УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА СЕТИ

А. В. Копытин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.10.2009

Аннотация. Рассматривается начальная задача для волнового уравнения на геометрическом графе Г:

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x),\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = 0,$$

где функция $u(t,x):[0,+\infty]\times\Gamma\to\mathbb{R}$ задает отклонение от положения равновесия точки x графа в момент времени t. Исследуется вопрос о наличии такой независящей от начального смещения φ константы С, что выполнено неравенство: $\max\limits_{x\in\Gamma}|u(x,t)| \le C\max\limits_{x\in\Gamma}|\varphi(x)|$.

Ключевые слова: волновое уравнение, геометрический граф.

Annotation. Consider the initial value problem for wave equation on a graph Г:

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x),\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = 0,$$

where function $u(t,x):[0,+\infty]\times\Gamma\to\mathbb{R}$ determinates the shift of point $x\in\Gamma$ in the moment t. Test for existence of such a constant C, that $\max\limits_{x\in\Gamma}|u(x,t)| \le C\max\limits_{x\in\Gamma}|\varphi(x)|$ regardless of the initial shift φ.

Keywords: wave equation, graph.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, связанные с исследованием процесса распространения волн на пространственных сетях (геометрических графах), актуальны в самых различных разделах техники и естествознания (см. [1]). Они возникают при описании явлений в непрерывных системах сетеподобной структуры (электрических, гидравлических, акустических сетях, волноводах, упругих решетчатых конструкциях, электронных системах и т.д.).

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА СЕТИ

Геометрический граф Г — связное множество в $\mathbb{R}^3$, представляющее собой объединение конечного числа криволинейных отрезков $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ называемых ребрами графа, точками пересечения которых могут быть лишь их концы, называемые вершинами графа. Границей $\partial\Gamma$ графа Г называется некоторое подмножество множества вершин Г, принадлежащих единственному ребру. Вершины, не вошедшие в $\partial\Gamma$, называются внутренними.

На графе Г рассматривается задача Коши для волнового уравнения с нулевой начальной скоростью:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функция $u(t,x):[0,+\infty]\times\Gamma\to\mathbb{R}$ задает отклонение от положения равновесия точки x графа в момент времени t, причем при всех $t\ge 0$ функция $u(t,x)$ непрерывна на Г, дважды непрерывно дифференцируема на каждом ребре Г, обращается в 0 на границе $\partial\Gamma$ и удовлетворяет в каждой внутренней вершине v условию согласования

$$\sum_{i\in I(v)} \alpha_i u_i(t,v)'_x = 0, \tag{2}$$

где $I(v)$ обозначает множество номеров ребер, примыкающих к v, $\alpha_i \ge 0$, $\sum\limits_{i\in I(v)} \alpha_i = 1$, u_i — сужение функции u на ребро γ_i, а через $u_i(t,v)'_x$ обозначена «крайняя» производная функции u_i в конце v ребра γ_i по направлению «внутрь γ_i».

Решение задачи (2) на числовой оси в виде суммы прямой и обратной волны дает известная формула Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-t) + \varphi(x+t)\big), \tag{3}$$

причем начальная форма обеих волн определяется функцией, равной половине начального смещения φ. Рассматривая задачу на отрезке $[0,l]$ числовой оси с закрепленными концами, и используя то обстоятельство, что при отражении от закрепленного конца волна меняет свой знак и направление движения на противоположные, снова получим решение задачи в форме Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x-t) + \tilde{\varphi}(x+t)\right), \qquad (4)$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ — $2l$-периодическая функция, определяемая на отрезке $[0,2l]$ как

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,l] \\ -\varphi(2l-x), & x \in [l,2l] \end{cases}$$

Решение задачи на графе Г может быть получено с использованием закона прохождения волны через внутреннюю вершину графа. Этот закон (см. [2]) состоит в том, что волна, движущаяся в направлении вершины v по i-му ребру, при прохождении через нее разбивается на $I(v)$ волн, $I(v)-1$ из которых с коэффициентом $2\alpha_i$ пойдут по остальным ребрам, примыкающим к v, а одна, с коэффициентом $2\alpha_i - 1$, отразится от вершины и пойдет в обратном направлении по тому же ребру (см. рис. 1).

Тогда решение $u(t,x)$ задачи в точке x графа Г в момент времени t может быть получено в виде суммы волн, пришедших в эту точку в момент времени t, причем начальная форма всех волн равна половине начального смещения φ.

В случае, когда длины ребер графа Г рационально соизмеримы, можно считать, что граф состоит из ребер одинаковой длины, равной общей мере длин ребер графа Г. Тогда количество волн, пришедших в любую точку графа в любой момент времени не превосходит удвоенного числа ребер такого графа. С этим связано существование такой независящей от начального смещения φ константы С (см. [3]), что модуль отклонения от положения равновесия каждой точки x графа в любой момент времени t не превосходит произведения С и максимального по модулю начального смещения:

$$\max_{x\in\Gamma} |u(x,t)| \le C \max_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|. \qquad (5)$$

В частном случае, когда граф Г имеет структуру, изображенную на рис. 1, и состоит из m ребер одинаковой длины l с одним закрепленным концом, решение задачи на каждом ребре может быть выписано в явном виде:

$$u_i(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}_i(x-t) + \tilde{\varphi}_i(x+t)\right), \quad i = 1,\ldots,m \qquad (6)$$

где $\tilde{\varphi}_i(x)$ — $4l$-периодические функции, задаваемые на отрезке $[0,4l]$ следующим образом (см. [2]):

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & x \in [0,l] \\ -\varphi_i(2l-x), & x \in [l,2l] \\ \left(\varphi_i(x) - 2\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j\right)(x-2l), & x \in [2l,3l] \\ \left(2\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j - \varphi_i\right)(4l-x), & x \in [3l,4l] \end{cases} \qquad (7)$$

Из формул (6) и (7) следует, что неравенство (5) выполнено, например, при $C = 3$.

В случае же, когда длины ребер графа Г рационально несоизмеримы, количество волн, пришедших в любую точку графа в момент времени t неограниченно возрастает при возрастании t.

Рассмотрим простейший случай, когда граф состоит всего из двух ребер a и b, имеющих одну общую вершину v. Коэффициенты α_1 и α_2 в условии согласования можно считать равными, соответственно, $(1-\lambda)/2$ и $(1+\lambda)/2$, где $\lambda \in [0,1)$. В следующей таблице приводятся четыре возможных варианта прохождения вол-

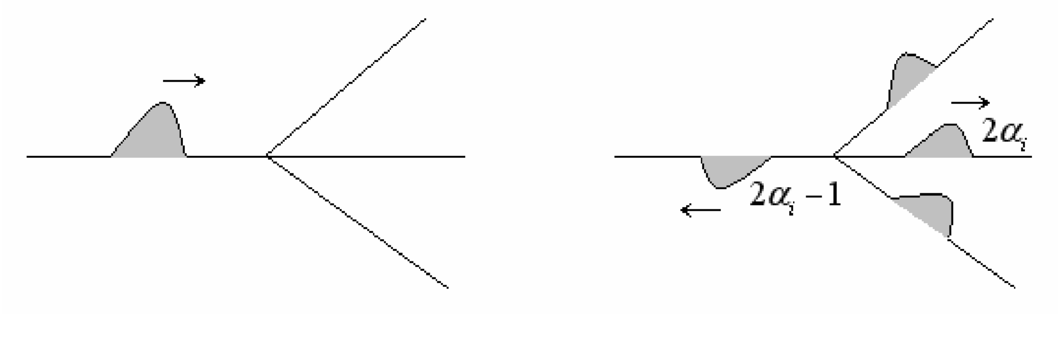

Рис. 1. Прохождение волны через узел

ны через вершину v с соответствующими коэффициентами:

$a \to a$	$-\lambda$
$a \to b$	$1-\lambda$
$b \to a$	$1+\lambda$
$b \to b$	λ

(стрелка показывает направление движения волны).

Через $\sigma(t, v, \lambda)$ обозначим сумму абсолютных значений коэффициентов волн, начавших движение на ребре a и пришедших в вершину v в момент времени t. Будем считать, что длина ребра a равна $1/2$, а длина ребра b — некоторое иррациональное число l. Тогда

$$\sigma(t, v, \lambda) = \sum_{n=0}^{[t]} |\mu(n, m, \lambda)|,$$

где $m = [(t-n)/l]$, $\mu(n, m, \lambda)$ — коэффициент, с которым в вершину v приходит волна, n раз прошедшая ребро a и m раз ребро b в обоих направлениях. Используя комбинаторные формулы, имеем

$$|\mu(n, m, \lambda)| =$$

$$= \frac{1-\lambda}{2} \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{m-1}^{k-1} (1-\lambda^2)^k \lambda^{m-k} (-\lambda)^{n-k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{m-1}^{k-1} (1-\lambda)^{k+1} (1+\lambda)^k \lambda^{m-k-1} (-\lambda)^{n-k} \right| =$$

$$= \frac{(1-\lambda)^2 \lambda^{n+m-2}}{2} \times$$

$$\times | \lambda F(1-m, -n, 1, 1-1/\lambda^2) -$$

$$-n(1+\lambda) F(1-m, 1-n, 2, 1-1/\lambda^2) |,$$

где $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ — гипергеометрическая функция.

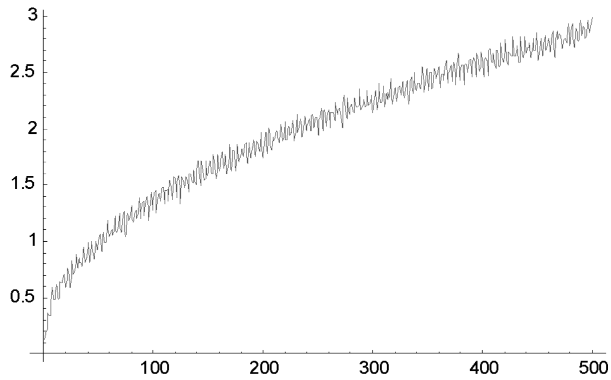

Рис. 2. График функции $\sigma(t, v, \lambda)$

РЕЗУЛЬТАТЫ

График функции $\sigma(t, v, \lambda)$ при $\lambda = 1/2$ и $l = \sqrt{2}/2$, построенный в системе Mathematica, показан на рис. 2

Хорошо видно, что существует число $\delta > 0$ такое, что $\sigma(t, v, \lambda) \geq t^{\delta}$. Ясно, что константа C, если она существует, должна быть не меньше максимального значения функции $\sigma(t, v, \lambda)$. Поэтому следует сделать вывод о том, что по всей видимости в общем случае не существует константы C, для которой выполняется неравенство (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин и др. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

2. *Копытин А.В.* Некоторые вопросы теории эволюционных задач на сетях. Автореф. канд. дисс. — Воронежский гос. ун-т, 2002. — 19 с.

3. *Копытин А.В.* Об оценке решений волнового уравнения на графе с соизмеримыми ребрами // Вестник ВГУ, Серия Физика. Математика, 2005, №1. — С. 179—182.

Копытин Алексей Вячеславович — к.ф.-м. н., доц. каф. ПиИТ факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета. Тел. 208-470. E-mail: kopytin@cs.vsu.ru

Kopytin A. V. — Candidate of physics-math. Sciences, Associate Professor. The dept. of the Programming and Information Technologies, Voronezh State University. Tel: 208-470. E-mail: kopytin@cs.vsu.ru