредоточенными объектами.

Очевидно, что различные методы аппроксимации имеют свои достоинства и недостатки. С точки зрения задач управления эффективность того или иного способа приближения определяется тем, насколько полно и точно аппроксимирующая модель отражает свойства исходного бесконечномерного объекта управления. Определяющую роль при выборе класса аппроксимирующих функций играет область в комплексной плоскости, в которой осуществляется аппроксимация [1]. Так как в системе автоматического регулирования входные воздействия на объект с запаздыванием со стороны подсистемы с сосредоточенными параметрами можно считать функциями с ограниченным спектром, то выбор аппроксимирующей функции можно осуществлять на основе близости (в смысле определенных критериев) к точной передаточной функции объекта в некоторой области $|p|<\Omega$ комплексной переменной p, что соответствует полосе низких частот $0\le\omega<\Omega$. Ясно, что вся информация о поведении функции комплексного переменного во всей комплексной плоскости, и, следовательно, в области $|p|<\Omega$, заключена в ее особых точках. Поэтому передаточные функции аппроксимирующей модели $\tilde{W}(p)$ должны иметь те же особые точки (полюсы, алгебраические точки ветвления конечного порядка), что и передаточная функция исходного объекта $W(p)$, и главные части $\tilde{W}(p)$ и $W(p)$ в этих особых точках должны совпадать [1]. При такой аппроксимации ошибка воспроизведения сигнала будет тем меньше, чем уже его спектр [1]. Величину Ω следует выбирать такой, чтобы основная часть спектра типичных входных воздействий лежала в области $0\le\omega<\Omega$.

Ряды Тейлора используются для представления функций, аналитических в круговых областях. Отрезок ряда Тейлора представляет собой алгебраический многочлен. Поэтому в области высоких частот ошибка аппроксимации для широкого класса функций может неограниченно возрастать, что не позволяет широко использовать ряды Тейлора для аппроксимации объектов с запаздыванием.

Важным свойством дробно-рациональных аппроксимаций Паде является их лучшая сходимость по сравнению с рядами Тейлора. Однако еще лучше они сходятся в тех областях, где соответствующие степенные ряды расходятся, но являются асимптотическими разложениями [2, 3]. Часто это дает практический подход к задачам аналитического продолжения и имеет большое значение для приложений. Преимущество разложения в сходящийся ряд Тейлора заключается в том, что увеличение точности может быть достигнуто за счет добавления новых членов. В случае дробно-рациональных аппроксимаций может случиться так, что n-е приближение полностью не связано с предыдущими приближениями. Таким образом, для получения последующего приближения нужно вновь применять тот же самый метод, с помощью которого было получено предыдущее приближение. Упомянутое выше преимущество разложений в ряды Тейлора, по существу, сохраняется в некоторых дробно-рациональных аппроксимациях Паде [3], и этот факт вместе с тем, что эти аппроксимации Паде могут сходиться в областях, где ряд Тейлора расходится, усиливает прикладное значение аппроксимаций Паде.

Следующий важный вопрос при построении аппроксимаций Паде — исследование распределения полюсов аппроксимаций Паде. Характерной чертой аппроксимации Паде является то, что это рациональная функция. Поэтому если существует предел последовательности аппроксимаций Паде, то этот предел должен быть мероморфной (или даже голоморфной) функцией в некоторой области комплексной плоскости. Естественно ожидать, что полюсы и вычеты аппроксимаций Паде стремятся к соответствующим характеристикам предельной функции. Иными словами, если $W(p)$ имеет простой полюс, то вблизи этого полюса ожидается появление простого нуля знаменателя аппроксимаций Паде. При наличии у $W(p)$ кратного полюса ожидается появление рядом группы нулей знаменателя аппроксимаций Паде; с ростом порядка аппроксимации эти нули стягиваются к рассматриваемому полюсу $W(p)$. В тоже время, при фиксированном порядке аппроксимации Паде распределение полюсов, в том числе и правых полюсов, аппроксимаций Паде может отличаться от распределения полюсов предельной функции, что имеет негативное значение при анализе и синтезе систем управления объектами с распределенными параметрами. Задача распределения полюсов аппроксимаций Паде в общем случае является достаточно трудной.

Далее рассмотрим наиболее эффективный способ конечномерной дробно-рациональной аппроксимации бесконечномерных передаточных функций объектов с запаздыванием, основанный на рядах Бурмана-Лагранжа. Ряды Бурмана-Лагранжа — полезное для приложений обобщение рядов Тейлора. Ряды Бурмана-Лагранжа [4, 5] получаются при разложении одной аналитической функции $\Psi(p)$ по степеням другой аналитической функции $w(p)$:

$$\Psi(p)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n(p)=\sum_{n=0}^{N} d_n w^n(p)+\Delta_N(p). \quad (3)$$

Формула для коэффициентов ряда Бурмана-Лагранжа [4, 5] имеют следующий вид:

$$d_n=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)}{w^{n+1}(z)}\,dz. \quad (4)$$

Формула (4) получена при предположении, что $\Psi(p)$ и $w(p)$ правильны в некоторой точке a, причем $w(p)$ имеет в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область D, выбирается так, чтобы D содержала точку a, обе функции были правильны в $\bar{D}=D\bigcup C$ и чтобы $w(p)$ принимала свои значения лишь один раз. Отметим, что если $w(a)\neq 0$, то функцию $\Psi(p)$ можно раскладывать в ряд по степеням функции $w_1(p)=w(p)-a$.

Выражение для остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа определяется следующей формулой [21]:

$$\begin{aligned}\Delta_N(p)&=\sum_{n=N+1}^{\infty} d_n w^n(p)=\\&=\frac{w^{N+1}(p)}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)dz}{w^{n+1}(z)(w(z)-w(p))}.\end{aligned} \quad (5)$$

СИНТЕЗ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для решения поставленной задачи построим конечномерный регулятор с передаточной функцией (2). Обозначим

$$\varphi(p)=\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}. \quad (6)$$

Далее воспользуемся разложением Бурмана-Лагранжа для экспоненциальной функции и представим отрезок ряда Бурмана-Лагранжа в виде дробно-рациональной функции

$$e^{-\varphi(p)} = \frac{M(p)}{L(p)} + \Delta_N(p), \tag{7}$$

где $\Delta_N(p)$ определяется по формуле (5).

При этом следует обратить внимание на следующий важный факт. Для сохранения устойчивости системы управления с конечномерным регулятором необходимо потребовать, чтобы исходная функция $\exp(-\varphi(p))$ и аппроксимирующая дробно-рациональная функция имели равное число полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости. Так как функция $\exp(-\varphi(p))$ по условию является аналитической в комплексной плоскости, то аппроксимирующая функция не должна иметь полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости. Обеспечение этого условия накладывает довольно жесткие ограничения на выбор аппроксимирующей функции. Аппроксимация Бурмана-Лагранжа решает данную задачу.

Введем следующее обозначение:

$$W_0(p) = \frac{B(p)M(p)}{A(p)L(p)}. \tag{8}$$

В [6, 7] показано, что для произвольного заданного характеристического многочлена $D(p) \in \mathcal{H}_m$ замкнутой системы управления с передаточной функцией

$$\mathbf{\Phi}_0(p) = \frac{V(p)W_0(p)}{1 + V(p)W_0(p)} \tag{9}$$

искомые многочлены $S(p)$ и $R(p)$ могут быть найдены из полиномиального уравнения

$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \tag{10}$$

Условия разрешимости этого уравнения задаются следующей теоремой [6, 7].

Теорема 1. *Если многочлены $A(p) \in \mathcal{R}_m$ и $B(p) \in \mathcal{R}_l$ взаимно простые, то для любого полинома $D(p) \in \mathcal{R}_n$, $n \geq m + l$, существует единственная пара многочленов $S(p) \in \mathcal{R}_{m-1}$ и $R(p) \in \mathcal{R}_{n-m}$, являющаяся решением полиномиального уравнения (10).*

В дальнейшем будем предполагать, что взаимно простыми многочленами являются $A(p)$ и $B(p)$, а также $L(p)$ и $M(p)$.

Далее исследуем вопрос о физической реализуемости синтезированного модального регулятора. Имеет место следующая теорема [6, 7].

Теорема 2. *Передаточная функция регулятора (3) всегда реализуема, если выполняется неравенство*

$$n \geq m + \max\{m-1, l\}. \tag{11}$$

Для решения поставленной задачи синтеза конечномерного регулятора для объекта с распределенным запаздыванием и обеспечения астатизма 1-го порядка вместо уравнения (10) рассмотрим следующее полиномиальное уравнение:

$$B(p)M(p)S(p) + A(p)L(p)R(p)p = D(p). \tag{12}$$

Учитывая, что $L(p)$ и $A(p)$ — многочлены Гурвица, положим

$$\begin{aligned} D(p) &= A(p)L(p)D_1(p), \\ S(p) &= A(p)L(p)S_1(p). \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$B(p)M(p)S_1(p) + R(p)p = D_1(p). \tag{14}$$

Отсюда находим

$$S_1(p) = \frac{D_1(0)}{B(0)M(0)} \tag{15}$$

в предположении, что $B(0)M(0) \neq 0$. В противном случае астатизм обеспечить невозможно. Отсюда, учитывая формулу (2), получаем

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{S(p)}{pR(p)} = \\ &= \frac{A(p)L(p)D_1(0)}{D_1(p)B(0)M(0) - B(p)M(p)D_1(0)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Решим теперь задачу обеспечения устойчивости замкнутой системы управления. Для исследования устойчивости большое значение имеет следующая лемма, вытекающая из теоремы Руше [5].

Лемма 1. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри замкнутого контура C, за исключением конечного числа полюсов, имеют внутри C одинаковое число полюсов, а на C непрерывны вместе со своими производными, не обращаются в бесконечность и удовлетворяют условию*

$$|1 + f(z)| > |g(z) - f(z)|, \tag{17}$$

то функции $1 + f(z)$ и $1 + g(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей.

Так как замкнутая система управления с объектом (8) и регулятором (16) является устойчивой по построению, то согласно лемме 1 устойчивость системы с конечномерным регулятором (16) и объектом (1) будет обеспечена, если будет верным неравенство

$$
\begin{gathered}
|\,1+V(j\omega)W_0(j\omega)\,|> \\
>|\,V(j\omega)W(j\omega)-V(j\omega)W_0(j\omega)\,|,\;\; \omega\geq 0.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Нетрудно проверить, что это неравенство может быть представлено в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
|\,D(j\omega)\,|>|\,B(j\omega)S(j\omega)\,|\times \\
\times\,|\,\Delta_N(j\omega)\,|,\;\; \omega\geq 0,
\end{gathered} \tag{19}
$$

или, что то же самое,

$$
\begin{gathered}
\frac{|\,D_1(j\omega)\,|}{|\,D_1(0)\,|}> \\
>\frac{|\,B(j\omega)\,|}{|\,B(0)M(0)\,|}\,|\,\Delta_N(j\omega)\,|,\;\; \omega\geq 0.
\end{gathered} \tag{20}
$$

С помощью формул (3)—(5) после несложных преобразований можно показать, что за счет соответствующего выбора функции $w(p)$, порядка аппроксимации N и многочлена $D_1(p)$ условие (20) всегда будет выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый частотный метод синтеза конечномерных регуляторов для объектов с распределенным запаздыванием. Регулятор строится на основе метода синтеза модальных регуляторов. Конечномерный регулятор получается с помощью дробно-рациональной аппроксимации модального регулятора с запаздыванием. В качестве дробно-рациональной аппроксимации применяется отрезок ряда Бурмана-Лагранжа. Метод может быть обобщен на более широкий класс объектов с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рассудов Л. Н., Мядзель В. Н.* Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. — Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. — 144 с.

2. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

3. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 608 с.

4. *Девятов Б. Н.* Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1964. — 324 с.

5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.

6. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 4. — С. 17—20.

7. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез модальных систем управления // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 103—109.

Лозгачев Геннадий Иванович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, тел.: (4732) 208-715.

Lozgachev Gennadiy I. — Doctor of engineering sciences, Full professor, Head of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University, tel: (4732) 208-715.

Дылевский Александр Вячеславович — доктор технических наук, доцент кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, тел.: (4732) 208-715.

Dylevskii Alexander V. — Doctor of engineering sciences, Assistant professor, the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University, tel: (4732) 208-715.

Малютина Виктория Сергеевна — аспирантка кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, тел.: (4732) 208-715.

Malyutina Victoria S. — Post-graduate student, the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University, tel: (4732) 208-715.