УДК 519.81

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕЧЕТКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е. М. Мелькумова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.10.2009 г.

Аннотация. В статье рассматриваются подходы к решению задач нечеткого математического программирования, строятся функции принадлежности и предлагаются решения некоторых частных задач нечеткой оптимизации.

Ключевые слова: задача нечеткого математического программирования, сильное нарушение ограничений, вектор допустимых нарушени ограничений, функция принадлежности, компромиссное решение.

Abstract. This article considers approaches to solution of fuzzy mathematical programming problems, are constructed membership functions and are introduced solutions some private fuzzy optimization problems.

Key words: fuzzy mathematical programming problem, strong constraint violation, the vector of acceptable constraint violation, the membership function, compromise decision.

ЗАДАЧА НЕЧЕТКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Под *задачей нечеткого математического программирования* (ЗНМП) понимается задача максимизации (минимизации) целевой функции на заданном множестве допустимых альтернатив, в которой параметры целевой функции и ограничений являются нечеткими величинами:

$$\tilde{f}(x,\tilde{c}) \to \max,$$

$$\tilde{g}_i(x,\tilde{a}_i)\tilde{R}_i\tilde{b}_i, i=\overline{1,m} \qquad (1)$$

Здесь $\tilde{R}_i$ — нечеткое отношение между нечеткими величинами. Нечеткие параметры обозначены буквами со знаком волны наверху. Сформулированная задача не является оптимизационной задачей в классическом смысле. Прежде необходимо определить, что понимается под “максимизацией” целевой функции $\tilde{f}(x,\tilde{c})$, и что означает выполнение ограничения $\tilde{g}_i(x,\tilde{a}_i)\tilde{R}_i\tilde{b}_i$. Нечеткое отношение предпочтения $\tilde{R}_i$ представляет собой нечеткое подмножество декартового произведения $R \times R$. В дальнейшем в тексте в качестве $\tilde{R}_i$ будут использоваться нечеткие отношения предпочтения, являющиеся расширением на множество нечетких чисел обычных отношений предпочтения «≤» и «≥»:

$$\mu_{\tilde{\leqslant}}(A,B) = \sup_{u \le v} \min\{\mu_A(u), \mu_B(v) \mid u,v \in R\}.$$

Введем нечеткое отношение $\tilde{R}_0$ для сравнения значений целевой функции. Так как множество нечетких чисел не является линейно упорядоченным, в нем отсутствует максимальный элемент. Поэтому один из возможных подходов к решению ЗНМП состоит в замене “максимизации” функции $\tilde{f}(x,\tilde{c})$ задачей достижения нечеткой цели (относительно других подходов, см.[2]). Для этого вводится в рассмотрение нечеткая величина $\tilde{b}_0$, и различным значениям целевой функции назначаются численные оценки степени, в которой они удовлетворяют нечеткой цели. Чем больше величина $\tilde{f}(x,\tilde{c})\tilde{R}_0\tilde{b}_0$, тем меньше степень допустимости значения. Такой подход убирает различия между целевой функцией и ограничениями. В соответствиии с принципом Беллмана — Заде, решением такой задачи является нечеткое множество — пересечение нечетких множеств ограничений и целевой функции. Для рационального выбора четкой альтернативы рекомендуется взять $\bar{x}$, на котором достигается максимум функции принадлежности нечеткого решения.

Аналогично рассмотренному выше отношению предпочтения, на множество нечетких величин расширяются все функции со знаком волны наверху. Например, используемая ниже операция $\tilde{+}$ суммирования нечетких чисел имеет функцию принадлежности

$$\mu_{A\tilde{+}B}(t) = \sup_{u+v=t} \min\{\mu_A(u), \mu_B(v) \mid u, v \in R\}.$$

Теория решения задач нечеткого математического программирования на сегодняшний день достаточно развита [1],[2],[4]. Но в литературе недостаточно примеров, иллюстрирующих разработанные методы, что вызывает определенные трудности при практическом решении нечетких задач. Рассмотрим некоторые классы ЗНМП и подходы к их решению.

Задача вида

$$c^T x \to \min$$
$$Ax \approx\le b \qquad (2)$$

относится к задаче нечеткого линейного программирования и отличается от стандартной ЗЛП тем, что ограничения заданы нежестко, и могут "немного" нарушаться. Приведенная задача довольна распространена, и возникает тогда, когда точные значения величин, стоящих в правой части ограничений, неизвестны, и вместо них используются нижние гарантированные оценки. Заметим, что если потребовать строгого выполнения условий, полученная четкая задача может оказаться неразрешимой из-за пустоты допустимого множества.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Один из возможных способов формализации данной нечетко сформулированной задачи заключается в следующем. Вместо нахождения минимума целевой функции, зададим желаемое значение b_0:

$$c^T x \approx\le b_0 . \qquad (3)$$

Разным значениям целевой функции приписывается степень, с которой поставленная цель достигается. Если $c^T x \le b_0$, то цель достигается со степенью, равной 1. В противном случае степень достижения желаемого результата строго меньше 1. Зададим параметры $d_i \ge 0, i = \overline{0,m}$, определяющие "сильное" нарушение соответствующих ограничений. Будем считать, что ограничения нарушаются "сильно", если

$$c^T x > b_0 + d_0, a_i x > b_i + d_i, i = \overline{1,m}, \qquad (4)$$

где символ a_i используется для обозначения i-ой строки матрицы A.

Заметим, что некоторые авторы предлагают выбирать значение b_0, равное оптимальному значению целевой функции следующей задачи ЛП:

$$c^T x \to \min,$$
$$a_i x \le b_i + d_i, i = \overline{1,m}, \qquad (5)$$
$$x \ge 0 .$$

В этом случае целевая функция на допустимом множестве принимает значения, заведомо не превышающие b_0.

Определим функции принадлежности μ_i для ограничений. Функция принадлежности убывает на интервале $[b_i, b_i + d_i]$ и принимает значения от 0 до 1. Полагая линейную зависимость функции μ_i внутри интервала, получаем

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, a_i x \le b_i \\ 1 - \dfrac{a_i x - b_i}{d_i}, a_i x \in (b_i, b_i + d_i], i = \overline{1,m} \\ 0, a_i x > b_i + d_i \end{cases} \qquad (6)$$

Аналогично определяется степень, с которой достигается целевое значение целевой функции:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, c^T x \le b_0 \\ 1 - \dfrac{c^T x - b_0}{d_0}, c^T x \in (b_0, b_i + d_0], \\ 0, c^T x > b_0 + d_0 \end{cases} \qquad (7)$$

Как уже упоминалось выше, ЗНМП имеет нечеткое решение. Для нахождения четкой альтернативы необходимо определить точку $\bar{x}$, имеющую максимальную степень принадлежности нечеткому решению, то есть

$$\bar{x} = \arg \max_{x \ge 0} \min_i \{\mu_i(x)\} . \qquad (8)$$

Нетрудно проверить [3], что такая альтернатива является решением задачи

$$\lambda \to \max$$
$$c^T x \le b_0 + d_0(1 - \lambda)$$
$$a_i x \le b_i + d_i(1 - \lambda), i = \overline{1,m} \qquad (9)$$
$$\lambda \in [0,1], x \ge 0$$

Рассмотрим пример ЗНМП, для решения которой используется изложенный выше подход:

$$L = x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$3x_1 + 2x_2 \approx\ge 9$$
$$2x_1 - 3x_2 \approx\le 8 \qquad (10)$$
$$-x_1 + x_2 \approx\le 2$$
$$x_2 \approx\le 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Определим вектор допустимых нарушений ограничений $d = (d_i)_{i=\overline{0,m}} = (2,1,3,1,1)$. Зададим целевое значение b_0, для чего найдем оптимальное значение $\underline{b_0}$ целевой функции при четких ограничениях и при максимально допустимых нарушениях — $\overline{b_0}$, и затем $b_0 \in [\underline{b_0}, \overline{b_0}]$.

Решая задачу при четких ограничениях

$$\begin{gathered} L = x_1 + 4x_2 \to \max \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{gathered} \tag{11}$$

получим $x_1 = 23/2, x_2 = 5$, и следовательно, $\underline{b_0} = 63/2$.

Решая задачу при максимально допустимых нарушениях

$$\begin{gathered} L = x_1 + 4x_2 \to \max \\ -3x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 11 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{gathered} \tag{12}$$

получим $x_1 = 29/2, x_2 = 6$, и следовательно, $\overline{b_0} = 77/2$.

Имеем $\underline{b_0} = 63/2, \overline{b_0} = 77/2, b_0 = 70/2$.

Оптимальное решение $x_1 = 25/2, x_2 = 16/3$ допустимо со степенью $\lambda = 2/3$, и доставляет значение целевой функции 203/6. Это больше значения $\underline{b_0}$, полученного при четких ограничениях.

Весьма распространена задача математического программирования с нечеткой целевой функцией вида

$$z(x) = c^T x \to \max \tag{13}$$

при четких ограничениях

$$Ax \leq b, x \geq 0, \tag{14}$$

где $x^T = [x_1, x_2, .., x_n], b^T = [b_1, ..b_m] \in \mathbb{R}^n$ — вещественныевекторы; $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ — вещественная матрица; $c^T = [c_1, c_2, .., c_n]$ — вектор коэффициентов целевой функции [2].

Предположим, что лицо, принимающее решение (ЛПР) может только указать интервалы c_i^L, c_i^u и что только 1 элемент из пространства $[c_1^L, c_1^u] \times .. \times [c_m^L, c_m^u]$ является истинным вектором коэффициентов целевой функции.

Тогда задача линейного программирования имеет единственную целевую функцию, а мы сталкиваемся с проблемой, которая содержит бесконечно много целевых функций вида (13), которые должны быть минимизированы одновременно для

$$x \in X = \{X \in R^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Все векторы $c \in R^n$ из ограниченного интервала

$$C^0 = \{c \mid c_L \leq c \leq c_u\},$$
$$c_L^T = [c_1^L, .., c_n^L], c_u^T = [c_1^u, .., c_n^u]$$

должны рассматриваться как параметры.

Рассмотрим задачу линейного программирования, множество допустимых решений которой задается системой ограничений вида:

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 \leq 76 \\ x_1 + 2x_2 \leq 53 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 138 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 260 \\ x_1 + x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 103 \\ 2x_1 + x_2 \leq 68 \end{gathered} \tag{15}$$

и в целевой функции

$$z(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

коэффициенты заданы интервалами $c_1 \in [0.5, 10]$ и $c_2 \in [1.4, 11]$.

Поскольку нахождение полного решения очень трудно и требует больших вычислительных затрат, в проблемах оптимизации с несколькими целевыми функциями в большинстве случаев отказываются от определения множества эффективных решений,а ищут так называемое "компромиссное" решение,для определения которого предложены различные функции предпочтения, которые преобразуют бесконечное множество целевых функций в единственную компромиссную целевую функцию [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПРОМИССНОГО РЕШЕНИЯ

Самый простой способ такого подхода — это выбрать единственного представителя $\hat{c}_i$ для каждого интервала $[c_i^L, c_i^u]$ и вместо решения задачи перейти к решению ЛП — задачи вида:

найти

$$\max_x\{\hat{z}(x)\} = \{\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i x_i \mid Ax \le b, x \ge 0\}, \quad (16)$$

используя стандартные алгоритмы.

При рассмотрении вопроса выбора подходящих компромиссных целевых функций должны быть исключены два крайних случая:

$$z_{min}(x) = c_L^T(x) \text{ и } z_{\max}(x) = c_u^T(x),$$

так как они отражают суждение ЛПР, которое является либо слишком пессимистическим, либо, наоборот, слишком оптимистическим.

Для достижения компромиссного решения было б разумным выбрать в качестве представителя для каждого интервала значение $\hat{c}$ с наибольшими шансами появления. Однако обычно ЛПР не имеет достаточной информации и, следовательно, он в основном выбирает середину интервала $[c_i^L, c_i^u]$ и таким образом выбирает целевую функцию вида

$$z_{cp} = \frac{1}{2}[z_{min}(x) + z_{max}(x)] = \frac{1}{2}[c_L^T + c_u^T]x \quad (17)$$

В качестве развития этого варианта была предложена целевая функция, основанная на решающем правиле Гурвица

$$\begin{aligned} z_{Hur}(x) &= (1-\tau)z_{\min}(x) + \tau z_{\max}(x) = \\ &= [(1-\tau)c_L^T + \tau c_u^T]x, \end{aligned} \quad (18)$$

где τ — параметр оптимизма $(0 \le \tau \le 1)$, который отражает отношение к риску со стороны ЛПР. Однако все эти сокращения имеют тот недостаток, что они не учитывают весь интервал C_0.

Если ЛПР не может непосредственно выбрать единственного представителя $c \in C_0$ из интервала C_0, то можно использовать косвенный путь построения компромиссной целевой функции. Он заключается в том, что фиксируется множество состояний природы $z_j, j = \overline{1,s}$ (множество возможных значений) как состояний неопределенности. Выбор состояний природы должен осуществляться так, чтобы ЛПР мог:

1) указать вероятности состояний $p(z_j)$ так, что

$$\sum_{j=1}^{n} p(z_j) = 1\,;$$

2) определить для каждого состояния природы параметры настолько точно, насколько возможно.

В общем случае эти параметры состояния c_j не могут быть указаны однозначно, а просто указывается их порядок, т.е. они являются элементами интервала

$$[c_{ij}^L, c_{ij}^u] \subseteq [c_i^L, c_i^u], j = \overline{1,s}, i = \overline{1,n}.$$

Однако можно надеяться, что при умелом выборе состояний природы эти интервалы станут малыми, и тогда ошибка от сведения интервала к единственному значению не будет слишком велика.

Если выбранный представляющий вектор обозначить как $\hat{c}_j^T = [\hat{c}_{1j}, .., \hat{c}_{nj}]$, то ожидаемая величина

$$z_{\text{ож}} = \sum_{j=1}^{s}\hat{c}_j^T x p(z_j) = \sum_{j=1}^{s}\hat{c}_j^T p(z_j) x \quad (19)$$

должна быть выбрана в качестве функции компромисса.

Поскольку $\hat{c}_j p(z_j) \in C_0$ справедливо для любого вектора состояний природы и для каждого распределения вероятностей $\{p(z_j)\}$, любая компромиссная целевая функция $z_{\text{ож}}$ ведет к эффективному решению проблемы оптимизации. Но остается вопрос, сможет ли ЛПР получить необходимую информацию о величинах $p(z_j)$ и $\hat{c}_j$.

Решим задачу (15) при следующих данных. Для z_{Hur}^1 мы полагаем $\tau = 0,2$, а для z_{Hur}^2 $\tau = 0,875$. При вычислении ожидаемого значения целевой функции $z_{\text{îæ}}$ предполагаем, что имеется три состояния природы z_1, z_2, z_3 с вероятностями

$$p(z_1) = 0,4; p(z_2) = 0,3; p(z_3) = 0,3,$$

а соответствующие параметры состояния природы были заданы так:

$$c_{11} = 1; c_{12} = 4; c_{13} = 9;$$
$$c_{21} = 2,5; c_{22} = 5; c_{23} = 10.$$

1. Найдем два крайних варианта компромиссных целевых функций, которые получаются при максимальных и минимальных значениях их коэффициентов:

$$z_{\min}(x) = c_1 x_{1\min} + c_2 x_{2\min} = 0,5x_{1\min} + 1,4x_{2\min}$$
$$z_{\max}(x) = c_1 x_{1\max} + c_2 x_{2\max} = 10x_{1\max} + 11x_{2\max}$$

Для нахождения $z_{\min}$ решаем задачу (15) с целевой функцией вида

$$0,5x_1 + 1,4x_2 \to \max$$

Получаем решение

$$x^* = (7,23) \Rightarrow x_{\min} = (7,23).$$

Значит,

$$z_{\min} = 0,5*7+1,4*23 = 35,7.$$

Аналогично, для нахождения $z_{\max}$ решаем задачу (15) с целевой функцией вида

$$10x_1 + 11x_2 \to \max$$

Получаем решение

$$x^* = (28,8) \Rightarrow x_{\max} = (28,8).$$

Значит,

$$z_{\max} = 10*28+11*8 = 368.$$

Т.о. значение $z_{\min}$ отражает значение целевой функции соответствующей задачи при минимально возможных значениях c, а $z_{\max}$ — при максимально возможных значениях.

2. Определим компромиссную целевую функцию, основанную на решающем правиле Гурвица

а) при параметре оптимизма $\tau = 0,2$

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max,$$

$$z^1_{Hur} : 0,8z_{\min} + 0,2z_{\max} =$$
$$= 0,8(0,5x_1 + 1,4x_2) + 0,2(10x_1 + 11x_2) =$$
$$= 0,4x_1 + 1,12x_2 + 2x_1 + 2,2x_2 =$$
$$= 2,4x_1 + 3,32x_2;$$

Решаем задачу (15) с целевой функцией вида

$$2,4x_1 + 3,32x_2 \to \max.$$

Получаем решение $x^* = (16,18)$. Значит,

$$z^* = z^1_{Hur} = \frac{2454}{25} = 98,16.$$

б) при параметре оптимизма $\tau = 0,875$

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max,$$

$$z^2_{Hur} : 0,125z_{\min} + 0,875z_{\max} =$$
$$= 0,125(0,5x_1 + 1,4x_2) +$$
$$+0,875(10x_1 + 11x_2) =$$
$$= 0,0625x_1 + 0,175x_2 + 8,75x_1 +$$
$$+9,625x_2 = 8,8125x_1 + 9,8x_2.$$

Решаем задачу (15) с целевой функцией вида

$$8,8125x_1 + 9,8x_2 \to \max.$$

Получаем решение $x^* = (28,8)$. Значит,

$$z^* = z^2_{Hur} = \frac{6503}{20} = 325,15.$$

3. Теперь найдем ожидаемое значение целевой функции компромисса $z_{\text{ож}} = \sum_{j=1}^{3} \hat{c}_j^T p(z_j)x.$

$p(z_1) = 0,4; p(z_2) = 0,3; p(z_3) = 0,3$ — состояния природы.

$c_1^T = (c_{11}, c_{21}) = (1;2,5); c_2^T = (c_{12}, c_{22}) = (4;5);$ $c_3^T = (c_{13}, c_{23}) = (9;10)$ — транспонированные значения коэффициентов целевой функции задачи — параметров состояний природы.

И ожидаемая величина равна

$$z_{\text{ож}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2,5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix};$$

$$(x_1 \quad x_2) = \begin{pmatrix} 0,4+1,2+2,7 \\ 1+1,5+3 \end{pmatrix};$$

$$(x_1 \quad x_2) = \begin{pmatrix} 4,3 \\ 5,5 \end{pmatrix} (x_1 \quad x_2).$$

Решаем задачу (15) с целевой функцией вида

$$4,3x_1 + 5,5x_2 \to \max.$$

Получаем решение $x^* = (20,15)$.

Значит,

$$z^* = z_{\text{ож}} = \begin{pmatrix} 4,3 \\ 5,5 \end{pmatrix} (20 \quad 15) =$$

$$= 4,3*20 + 5,5*15 = 86 + 82,5 = 168,5.$$

Таким образом, существуют разные подходы сведения нечетко сформулированных задач к детерминированным аналогам. Для некоторых задач вместо минимизации (максимизации) целевой функции задается ее желаемое значение и находится степень, с которой это значение достигается. В других случаях вместо нахождения полного решения ищут "компромиссное" решение, используя различные функции предпочтения, преобразующие бесконечное множество целевых функций в единственную компромиссную целевую функцию. Стоит отметить, что выбор формы сведения зависит от конкретной задачи и доступной дополнительной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. Нечеткая оптимизация. — К.:Выща Школа,1991 — 191 с.

2. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981 — 206 с.

3. *Dubois D.* Fuzzy Sets and Systems. Theory and applications. — NY: 1980 — 120 p.

4. *Zimmerman H. J.* Description and optimization of fuzzy systems. — Internat. J. General Systems № 2, 1975 — P. 209—215.

Мелькумова Екатерина Михайловна — аспирант факультета ПММ, каф. математических методов исследования операций, Воронежский госуниверситет. Тел. (4732)208-282. E-mail: melkumova@vsu.ru.

Melcumova Ekaterina Michailovna — the post-graduate student at the faculty of Applied Mathematics, informatics and mechanics of the dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282. E-mail: melkumova@vsu.ru.