УДК 681.5

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ ФОРМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

В. А. Каладзе

Международный институт компьютерных технологий

Поступила в редакцию 10.10.2009

Аннотация. Проведен сравнительный анализ форм эффективного преобразования динамических прогнозирующих фильтров случайных процессов, представляющих радио и отражённые локационные сигналы. Исследуются основные свойства системы фильтрации: прогнозируемость и устойчивость. Предложены итеративные схемы получения статистических оценок, в т.ч. скользящего среднего.

Ключевые слова: динамический случайный процесс, предиктор, экспоненциальный фильтр, итерация, адаптация.

Annotation. The comparative analysis of forms of effective transformation of dynamic filters of a prediction of casual processes representation the radio- and the reflected signals the radar-tracking is executed. The basic properties of system of a filtration are investigated: predictability and stability. Iterative schemes of receive of statistical estimations, including a sliding average are offered.

Keywords: dynamic casual processes, predictor, adaptation.

ВВЕДЕНИЕ

Наряду со статистическим анализом различных типов наблюдаемых случайных числовых последовательностей, содержащих полезный сигнал и искажающий статистический шум, большое значение имеет изучение математических принципов и качественных показателей эффективной обработки неопределённой информации, поступающей от различных физических источников.

Так для описания принятых радио- и локационных сигналов, а также наблюдаемых состояний сложных систем, представленных в виде динамического случайного процесса

$$Y(t) = m_Y(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k \varphi_k(t) \qquad (1)$$

с гармоническим базисом винеровского разложения и эволюционирующей функцией первого начального момента $m_Y(t)$, используются динамические предикторные модели (ДПМ) [1], позволяющие прогнозировать поведение основной тенденции подобного случайного процесса. Прогнозирующий фильтр (предиктор), положенный в основу ДПМ, построен на процедуре каскадной фильтрации, эффективным преобразованием которой служит итеративный экспоненциальный оператор

$$S_t(y) = (1-a)S_{t-1}(y) + ay_t \to \forall a \in (0,\ 1),$$

обладающий свойствами осреднения. Поскольку возможности эффективного преобразования определяют свойства каскада в целом, как динамической системы, то важно исследовать особенности экспоненциального оператора.

Колмогоровский временной подход даёт возможность использовать при формировании фильтров критерии, основанные на $\varepsilon(t)$-сравнении откликов объекта и модели без учёта близости их динамических характеристик. Это позволяет рассматривать различные подходы к решению задач идентификации на основе байесовского критерия среднего риска с функцией потерь

$$Q = Q[\varepsilon(t), \omega(t)],$$

а наиболее приемлемой весовой функцией $\omega(t)$ в условиях информационной неопределённости можно считать [2] экспоненциальную зависимость вида

$$\omega(t) = \exp\left\{-{}^{(t-T)}\!\big/_{T}\right\},$$

с настраиваемой величиной памяти T. Реализуемый на основе такого критерия экспоненциальный фильтр в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса широко используется, например, в электрических цепях на основе обычной RC-цепочки, и при приёме радиосигналов [3].

Таким образом, для решения задачи идентификации состояния сложной системы по единственной фазовой траектории применяются математические методы фильтрации нестационарного случайного процесса *Y(t)* со стационарными приращениями [4] по одной его реализации. Во всех задачах подобного типа обычно постулируется эргодичность приращений. Отметим, что в данной работе второе слагаемое в (1) $\Xi(t)=\sum_{k=1}^{n}V_k\varphi_k(t)$ рассматривается как случайный процесс стационарный или со стационарными приращениями.

В «узком» понимании эргодичности случайных процессов содержится весьма жёсткое условие означающее, что выборочная функция процесса, представляющая собой случайную временную последовательность (СВП), рассматривается как статистическая выборка случайной величины, определяемой произвольным сечением стационарного в «узком» смысле случайного процесса, что приводит к условию $cov(y_i y_{i-\tau})=0\ \forall\tau>0$. Эргодичность в «широком» смысле позволяет ослабить это условие, как, например, в [5]. Однако и это требование сильно сужает область применения идентифицируемых фильтров.

В данной работе принимается $\Xi(t)$ как центрированный стационарный случайный процесс (в предположении, что фильтрация будет проводиться без систематического отклонения), характеризующий в общем случае «цветную» помеху наблюдения, с ковариационной функцией $R(t_1,t_2)$ при $|R(t_1,t_2)|\in(0,M]\ \forall t_1,t_2\ \exists M>0$ [6].

Процедуры осреднения, применяемые при оценке математического ожидания на множестве значений случайной величины, в случае фильтрации случайного процесса, концептуально можно разделить на два класса:

• *конечные*, проводящие операцию осреднения однократно на всём накопленном массиве данных (статистической выборке),

• *итеративные*, формирующие в многошаговом процессе последовательность взаимно уточняющихся оценок среднего значения.

Множество конечных фильтров определяется средневзвешенным оператором $V_n(y)=\sum_{i=1}^{n}v_i y_i$ с «весами» v_i, равными соответствующим вероятностям значений y_i усредняемой репрезентативной выборки при естественном предположении, что данная выборка описывает полную группу событий. Наиболее востребованной его формой, так называемой процедурой накопления, является оператор среднего арифметического $A_n(y)=\sum_{i=1}^{n}y_i \Big/ n$. Оператор $A_n[\circ]$ чаще всего применяется на практике, поскольку равноценность наблюдаемых значений случайного процесса постулируется из-за отсутствия полной статистической информации об исследуемом процессе, что во многих случаях приводит к серьёзным проблемам.

К наиболее применяемым итеративным фильтрам для выделения во временной области статистически искажённого полезного сигнала относятся операторы экспоненциального и скользящего среднего.

ФОРМЫ ОПЕРАТОРОВ ФИЛЬТРАЦИИ

А. *Интегральная (непрерывная) форма оператора экспоненциальной фильтрации* $S[\circ]$ имеет вид

$$S[Y(t)]=S(t)=$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^t \exp\left\{-\frac{(t-\tau)}{T}\right\}y(\tau)d\tau, \tag{2}$$

где T – величина интервала переходного процесса динамического преобразования S, одновременно определяющая объём памяти фильтра, с весовой функцией

$$\omega(t)=\exp\left\{-\frac{(t-\tau)}{T}\right\}<1$$

и, соответственно, с нормой $\|S\|<1$. Это свойство далее будет подтверждено через итерационную форму оператора. Оператор $S[\circ]$ не искажает базисных функций гармонических и степенных разложений, а также в условиях однородности выборки формирует несмещённую оценку постоянного полезного сигнала [6].

Б. *Дискретная форма* оператора $S[\circ]$, пределом которой является неперово число, не представляет самостоятельного интереса и используется для перехода от непрерывной (теоретически и аппаратурно интересной) структуры к формам, предназначенным для расчётов и эмпирических исследований:

$$S_N(Y_n)=S_{n/N}(y)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n}\left(N-\frac{1}{N}\right)^{n-j}y_j, \tag{3}$$

при $N=T,\ n=t_n$. Здесь $T=N$ определяет величину памяти оператора для форм А и Б.

В. *Конечная форма оператора* $S[\circ]$

$$S_{\{n\}}(y) = \alpha \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^i \, y_{n-i} \qquad (4)$$

получается из (3) переиндексацией $i = n - j$, которая обращает порядок следования слагаемых, и заменой $\alpha = 1/N$.

Значение настраиваемого параметра фильтрации α, равное $1/N$, находится из (2)-(3) как правая граница его интервала варьирования, а коэффициент $\gamma_i = \alpha(1-\alpha)^i$, в момент n определяет информативность каждого члена y_{n-i} фильтруемой подпоследовательности из наблюдаемой СВП.

Таким образом, оператор (4), как частный случай $V_n[\circ]$, оценивающий взвешенное среднее, учитывает, по мере старения информации, убывающую информативность членов нестационарной СВП. Реально используемая в расчётах (с учётом точности получаемых оценок) глубина памяти оператора, определяемая величиной $(n - n_0)$, показывает, с какого момента $(n - n_0 - 1)$ и до момента $(n - n)$ утрачивается для вычисляемой оценки информационная значимость члена СВП y_{n-i}.

Г. *Итеративная (рекуррентная) форма* $S[\circ]$, используемая как многошаговая вычислительная процедура

$$S_n(y) = (1-\alpha) S_{n-1}(y) + \alpha y_n, \qquad (5)$$

представляет собой проекцию отрезка в себя, т.е. обладает свойством оператора сжатия, что гарантирует сходимость оптимально параметризованного алгоритма. Она применяется в итеративных расчётах реального масштаба времени и используется в процедурах адаптации.

Очевидное доказательство подтверждает высказанное утверждение о сходимости. В самом деле, оператор (4) можно рассматривать как линейный функционал, действующий в евклидовых пространствах из R^n в R^1, вида

$$S = \mathbf{\Gamma}^T Y,$$

где $S \in R^1$, $Y \in R^n$, $\mathbf{\Gamma}$ – матрица $(n \times 1)$ с элементами $\gamma_i = \alpha(1-\alpha)^i$, являющимися членами убывающей геометрической прогрессии, $\alpha \in (0,1)$.

Преобразование $\mathbf{\Gamma}$, удовлетворяя принципу Шаудера, является сжимающим отображением, т.е. имеет единственное решение.

Оценим норму $\|\mathbf{\Gamma}\| = \sqrt{S^2}$, используя неравенство Коши-Буняковского

$$S^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i \right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{\,2} \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}.$$

Поскольку из условий задачи наблюдаемую выборку можно считать равномерно ограниченной, то второй сомножитель $\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} < D \ \exists D > 0$, а первый сомножитель равен частичной сумме убывающей геометрической прогрессии с общим членом $\gamma_i^{\,2} = \left(\alpha(1-\alpha)^i\right)^2$ и знаменателем $(1-\alpha)^2$. Т.к. частичная сумма

$$\Sigma_n = \alpha^2[1-(1-\alpha)^{2n}] \Big/ [1-(1-\alpha)^2] < 1,$$

то $\|\mathbf{\Gamma}\| < 1$ и оператор $S[\circ]$ удовлетворяет условию сжатия, т.е. в каждый момент времени n имеет единственную неподвижную точку.

Адаптивный параметр фильтрации α, как видно из (5), устанавливающий уровень доверия к текущему наблюдению y_n, можно рассматривать как вероятность наблюдаемого значения выборочной функции. При этом он является оценкой условной вероятности $P(S_n/y_n)$, определяя тем самым $S_n(y)$, как $M[S_n/y_n]$ – условное математическое ожидание, оценивающие текущее значение полезного сигнала. Информационные коэффициенты $\gamma_i = \alpha(1-\alpha)^i$ описывают статистический закон распределения информации вдоль фазовой траектории в каждый момент времени.

В отличие от операторов с накопительной стратегией, которые придают каждому наблюдению одинаковую достоверность, т.е. при этом полагается, что наблюдения получены из однородной выборки (основное требование к условиям получения статистических оценок), оператор $S[\circ]$ за счёт набора своих «весов» способен подавлять возможную неоднородность интенсивности случайного процесса. Исследование формы **А** показало [6], что экспоненциальный характер весовой функции позволяет оператору $S[\circ]$ сохранять закономерности фильтруемого полезного сигнала *X(t)*. Поскольку полученные оценки оператора $S[\circ]$, начиная с некоторого номера, не зависят от начальных условий за счёт оперативного обновления информации, то он обладает свойством робастности и может быть использован для оценки функции первого начального момента как оператор математического ожидания $M[\circ]$ неоднородного случайного процесса без дорогостоящих параллельных опытов, которые не гарантируют однородности наблюдений столь необходимой в классических способах расчёта.

Д. *Дифференциальная форма оператора* $S[\circ]$

$$dS/_{dt} = \alpha\left(S(t) - y(t)\right)$$

может, в частности, использоваться в исследовании динамических характеристик каскадной фильтрации.

Пределы варьирования α определяются, как для самого оператора, так и для ДПМ [7], в соответствии с характером изменения $m_Y(t)$ и с относительной интенсивностью шума $\sqrt{\sigma^2_{\text{откл}}/\sigma^2_\xi}$. При оптимально подобранном интервале квантования временной оси, т.е. при $t \geq T$, когда состояние эффективного преобразования переходит в установившийся режим, для подавления несвязного шума эффективно $\alpha = 1/\sqrt{2T}$, что следует из отношения «сигнал: шум».

Связь α со временем T переходного процесса, т.е. с рекурсивной памятью фильтра, можно усмотреть не только при переходе от непрерывной к дискретной форме $S[\circ]$, но и из сравнения формы $\mathbf{\Gamma}$ с итерационной формой оператора A_n, определённого на выборке мощности n

$$A_n(y) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_{n-1}(y) + \frac{1}{n}y_n,$$

формирующей локальную оценку математического ожидания. Заменяя величину $1/n$ адаптивным параметром α, получим итеративную форму $\mathbf{\Gamma}$.

Аналогично можно получить, удобную для оперативной оценки точности многошаговых алгоритмов, выборочную итеративную оценку дисперсии в виде

$$\sigma^2_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\sigma^2_{n-1} + \frac{1}{n-1}\left(y_n - A_n(y)\right)^2.$$

Заменяя $A_n[\circ]$ на $S_n[\circ]$, получим робастную оценку дисперсии, а при замене n на $n+1$ это выражение позволяет вычислить текущую оценку точности прогноза СВП. Для оценки текущих значений ковариационной функции случайного процесса можно сформировать рекуррентную зависимость

$$cov_n(y_i y_j) = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)cov_{n-1}(y_i y_j) + \\ + \frac{1}{n-1}\left(y_{ni} - A_{ni}(y)\right)\left(y_{nj} - A_{nj}(y)\right).$$

Полученные последние два выражения дают возможность сформировать хорошо обусловленный вариант фильтра Калмана [8].

В литературе операция скользящего среднего представлена конечной формой оператора A_n для некоторого временного промежутка длиной m, называемого «скользящим окном» фильтрации, а далее следует словесный комментарий о способе перемещения этого «окна». Однако итеративную форму этого оператора можно записать в виде:

$$C_{m,n}(y) = C_{m,n-1}(y) + \frac{1}{m}\left(y_n - y_{n-m}\right),$$
$$m = 2j - 1.$$

Величина «окна» m определяет объём памяти фильтра, который для повышения точности оценки должен увеличиваться, а для адекватного пропускания полезного сигнала должен определяться из обратной пропорциональной зависимости к скорости изменения значений выделяемой последовательности – чем выше скорость, тем меньше должен быть объём памяти. В этом компромиссном выборе и состоит метод параметрической настройки оператора C_m. Однако в концепции скользящего среднего заложена систематическая ошибка, обусловленная стратегией конечного оператора накопления. У скользящего среднего получаемая оценка всегда относится к середине «окна» фильтрации, что легко усмотреть из непрерывной формы этого оператора, т.е. систематическая ошибка оценки скользящего среднего составляет $0.5(m-1)$. Существует взвешенная модификация оператора C_m, но полная неясность в способе определения её «весов» препятствует практической реализации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данном исследовании результаты позволяют применять математические методы фильтрации нестационарного случайного процесса, проводимые по наблюдениям за одной его реализацией, для решения задачи идентификации состояния сложной системы и при выделении полезного сигнала на фоне искажающего шума, поступающего от различных физических источников.

В ходе сравнительного анализа форм экспоненциального оператора фильтрации, являющегося эффективным преобразованием динамических моделей случайных процессов, определена взаимосвязь параметров преобразования с законом распределения наблюдаемой информации, выявлены области варьирования параметров, свойство робастности и возможность использовать итеративную форму оператора для получения статистических оценок неэргодических процессов по одной выборочной функции. Предложена рекуррентная форма оператора скользящего среднего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганцева Е. А.* Предикторные алгоритмические модели нестационарных случайных процессов/ Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе, Г. А. Каладзе // Вестник ВГТУ. Вып. 8.4. — Воронеж: ВГТУ, 2004. — С. 38—41.

2. *Маслов Е. П.* Самонастраивающиеся системы управления с моделью/ Е. П. Маслов, Л. М. Осовский // — «Автоматика и телемеханика», 1966, № 6. — С. 121—129.

3. *Романенко А. Ф.* Аппроксимативные методы анализа случайных процессов / А. Ф. Романенко, Г. А. Сергеев // — М.: Энергия, 1974. — 176 с.

4. *Колмогоров А. Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. ДАН СССР 1940, Т. 26, № 1. — С. 115—118.

5. *Ганцева Е. А.* Необходимые и достаточные условия эргодичности случайного процесса/ Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе // Всероссийская конференция «Интеллектуальные информационные системы». — Воронеж: ВГТУ, 2009. — С. 21—22.

6. *Ганцева Е. А.* Систематическое отклонение оператора экспоненциального сглаживания / Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе // Всероссийская конференция «Интеллектуальные информационные системы». — Воронеж: ВГТУ, 2009. — С. 32—34.

7. *Ганцева Е. А.* Исследование ДПМ в вычислительном эксперименте / Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе // Материалы 9-й междун. науч. конф. — Воронеж: ВГУ, 2009. — С. 331—334.

8. *Каладзе В. А.* Адаптивные оценки параметров фильтра Калмана. Труды междунар. научно-технич. конф. «Информационные и управляющие системы в пищевой и химической промышленности». — Воронеж, ВГТА. 2009. — С. 58—60.

Каладзе Владимир Александрович — к.т.н., доцент, Международный институт компьютерных технологий г. Воронеж. Тел. (4732) 678-238. E-mail: wakaladze@yandex.ru

Kaladze V. A. — Candidate of Technic Sciences, International Institute Computer Technologies, Voronezh. Тел. (4732) 678-238. E-mail: wakaladze@yandex.ru