УДК 519.688

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТКИ

А. В. Шалиткин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 1.03.2009 г.

Аннотация. В данной статье рассматривается проблема создания оптимальных конечно-элементных сеток. Под конечно-элементной сеткой здесь понимается сетка триангуляции, которая будет потом использована в методе конечных элементов. В работе проанализированы существующие подходу к этому вопросу и предложен критерий оптимальности, который учитывает интегральные свойства сетки.

Ключевые слова: конечно-элементных сетки, критерий оптимизации.

Abstract. This article represents analyse of methods of finite-element meshes creation and optimisation. It introduces and illustrates an optimisation criterion based not on the local, but on the integral quality of meshes.

Keywords: finite-element meshes, criterion of optimisation.

Рост производительности компьютеров делает не критичной скорость выполнения алгоритмов триангуляции, однако он же делает возможным выполнение более сложных и тяжелых алгоритмов, создающих более оптимальную сетку. Естественно, возникает задача разработки таких алгоритмов и, прежде всего, задача определения степени оптимальности сетки. В этой статье речь пойдет о создании критерия оптимальности, основанного не на анализе отдельного треугольника, а на анализе сетки в целом, другими словами, об интегральном критерии оптимальности сетки.

Существует несколько задач триангуляции, которые определяются целью создания сетки и начальными данными. В данной статье мы будем рассматривать задачу создания конечно-элементной сетки в области, содержащей планарный граф, который может иметь свободные грани и изолированные вершины.

Рассмотрим уже существующие критерии и алгоритмы, которые используются для оптимизации сетки. Одним из первых алгоритмов такого рода был алгоритм Бэкера, Гросса и Рафферти [1], который гарантировал, что все углы треугольников сетки будут не более 90 градусов и не менее 13 градусов (если, конечно, входные данные не содержат меньших углов). Чтобы гарантировать такие ограничения, в данном алгоритме выбирался специальный шаг сетки, вычисленный на основе входных данных. Главной мерой в этом и других алгоритмах является максимальное отношение сторон. Для рассматриваемого алгоритма эта мера составляет 4.6. Следующим шагом явился алгоритм, генерирующий адаптивную сетку [2]. Главной идеей этого алгоритма была замена сетки с постоянным шагом на стеку, получаемую в результате рекурсивного деления начального разбиения в тех местах, где это необходимо. Алгоритм обеспечивал максимальное отношение сторон, равное 5. Впоследствии данный алгоритм был улучшен и перенесен на трехмерное пространство [3]. Дугой подход построения сетки основан на критерии Делоне. В работе [4] представлен такой алгоритм, он обеспечивает построение треугольников с углами от 30 то 120 градусов, но сетка, построенная им, не является адаптивной. Рапперт улучшил этот алгоритм. В работе [5] он ввел параметр α, и математически доказал, что его алгоритм позволяет поместить любой угол треугольников триангуляции в отрезок $[\alpha, \pi\text{-}2\alpha]$ и строит при этом адаптивную сетку. Данный алгоритм был впоследствии дополнен ограничением на максимальную площадь.

Все вышеперечисленные алгоритмы используют в своем критерия оптимальности максимальные или минимальные величины мер каждого треугольника. Такие критерии, хотя и успешно применяются в вышеупомянутых алгоритмах, не предоставляют информации об оптимальности сетки в целом. При этом это совсем не значит, что интегральный критерий не должен использовать такие меры как площадь или некое выражение формы треугольника. Чтобы подробней в этом разобраться, рассмотрим те требования, которые могут предъявляться к конечно-элементной сетке. Сформулируем эти требования в первом приближении:

1. Задана некоторая идеальная площадь треугольника. Площади всех треугольников должны к ней стремиться.

2. Форма всех треугольников должна быть как можно ближе к идеальной, то есть треугольник должен быть как можно ближе к равностороннему (или к прямоугольному).

3. Сетка должна быть равномерной в смысле размера. Если сетка адаптивная, то равномерность должна быть обеспечена на схожих участках.

Если рассматривать некоторую функцию "«неоптимальности»" сетки (то есть малую при оптимальной сетке), то она, во-первых, должна учитывать 3 вышеупомянутых требования, а во-вторых, должна слабо изменяться при малых значениях аргумента и сильно при больших. Однако при перестроении сетка может начать лучше удовлетворять одним требованиям и хуже другим. В разных задачах при этом могут быть наиболее важны разные требования, поэтому имеет смысл рассмотреть отдельные функции для каждого требования, а результирующую функцию представить в виду их линейной комбинации.

$$F = af_1 + bf_2 + cf_3.$$

Пусть M_i — мера некоторого свойства i-го треугольника. M_e — некая идеальна величина этой меры, то, к чему должна стремиться M_i. Тогда функцию f_i можно представить в виде:

$$f_i(M_1, \ldots, M_n) = e^{\sum_{i=1}^{n} |M_i - M_e|}.$$

Или

$$f_i(M_1, \ldots, M_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{|M_i - M_e|},$$

в зависимости от того, насколько быстро возрастающая функция нам нужна.

При построении конечно-элементной сетки функция F будет вычисляться многократно, поэтому за критерий оптимальности можно взять факт того, что разница между функциями «неоптимальности» на двух подряд идущих итерациях будет меньше некоторого порогового значения.

Теперь нам необходимо рассмотреть требования 1—3 и найти меры, максимально их отражающие. Для требования 1, очевидно, мерой является площадь, а идеальной величиной, заданная во входных данных, площадь. Что же касается требования 2, то тут может быть несколько вариантов.

Пусть дан некоторый треугольник сетки ABC. Если построить равносторонний треугольник ABD, как показано на рис.1а, то ε_{AB} будет показывать отличие треугольника ABC от ABD. Если построить равносторонний треугольник на каждой стороне ABC, то за величину отличия треугольника сетки от равностороннего можно взять

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{BC}, \varepsilon_{CD}).$$

Другой способ (рис. 1б) заключается в контроле размера углов треугольника. Так как равносторонний треугольник имеет все углы равные $\dfrac{\pi}{3}$, то ε можно представить в виде:

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{\pi}{3}\right| + \left|\beta - \frac{\pi}{3}\right| + \left|\gamma - \frac{\pi}{3}\right|,$$

где α, β, γ соответственно углы треугольника сетки.

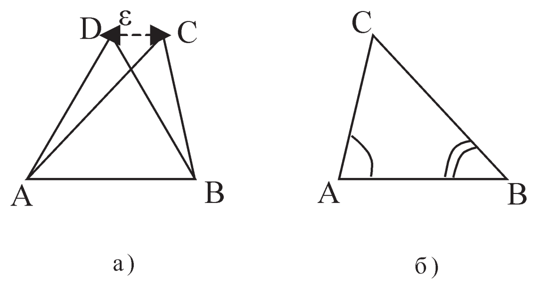

Рис. 1.

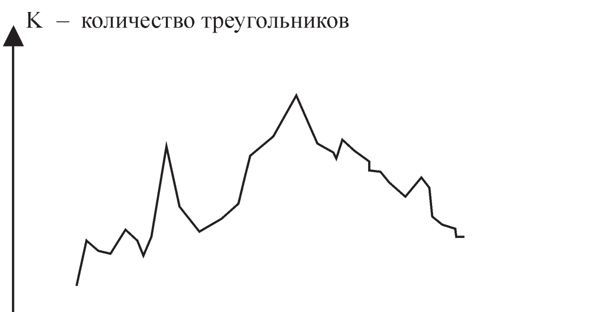

Рис. 2.

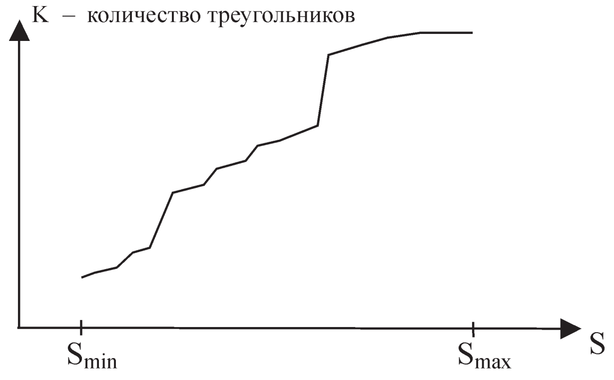

Рис. 3.

Тогда мы можем взять ε за меру, а идеальную величину меры считать равной нулю:

$$M = \varepsilon, \text{ а } M_e = 0$$

Теперь рассмотрим требование 3. Наиболее очевидным в этом случае будет взять в качестве меры площадь, а в качестве идеальной величины меры взять наиболее часто встречающуюся площадь (НЧВП). Что же можно считать НЧВП? Среднюю площадь взять мы не можем, так как при наличии сильно отличающихся треугольников, она явно не будет являться НЧВП.

Пусть S_{min} — минимальная площадь треугольника триангуляции, а S_{max} — соответственно, максимальная. Рассмотрим отрезок $[S_{min},S_{max}]$ и построим на нем эмпирическую плотность распределения, которая показывает количество треугольников, лежащих в близи некоторой заданной площади, деленное на общее количество треугольников.

Если сетка не является адаптивной, то в качестве НЧВП можно взять площадь, где плотность распределения принимает максимальное значение Если сетка адаптивная, то необходимо найти все точки максимума функции плотности распределения и при подсчете M_e использовать наиболее подходящую, то есть ту, для которого $|M_i - M_e|$ является минимальным. Однако функция распределения может иметь слишком много точек максимума, некоторые из которых могут получиться как раз в результате «неоптимальности» сетки, а не в результате адаптивности. Другим способом является построения эмпирической функции распределения на том же отрезке $[S_{min},S_{max}]$.

В этом случае, максимумы можно обнаружить при прохождении функции распределения от S_{min} до S_{max} при быстром (больше некоторого порога) возрастании значения функции. Для подсчета эмпирических функций отрезок $[S_{min},S_{max}]$ необходимо разбить на более маленькие отрезки, так как эмпирическая функция распределения является дискретной функцией. Это можно сделать исходя из площадей треугольников сетки, то есть, если мы имеем треугольники с площадями $S_1,S_2,...,S_n$, то и эти площади и будут являться точками разбиения $[S_{min},S_{max}]$.

Следующей задачей в рассматриваемой области является практическая проверка вышеописанного интегрального критерия оптимальности. Если она пройдет успешно, то критерий можно будет использовать для построения сетки, что требует, однако, создания соответствующих алгоритмов. Кроме того, функцию "«неоптимальности»" можно использовать для сравнения различных методов триангуляции. Хотя все рассуждения были представлены только для плоскости, они могут быть расширены до трехмерного пространства в случае каркасной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baker B., Grosse E.,* Rafferty *C.S.* Nonobtuse triangulation of polygons. Disc. And Comput. Geom, 1988.

2. *Bern M., Eppstein D.* Mesh generation and optimal triangulation. Ln D.Z. Du and F.K. Hwang, editors. Computing in Euclidean Geometry. World Scientific, 1992.

3. *Mitchell S.S., Vavasis S.A.* Quality mesh generation in three dimensions. In Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Computational Geometry. 1992.

4. *Chew L.P.* Guaranteed-quality triangular meshes. Technical report, Cornell University, 1989

5. *Ruppert J. A* Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. NASA Ames Research Center, Submission to Journal of Algorithms, 1994.

Шалиткин Андрей Владимирович — аспирант кафедры Программирования и информационных технологий, Воронежский государственный университет. Тел. (4732)208-470. E-mail: andrey.shalitkin@mail.ru

Shalitkin Andrey V. — Postgraduate student, Voronezh State University, Computer Science Faculty,the dept. of Programming and Information Technologies, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-470. E-mail: andrey.shalitkin@mail.ru