

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКОЙ

Н. А. Тюкачев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 1.03.2009 г.

Аннотация. Для моделирования гомогенных трехмерных тел в геоинформационных системах анализируются существующие представления, и предлагается использовать замкнутую поверхность, состоящую из нерегулярных треугольников (СТИН — **closed triangular irregular network**). Формулируется и доказывается теорема типа Понтрягина—Куратовского, позволяющая проверять планарность замкнутого графа на сфере.

Ключевые слова: Геоинформационная система, треугольная нерегулярная сеть, планарность графа, триангуляция, бинарные операции.

Abstract. For modeling homogeneous three-dimensional bodies in geo-information systems existing representations are analyzed, and it is offered to use the closed surface consisting of irregular triangles (СТИН — **closed triangular irregular network**). The theorem of type Pontrjagin—Kuratowski is formulated and proved, allowing to check planar closed the graph on sphere.

Keywords: GIS — geo-information System, TIN — triangular irregular network, planar the graph, triangulation, binary operation.

ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ 3D ОБЪЕКТОВ

Начальная классификация представления 3D объекта может быть описана на поверхности и объемной основе [5]. Объект называется представлением на основе поверхностей, если он ограничен поверхностными примитивами; объемным представлением, если внутренняя область объекта описана объемными примитивами. Рис. 1 показывает две категории пространственных представлений объекта.

К представлениям на основе поверхности относятся: регулярная сетка высот, регулярная сетка градиентов, ячеистая модель (TIN — **triangular irregular network**) и контурное представление (**b-rep — boundary representation**). К представлениям на основе объема относятся: трехмерный массив, дерево октантов, конструктивная стереометрия (**CSG — constructive solid geometry**) и трехмерные TIN (или TEN — **tetrahedral network**). Некоторые из этих представлений широко используются в компьютерных системах автоматизированного проектирования, но не используются в GIS. И поверхност-

ные и объемные модели пространственных данных делятся на векторные и ячеистые.

В векторной модели каждый объект задается множеством точек, обладающих координатами, и простейших объектов типа линий, полигонов и т.д., привязанных к этим точкам. Ячеистые модели предназначены для описания непрерывных полей, таких как отметки высот над уровнем моря, геомагнитных полей и т.п. Элементами ячеистых моделей являются: прямоугольники или параллелепипеды в растровой модели; одинаковые треугольники в регулярной

- | | |
|---|---|
| ■ | Поверхностные модели |
| ● | регулярная сетка (grid) |
| ● | регулярная сетка высот $Z=f(x,y)$ |
| ● | регулярная сетка градиентов ∇f |
| ■ | Ячеистая модель |
| ● | треугольная нерегулярная сеть (TIN) |
| ■ | Контурное представление (b-rep) |
| ● | каркасные модели |
| ● | граничные, поверхностные модели |
| ● | ограниченные замкнутой поверхностью TIN (СТИН) |
| ■ | Объемные модели |
| ● | трехмерный массив |
| ● | воксельное (дерево квадрантов или октантов) |
| ● | конструктивная (твердотельная) стереометрия (CSG) |
| ● | трехмерные TIN (или TEN) |

Рис. 1. Классификация моделей пространственных объектов

модели; различные треугольники в триангуляционной модели; тетраэдры в тетраэдрической сети.

Модель, использующая регулярную сетку высот, строго говоря, является моделью поверхности (рис. 2).

К трехмерным моделям регулярную сетку высот можно отнести, если ввести прямоугольник под сеткой и боковые грани. Эта модель требует значительных объемов памяти для объектов, требующих высокой разрешающей способности и для поверхностей с карнизами или с линейными особенностями.

Трехмерный массив — самая простая структура данных в трехмерной области. Структура легко реализуется, но не эффективна для некоторых задач, так как требует огромного размера памяти. Поэтому это представление мало подходит для представления объектов с высокой разрешающей способностью [4].

Значительно лучше представлять трехмерные объекты, изменяя размер элемента объема, применяя методику дерева квадрантов для 2D и октантов для 3D — **вокселей**.

Для воксельного представления в качестве базового блока выбирается прямоугольная или кубическая ячейка пространства — воксел. Рассматриваемая часть пространства (сцена) представляется трехмерным битовым массивом c_{ijk} . Элементы массива равны 1, если куб c_{ijk} содержится в объекте и 0 в противном случае.

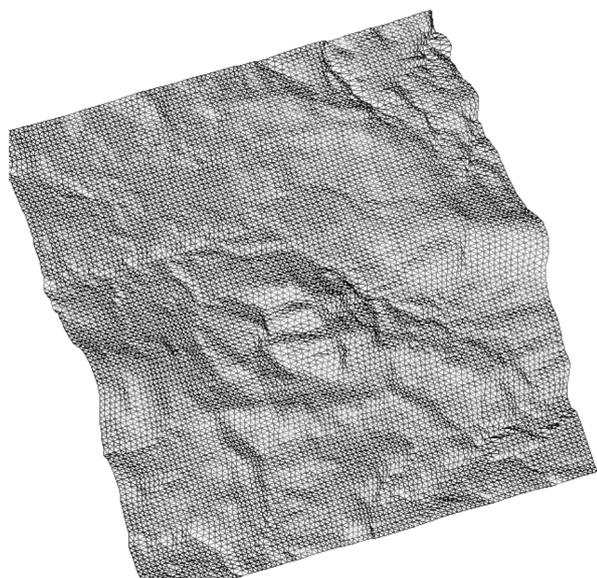


Рис. 2. Поверхность, заданная регулярной сеткой высот

Иногда считают что, элементы массива могут меняться в диапазоне $[0,1]$, задавая плотность в данной точке пространства (рис. 4). Воксельное представление позволяет достаточно легко вычислить объем или центр масс и позволяет эффективно выполнять булевы операции над телами (пересечение, объединение), но дает только приближение реального объекта, качество которого зависит от размера вокселей, а хорошее качество требует больших размеров памяти, объем которой растет как N^3 .

Термин дерево октантов означает иерархическую структуру данных. Воксельное представление часто используется в обработке изображения и компьютерной графике [10]. Как и в структуре дерева квадрантов, дерево октантов основано на рекурсивной декомпозиции и может использоваться для того, что бы закодировать трехмерные объекты [7, 3, 2, 5, 4]. В дереве октантов каждый узел — или лист, или имеет восемь потомков. Дерево делит пространство области на кубы, которые находятся внутри или снаружи объекта. Корень дерева представляет куб с ребром длины $2n$ [6]. Этот куб делится на восемь идентичных кубов, называемых октантами с длиной ребра $2n-1$. Каждый октант представлен одним из восьми потомков корня. Если октант содержит часть тела, то его называют “серым узлом”, и он делится на еще восемь идентичных кубов, которые являются потомками рассматриваемых октантов. Этот процесс

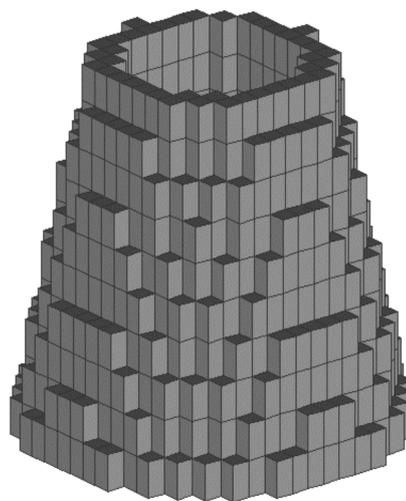


Рис. 3. Пример представления сплошного тела трехмерным массивом

повторяется рекурсивно до тех пор, пока не будут получены октанты с заданной точностью (см. рис. 4). Минимальный размер октанта, который определяет число делений, — один из важных факторов в обработке дерева октантов. Meagher [7] отмечает в качестве одного из преимуществ дерева октантов его простоту для логических операций и визуализации, но эта модель требует значительных объемов памяти.

Трехмерные TIN — расширение 2D TIN, иногда называемых TEN (тетраэдрическая сеть). Объект описывается [1] связанными, но не пересекающимися тетраэдрами (рис. 5).

Аналогично 2D TIN, использование TEN удобно при операциях над 3D-объектами при изображении и при анализе трехмерных тел. Нерегулярная сеть TEN создается тетраэдрами, каждый из которых имеет четыре вершины, шесть ребер и четыре грани. Структура может быть сгенерирована с помощью таких же методов, что и 2D TIN. Так, например, алгоритмы двумерных диаграмм Вороного могут быть расширены на трехмерный случай [9]. Другие методики генерации TEN могут быть найдены в работе Midtb [8].

Тетраэдрические сети хорошо подходят для описания гетерогенных тел, но, во-первых, мало

эффективных алгоритмов построения таких сетей, во-вторых, необходимо большое число тетраэдров. Так, например, для TEN-представления параллелепипеда потребуется 8 тетраэдров (рис. 6).

Частным случаем граничной модели является модель трехмерного тела (рис. 7), у которого граница представляет собой замкнутое множество нерегулярных треугольников (CTIN — **closed triangular irregular network**). На рис. 7 представлены верхняя и нижняя триангулированные поверхности слоя. Боковая граница, которая тоже должна быть триангулирована, на рисунке не показана.

Эта модель менее всего используется при создании GIS, но более всего подходит для описания гомогенных трехмерных областей (например, слоев породы с одинаковой литологией или стратиграфией). Модель CTIN обладает следующими достоинствами:

- в случае изменения координат узловой точки, топология поверхности не меняется, как это могло бы быть в случае использования, например, плоских четырехугольников;
- логические операции над такими телами (объединение, пересечение, вычитание) сводятся к операциям пересечения треугольников с многогранниками;

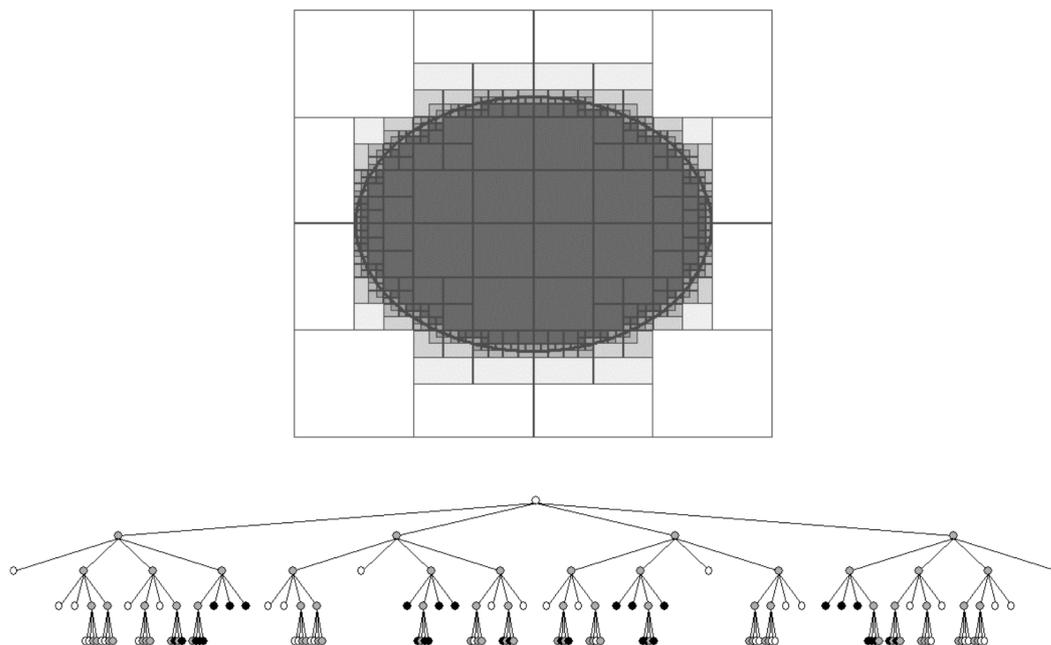


Рис. 4. Пример воксельного представления плоской фигуры

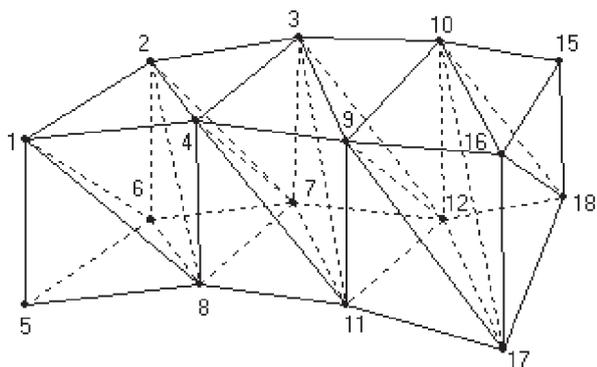


Рис. 5. Пример трехмерной ТЕН-модели

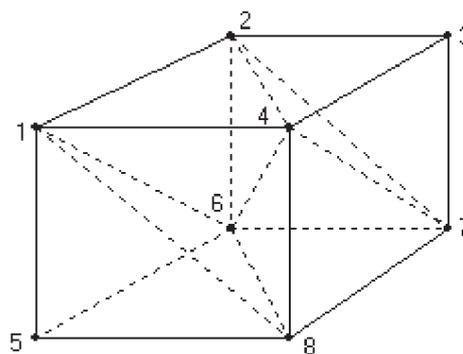


Рис. 6. Разбиение параллелепипеда на 8 тетраэдров

- результат логических операций над двумя СТІН-телами дает СТІН-тело;

- требует значительно меньше ресурсов для хранения и вычислений, чем модель ТЕН, основанная на тетраэдрах.

Именно СТІН-модель будет использоваться в этой работе.

СТІН-ПОВЕРХНОСТИ

Триангуляция тесно связана с теорией графов, в частности, с теорией планарных графов. Поэтому напомним некоторые определения и понятия.

Графом называется непустое множество $G(X, U)$, где X — множество вершин (узлов) графа; U — множество ребер (дуг) графа,

Граф называется полным, если любые две его вершины смежны, т.е. имеют общее ребро.

Говорят, что граф укладывается на поверхности S , если его можно нарисовать на S так, что никакие два его ребра не пересекаются в точках, не являющихся вершинами графа [11].

Граф называется планарным, если его можно уложить на плоскости. Плоский граф — граф, уложенный на плоскости.

Триангуляцией (triangulation) называется планарный граф, все грани которого являются треугольниками.

Планарный граф, не имеющий петель и кратных ребер, степени вершин которого $\deg V_i \geq 3$, и однозначно укладываемый на сфере, будем называть простым сферическим графом.

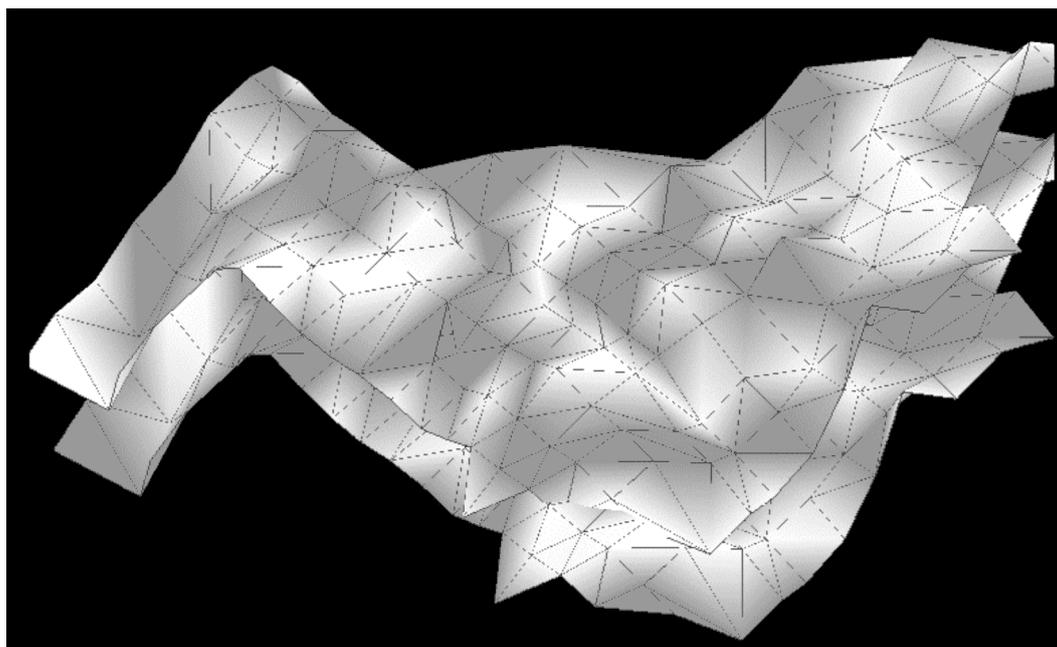


Рис. 7. Пример трехмерной СТІН-модели для слоя

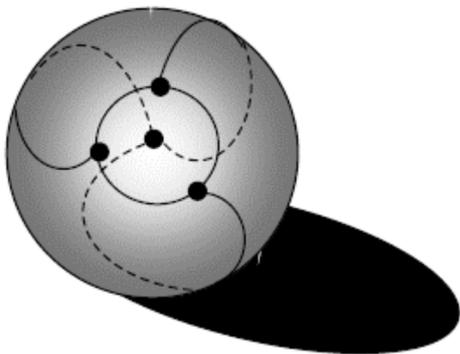


Рис. 8. Пример графа уложенного на сферу

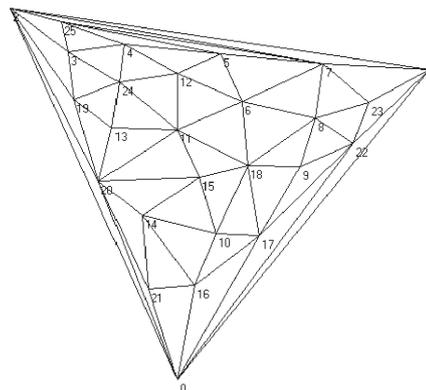


Рис. 9. Планарный граф изоморфный замкнутому планарному графу на сфере

Теорема 1. Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть стереографическую проекцию. Пусть граф G уложен на сфере. Проведем плоскость Q , касательную к сфере, так, чтобы северный полюс N (точка, диаметрально противоположная точке касания) не лежал на ребре и не совпадал с вершиной графа G . Теперь рассмотрим граф G , полученный стереографической проекцией графа G из точки N на плоскость Q . Поскольку существует биективное соответствие между точками сферы, отличными от N , и их стереографическими проекциями, то граф G плоский и изоморфен графу G . Следовательно, G — планарный граф.

Теорема 2. Любой замкнутый простой сферический граф с треугольными гранями изоморфен плоскому графу в треугольнике (рис. 9).

Доказательство. Для замкнутого простого сферического графа любой северный полюс

стереографической проекции лежит в треугольнике, например, 012 . По свойствам стереографической проекции все остальные узлы, спроецированные на плоскость, лежат внутри этого треугольника.

Изучение числовых характеристик планарных графов было начато Эйлером, который доказал теорему:

Теорема Эйлера. Для любого планарного графа выполняется соотношение

$$B - P + \Gamma = 2, \quad (1)$$

где B — число вершин графа, P — число ребер, Γ — число граней.

Опираясь на теорему Эйлера, можно доказать, что графы K_5 , K_6 , $K_{3,3}$ (рис. 6) не являются планарными. Заметим, что графы K_6 , $K_{3,3}$ изоморфны.

Определение условий планарности графов — одна из наиболее трудных задач теории графов. В общем случае решение было предложено Понтрягиным и Куратовским. Чтобы

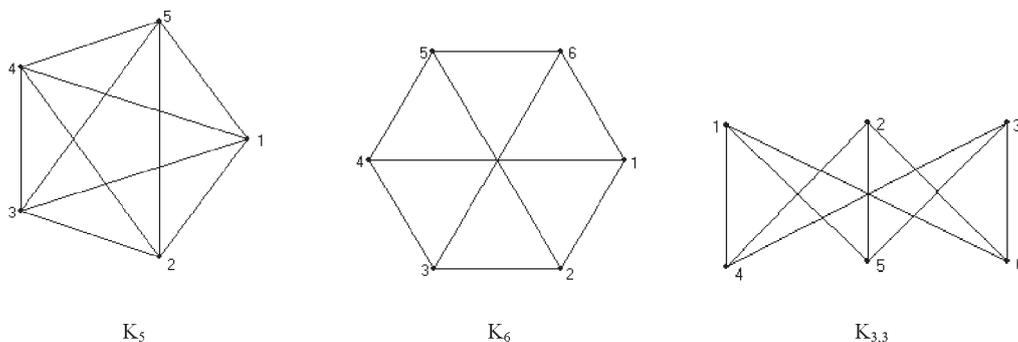


Рис. 10. Примеры непланарных графов.

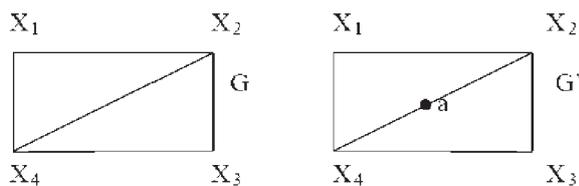


Рис. 11. Пример операции подразделения ребра

сформулировать их результаты, необходимо ввести определение гомеоморфизма, опирающееся на понятие операции подразделения ребра.

Говорят, что граф $G'(X', U')$ получен из графа $G(X, U)$ операцией подразделения ребра $(x_i, x_j) \in U$, если $X' = X \cup a$, $U' = [U \setminus (x_i, x_j)] \cup [(x_i, a) \cup (a, x_j)]$. На рис. 11 граф $G'(X', U')$ получен из графа $G(X, U)$ подразделением ребра (x_2, x_4) , т.е. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_2, x_4)\}$, $X' = X \cup a$, $U' = [U \setminus (x_2, x_4)] \cup [(x_2, a) \cup (a, x_4)]$.

Два графа G_1, G_2 называются гомеоморфными, если существует такой граф G' , который может быть получен как из графа G_1 , так и из G_2 операцией подразделения ребра конечное число раз. Или: графы G_1 и G_2 гомеоморфны, если существуют изоморфные подразделения G'_1 и G'_2 .

Теорема Понтрягина—Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 6).

Теорема 3. Для незамкнутых графов с треугольными гранями справедливы следующие зависимости числа ребер и граней от узлов [12]:

$$\Gamma = 2B - C - 2; \quad (3)$$

$$P = 3B - C - 3, \quad (4)$$

где C — количество ребер (или узлов) на внешней границы графа.

Следствие из теорем 2 и 3. Для замкнутой триангуляции (СТГН), которая является простым сферическим графом, справедливы следующие зависимости числа ребер и граней от узлов:

$$\Gamma = 2B - 4; \quad (5)$$

$$P = 3B - 6. \quad (6)$$

Доказательство следует из формул (3), (4) и теоремы 2, согласно которой число граничных ребер для замкнутого на сфере графа равно 3. Число граней следует увеличить на 1, присоединив внешнюю грань, которая тоже является треугольником.

Это следствие можно рассматривать как необходимое и достаточное условие планарности на сфере замкнутого графа. Формулы (5) и (6) могут быть использованы для проверки правильности построения триангуляции замкнутой поверхности и, в частности, показывают, что число ребер P может принимать значения $3, 6, 9, 12, \dots$, а число граней $\Gamma - 2, 4, 6, 8, 10, \dots$

Рассмотрим несколько простых примеров замкнутой триангуляции поверхности.

1. Пусть поверхность задается 4-мя вершинами. Тогда тело представляет собой тетраэдр (рис. 12), соответствующий граф — полный (рис. 13), а плоский граф в треугольнике изображен на рис. 14.

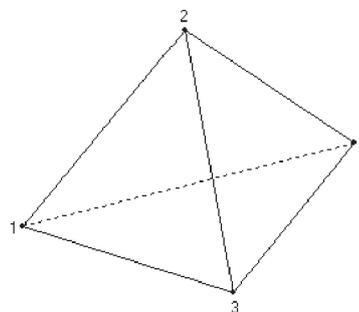


Рис. 12. Тетраэдр

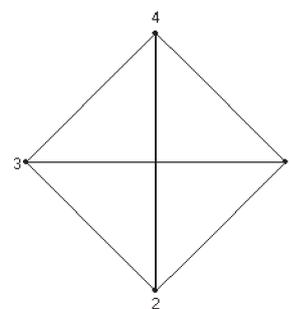


Рис. 13. Полный граф тетраэдра

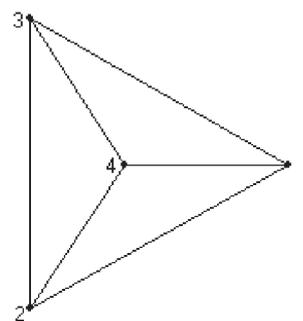


Рис. 14. Плоский граф тетраэдра

2. Рассмотрим **СТІН-поверхность**, задаваемую 5-ю вершинами. На рис. 15 изображен шестигранник, определенный этими вершинами. Соответствующий граф не является полным (рис. 16). На рис. 17 представлен плоский граф в треугольнике.

3. Пять вершин графа могут задавать и тетраэдр, если считать, что 5-я точка лежит внутри тетраэдра (рис. 18) и разбивает тетраэдр на четыре тетраэдра. В этом случае соответствующий граф — полный (рис. 19), а представление тела является **ТЕН-представлением**. Число ребер равно $10 \neq 3V-6$, число граней равно $8 \neq 2V-4$, то есть оба уравнения (5), (6) следствия не выполняются — соответствующего плоского графа не существует.

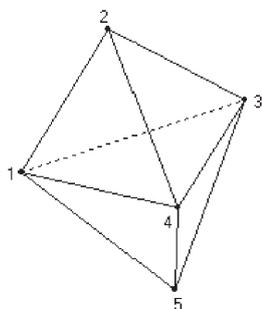


Рис. 15. Шестигранник

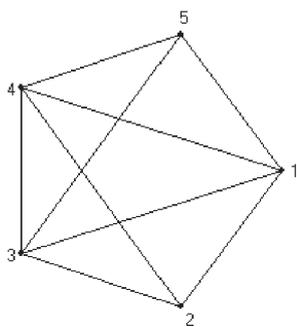


Рис. 16. Неполный граф шестигранника

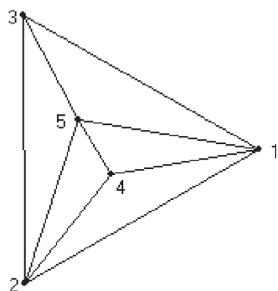


Рис. 17. Плоский граф шестигранника

4. Существует еще один случай пяти вершин графа, когда одна из вершин, например, 4-я принадлежит ребру 3—5 (рис. 20). Этот граф (рис. 21) изоморфен графу из примера 2.

5. Рассмотрим теперь **СТІН-поверхность**, задаваемую 6-ю вершинами. На рис. 22 изображен восьмигранник, определенный этими вершинами. Соответствующий граф не является полным (рис. 23). На рис. 24 представлен плоский граф в треугольнике.

6. Шесть вершин могут задавать другую **СТІН-поверхность**, которая ограничивает **ТЕН-тело** (рис. 25), состоящее из тетраэдров 1—2—3—4, 2—3—4—5 и 3—4—5—6. Соответствующий граф также не является полным (рис. 26), но не изоморфен графу на рис. 23. На рис. 27

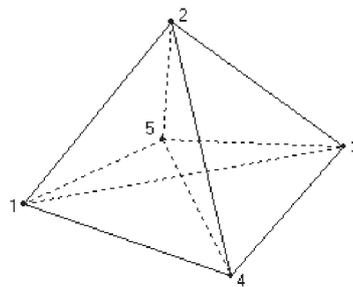


Рис. 18. Тетраэдр с внутренним узлом

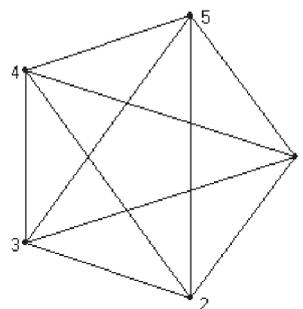


Рис. 19. Полный граф K5

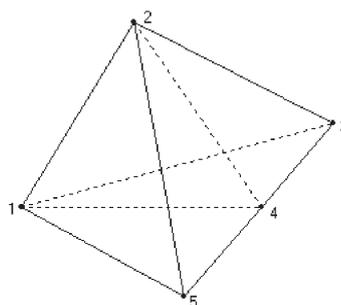


Рис. 20. Тетраэдр с узлом на ребре

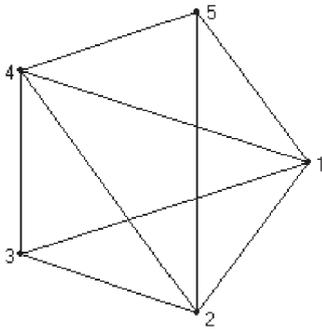


Рис. 21. Неполный граф шестигранника

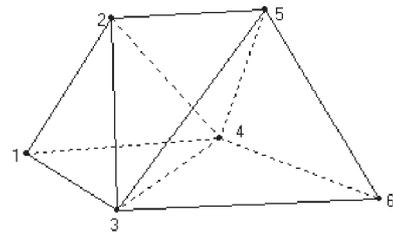


Рис. 25а. Восьмигранник

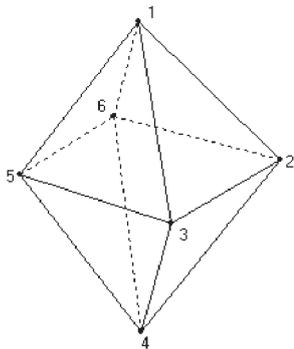


Рис. 22. Восьмигранник

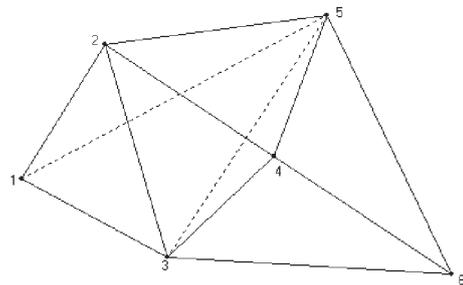


Рис. 25б.

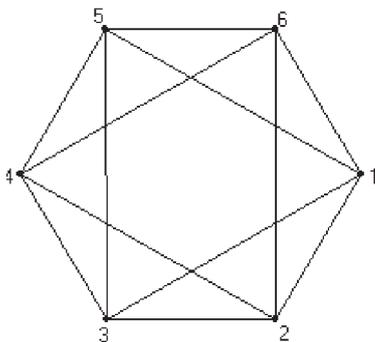


Рис. 23. Неполный граф восьмигранника

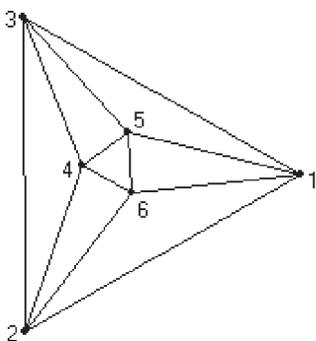


Рис. 24. Плоский граф восьмигранника

представлен соответствующий плоский граф в треугольнике.

Граф восьмигранника, изображенного на рис. 25а, можно превратить в простой сферический граф, изображенный на рис. 25б, если перебросить ребро 1—4 на узлы 1—5.

Сделаем еще одно общее замечание о добавлении узлов к замкнутой триангуляции поверхности тела. В этом случае возможны два варианта: 1) новый узел разбивает один треугольник на три (рис. 28), добавляя 3 ребра и 2 треугольника; 2) новый узел разбивает два треугольника на четыре (рис. 29), снова добавляя 3 ребра и 2 треугольника.

Это находится в полном соответствии с формулами (5) и (6).

Операции объединения, вычитания, пересечения 2D и 3D тел используются при проектировании в архитектуре, в машиностроении и в GIS. Эта задача является достаточно сложной. Однако, после нахождения пересечения двух многогранников, бинарная нумерация операций над множествами [14,15] позволяет сформулировать общий алгоритм сбора ребер и граней в результирующее тело операции.

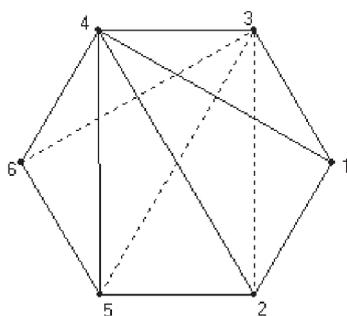


Рис. 26. Неполный граф восьмигранника

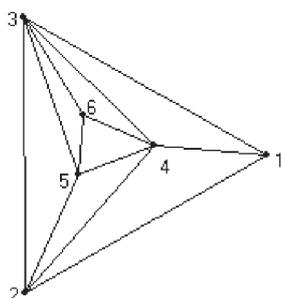


Рис. 27. Плоский граф восьмигранника

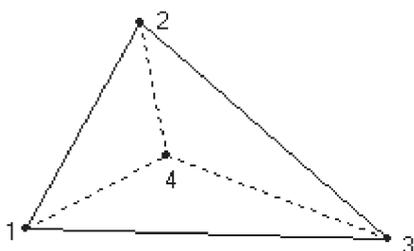


Рис. 28.

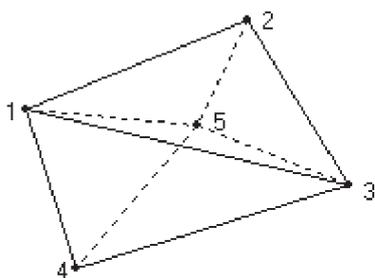


Рис. 29.

Из элементов двух множеств A и B пространства M , используя операции объединения " \cup ", пересечения " \cap " и разности " \setminus ", можно составить новое множество C (рис. 30).

В общем случае над двумя множествами A и B можно рассматривать шестнадцать различных операций, каждая из которых имеет номер от 0 до 15. Номер операции полностью определяет ее результат. Так, например, операция с номером $7_{10} = 0111_2$ — это операция объединения «или». Любая из этих операций сводится, в первую очередь, к задаче пересечения двух триангулированных поверхностей. Задача пересечения двух триангулированных поверхностей сводится к триангуляции треугольника, пересеченного невыпуклым многогранником. Триангуляции треугольника с ограничениями в общем случае не тривиальна. Эта задача сводится к построению триангуляции по заданным точкам, но при этом недопустима «правильная» в смысле Делоне триангуляция, если хотя бы одна из сторон треугольника пересекает полигон пересечения треугольника с многогранником. В общем случае полигон пересечения треугольной грани с телом может быть и невыпуклым и неодносвязным (рис. 31).

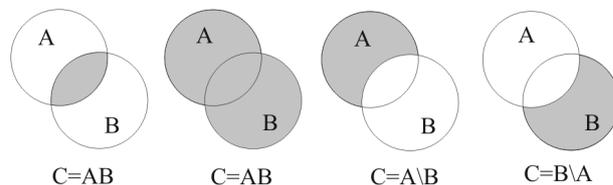


Рис. 30. Операции над множествами

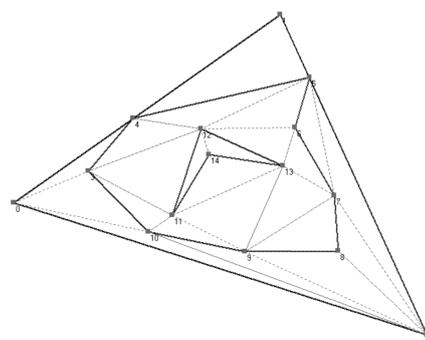


Рис. 31. Триангуляция треугольного ребра после пересечения с телом

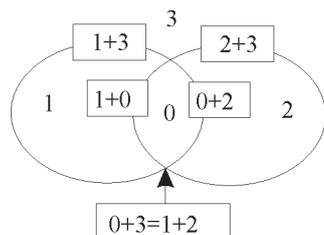


Рис. 32. Индексы границ пересечения двух множеств

В работе [15] представлены некоторые алгоритмы, необходимые для бинарных операций над телами, заданными замкнутыми СТІН-поверхностями. После завершения триангуляции треугольников остается собрать вершины, ребра и грани в новое тело. В этом помогает утверждение, сформулированное в работах [14,15].

Каждому граничному элементу множеств А и В поставим в соответствие число, которое будем называть индексом границы, складывая индексы множеств, которые они разделяют (рис. 32): $1+0=1$ — индекс граничной точки между множествами с индексами 0 и 1; $2+0=2$ — индекс граничных точек между множествами с индексами 0 и 2; $3+0=1+2=3$ — индекс узловых точек; $3+1=4$ — индекс точки между множествами с индексами 1 и 3; $3+2=5$ — индекс граничной точки между множествами с индексами 3 и 2.

В любой узловой точке, точке пересечения границ, сходятся две или четыре (например, для операции с номером 6) границы нового множества С.

Между номерами операций и индексами граничных элементов есть связь: сумма номеров пар различных битов в двоичном представлении номера операции совпадает с индексами граничных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулированное утверждение позволяет собрать вершины, ребра и грани в новую СТІН-поверхность для бинарной операции с любым номером, т.к. определение индексов граничных элементов сводится к задаче принадлежности одной из точек ребра или грани телу А и/или В.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abdul-Rahman, A., Pilouk, M.* Spatial Data Modelling for 3D GIS. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008, – 288 p.
2. *Brunet, P.* 3-D structures for the encoding of geometry and internal properties, In: Three-Dimen-

sional Modeling with Geoscientific Information Systems by A. K. Turner (ed.). NATO ASI Series C, Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, Vol. 354, 1992, pp. 159–188.

3. *Chen, X., Ikeda, K., Yamakita, K., Nasu, M.* Raster algorithms for generating Delaunay tetrahedral tessellations. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing. Commission III, Vol. 30, Part 3/1, Munich, Germany, 1994, pp. 124–131.

4. *Dong, F.* Three-dimensional models and applications in subsurface modeling. Department of Geomatics Engineering Reports No. 20093. University of Calgary, 1996, 93 p

5. *Li, R.* Data structures and application issues in 3-D geographic information systems. Geomatica. Vol. 48, No. 3, 1994, pp. 209–224.

6. *Mark, DM, Cebrian, J.A.* Octrees: a useful data-structure for the processing of topographic and subsurface data. Technical Papers of ACSM-ASPRS Annual Convention. Vol. 1 (Cartography and Education), 1986.

7. *Meagher, D.* Geometric modelling using octree encoding. Computer Graphics and Image Processing. Vol. 19, 1982, pp. 129–147.

8. *Midtb, T (1996)* Spatial modelling by delaunay networks of two and three dimensions. PhD thesis. Norwegian Institute of Technology. University of Trondheim, Norway, <http://guran1.iko.unit.no/home/terjem/terjem.html>

9. *Qingquan, L, Deren, L.* Hybrid data structure based on octree and tetrahedron in 3-D GIS. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. XXXI, Part B, Commission 4, K. Kraus and P. Waldhausl (eds.), International Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, Vienna, 1996, pp. 503–507.

10. *Samet, H.* Applications of spatial data structures. Addison-Wesley, 1990, 507 p.

11. *Балюкевич Э.Л., Ковалева Л.Ф., Романников А.Н.* Дискретная математика / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, – М., 2007, – 125 с.

12. *Скворцов А.В., Мирза Н.С.* Алгоритмы построения и анализа триангуляции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – 167 с.

13. *Тюкачев Н.А.* Сглаживание триангуляции трехмерных поверхностей // Информатика: проблемы, методология, технологии: мат. 6 межд. науч.-мет. конф., Воронеж: ВГУ, 2006. С. 9–11.

14. *Тюкачев Н.А.* Уравнения гладкой нечеткой логики. Деп. в ВИНТИ 05.06.92 N 1855-B92. — 42 с.

15. *Тюкачев Н.А., Илларионов И.В., Хлебостроев В.Г.* Программирование графики в Delphi. СПб., БХВ-Петербург. 2008. — 766 с.

16. *Франц Герман.* Полиэдры. Графы. Развёртки. KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD.

Тюкачев Николай Аркадиевич — канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. “Программирование и информационные технологии” Воронежского государственного университета, Тел. (4732)208-470. E-mail: nik@cs.vsu.ru

Tukachev N.A. – candidat of physics-math. Sciences, associate Proffessor, the dept. of the Programming and Information Technologies, Voronezh State University. Tel. (4732)208-470. E-mail: nik@cs.vsu.ru