УДК 621.391:396

О СХОДИМОСТИ ВЕСОВ АВТОАССОЦИАТИВНОЙ ДВУСЛОЙНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. А. Сирота, В. Г. Попов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.05.2008 г.

Аннотация. Доказана теорема о сходимости весовых коэффициентов автоассоциативной линейной нейронной сети с сокращенным числов нейронов в скрытом слое к базисным функциям разложения Карунена—Лоева.

Ключевые слова: базисные функции разложения Карунена—Лоева, автоассоциативная линейная нейронная сеть.

Abstract. A theorem of convergence of weight factors of an autoassociative linear neural network with reduced number of neurons in the latent layer to basic functions of Karunen—Loev decomposition is proved.

Key words: the basic functions of Karunen—Love, autoassociative linear neural network.

ВВЕДЕНИЕ

При обработке случайных полей и многомерных случайных процессов и полей возникает задача понижения размерности и выделения главных информационных компонентов. Решение такой задачи особенно актуально, если размерность восстанавливаемого (оцениваемого) случайного вектора существенно меньше, чем размерность наблюдаемого случайного вектора (фрагмента изображения). Данная ситуация возникает, например, при обработке информации в системах лазерной интерферометрии [1].

1. ПРИМЕНЕНИЕ АВТОАССОЦИАТИВНОЙ ДВУСЛОЙНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для решения подобных задач применяются различного рода сжимающие отображения [2]. При отсутствии априорной информации о статистических характеристиках процессов и полей построение таких преобразований удобно осуществлять в рамках нейросетевого подхода. Рассмотрим автоассоциативную двуслойную линейную нейронную сеть, имеющую архитектуру, представленную на рис. 1 (сеть типа "бутылочное горло"). Особенностью данной архитектуры является то, что количество нейронов в скрытом слое существенно меньше количества входов и выходов сети $m << n$. При обучении сети для настройки весовых коэффициентов первого и второго слоев применяется процедура обратного распространения ошибки. Для получения сжимающего отображения процедура обучения сети организуется таким образом, чтобы при подаче на входы сети обучающей последовательности данных (реализаций случайного вектора или фрагментов изображений) целевые (требуемые) значения выходов сети имели такие же значения, что и значения данных на входах.

Докажем некоторые важные свойства матриц весов рассматриваемой нейронной сети W_1 и W_2, получаемые после ее обучения на однородном статистическом материале. Важно от-

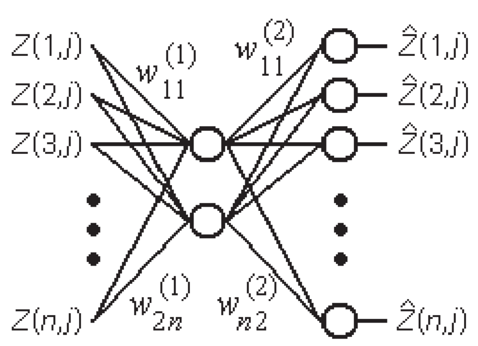

Рис. 1. Архитектура нейронной сети типа "бутылочное горло"

метить, что в известной литературе [3, 4, 5] рассматриваемые ниже свойства нейронной сети с рассматриваемой архитектурой обсуждаются и экспериментально подтверждаются, однако более или менее строгие доказательства отсутствуют.

Теорема. *Линейная нейронная сеть прямого распространения с архитектурой, представленной на рис. 1, имеющая в общем случае $m < n$ нейронов в скрытом слое, после обучения на основе процедуры обратного распространения ошибки с использованием выборки реализаций случайного вектора с заданной матрицей ковариации, формирует в промежуточном слое выходные реакции, эквивалентные разложению по первым m функциям базиса Карунена—Лоева для выборочной матрицы ковариации. При этом для весовых коэффициентов обученной нейронной сети рассматриваемой архитектуры имеет место соотношение $W_1W_2 = I$, где I — единичная матрица.*

Пусть $Z^{(j)} = (Z(1,j),\ldots,Z(n,j))^T, j = \overline{1,N}$ — векторы обучающей выборки объемом N, являющиеся реализациями случайного вектора Z с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации R. Известно, что процедура обратного распространения ошибки настраивает веса нейронной сети по критерию минимума среднеквадратичной ошибки, то есть минимизирует сумму

$$E(N) = \sum_{j=1}^{N}\left(Z^{(j)} - \hat{Z}^{(j)}\right)^T\left(Z^{(j)} - \hat{Z}^{(j)}\right)$$

$$\hat{Z}^{(j)} = WZ^{(j)}, \quad j = \overline{1,N},$$

где $W = W_2W_1$ — матрица весов нейронной сети.

Учитывая, что на выходах нейронов скрытого слоя нейронной сети $\nu^{(j)} = W_1Z^{(j)}$, получим

$$E(N) = \sum_{j=1}^{N}\left(Z^{(j)} - W_2\nu^{(j)}\right)^T\left(Z^{(j)} - W_2\nu^{(j)}\right)$$

Докажем сначала нашу теорему для случая одного нейрона в скрытом слое. Рассмотрим сумму

$$\bar{E}(N) = \frac{E(N)}{N-1} =$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(Z^{(j)} - W_2\nu^{(j)}\right)^T\left(Z^{(j)} - W_2\nu^{(j)}\right)$$

Здесь $W_2 = \left(w_1^{(2)}w_2^{(2)},\ldots,w_n^{(2)}\right)^T$ — матрица весов размера $n \times 1$, а $\nu^{(j)}$ — скаляр. Соответственно получим

$$\bar{E}(N) = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^{(j)} - w_k^{(2)}\nu^{(j)}\right)^2.$$

Найдем теперь минимум $\bar{E}(N)$ относительно компонентов W_2, исходя из следующих уравнений:

$$\frac{\partial\bar{E}(N)}{\partial w_k^{(2)}} = -2\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(z_k^{(j)} - w_k^{(2)}\nu^{(j)}\right)\nu^{(j)} = 0,$$

$$k = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что

$$\nu^{(j)} = \sum_{t=1}^{n} w_t^{(1)}z_t^{(j)},$$

где $w_t^{(1)}$ — элементы матрицы весов $W_1 = \left(w_1^{(1)}w_2^{(1)}\ldots w_n^{(1)}\right)$, получим систему уравнений

$$\frac{1}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{N} z_k^{(j)}\sum_{t=1}^{n} w_t^{(1)}z_t^{(j)} - \right.$$

$$\left. - w_k^{(2)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{n} w_t^{(1)}z_t^{(j)}\sum_{m=1}^{n} w_m^{(1)}z_m^{(j)}\right] = 0,$$

$$k = \overline{1,n}.$$

Обозначив $\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} z_k^{(j)}z_t^{(j)} = r_{kt}$, перепишем последнюю систему уравнений в виде

$$\sum_{t=1}^{n} w_t^{(1)}r_{kt} - \left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} w_t^{(1)}r_{mt}w_m^{(1)}\right)w_k^{(2)} = 0,$$

$$k = \overline{1,n}.$$

В результате получаем ее решение в виде следующего матричного уравнения:

$$W_2 = \frac{R^*W_1^T}{W_1R^*W_1^T}, \tag{1}$$

где $R^* = \|r_{kt}\|$ — квадратная матрица выборочной ковариации размера $n \times n$. Отсюда сразу следует, что $W_1W_2 = 1$.

Минимизируем теперь $\bar{E}(N)$ относительно элементов матрицы W_1. Получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\bar{E}(N)}{\partial w_t^{(1)}} = -2\frac{1}{N-1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^{(j)} - w_k^{(2)}\nu^{(j)}\right)w_k^{(2)}z_t^{(j)} = 0,$$

$$t = \overline{1,n}.$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} z_k^{(j)}z_t^{(j)}w_k^{(2)} -$$

$$-\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n}\left(w_k^{(2)}\right)^2\sum_{m=1}^{n} z_m^{(j)}z_t^{(j)}w_m^{(1)} = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} r_{kt} w_k^{(2)} - \sum_{k=1}^{n} \left(w_k^{(2)}\right)^2 \sum_{m=1}^{n} r_{mt} w_m^{(1)} = 0.$$

В матричном виде получим следующее уравнение:

$$R^* W_2 - R^* W_1^T \left(W_2^T W_2\right) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$W_2 - W_1^T W_2^T W_2 = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение W_2 из (1), получим

$$R^* W_1^T \left(W_1 R^* W_1^T\right)^{-1} -$$

$$-W_1^T W_1 R^* R^* W_1^T \left(W_1 R^* W_1^T\right)^{-2} = 0,$$

$$R^* W_1^T = W_1^T \frac{W_1 R^{*2} W_1^T}{W_1 R^* W_1^T}.$$

Как известно [6], величина

$$\lambda = \frac{W_1 R^{*2} W_1^T}{W_1 R^* W_1^T}.$$

лежит в пределах

$$\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max},$$

где $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы R^*. Таким образом, мы видим, что W_1^T подчиняется уравнению

$$R^* W_1^T = \lambda W_1^T.$$

Это означает, что W_1^T является одним из собственных векторов φ_* матрицы R^*. Поскольку собственным вектором, соответствующим заданному собственному значению, является также любой вектор $c\tilde{\varphi}_*$, где c произвольная константа, а $\tilde{\varphi}_*$ нормированный собственный вектор, то соответствующий вектор W_2 с учетом $W_1 W_2 = 1$ будет равен $c^{-1}\tilde{\varphi}_*$.

Учитывая, что рассматриваемые условия минимизации ошибки являются необходимыми, но не достаточными, далее необходимо установить то, что этот собственный вектор соответствует максимальному собственному числу. Это можно сделать, исходя из доказанных в [6] свойств разложения Карунена—Лоева: вектор W_2 является собственным вектором $\varphi_1 = \alpha_1 \tilde{\varphi}_1$, соответствующим максимальному собственному значению $\lambda_{\max} = \lambda_1$, так как его применение дает наименьшую остаточную среднеквадратичную ошибку при минимизации $E(N)$.

Матрица R^* является несмещенной состоятельной оценкой матрицы ковариации R обрабатываемого случайного вектора. Соответственно, решение характеристического уравнения для R^* сходится по вероятности к решению для R [6], причем скорость этой сходимости определяется скоростью сходимости оценок выборочных коэффициентов корреляции к их истинным значениям. Таким образом, для данного случая теорема доказана.

По аналогии подобное доказательство можно провести и для любого количества нейронов в скрытом слое. Без потери общности докажем теорему для случая двух нейронов в скрытом слое. Для удобства обозначим теперь матрицы весовых коэффициентов скрытого и выходного слоев нейронной сети как $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ соответственно.

Рассмотрим опять сумму

$$\bar{E}(N) = \frac{1}{N-1} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \left(Z^{(j)} - W^{(2)} \nu^{(j)}\right)^T \left(Z^{(j)} - W^{(2)} \nu^{(j)}\right)$$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} \\ w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} \\ \dots & \dots \\ w_{n1}^{(2)} & w_{n2}^{(2)} \end{pmatrix} = \left(W_1^{(2)} \quad W_2^{(2)}\right),$$

где $\nu^{(j)} = \left(\nu_1^{(j)}, \nu_2^{(j)}\right)^T$ — выходы первого слоя нейронной сети при подаче на ее входы вектора $Z^{(j)}$; $W_{1,2}^{(2)}$ — столбцы матрицы выходного слоя рассматриваемой нейронной сети. Соответственно, можно записать

$$\bar{E}(N) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left(z_k^{(j)} - \left(w_{k1}^{(2)} \nu_1^{(j)} + w_{k2}^{(2)} \nu_2^{(j)}\right)\right)^2.$$

Минимум $\bar{E}(N)$ относительно компонентов $W_1^{(2)}$ теперь получаются из из следующих уравнений:

$$\frac{\partial \bar{E}(N)}{\partial w_{k1}^{(2)}} = -2 \frac{1}{N-1} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \left(z_k^{(j)} - \left(w_{k1}^{(2)} \nu_1^{(j)} + w_{k2}^{(2)} \nu_2^{(j)}\right)\right) \nu_1^{(j)} = 0,$$

$$k = \overline{1, n}.$$

При этом выходы соответствующего нейрона скрытого слоя равны

$$\nu_1^{(j)} = \sum_{t=1}^{n} w_{1t}^{(1)} z_t^{(j)}.$$

Здесь $w_{1t}^{(1)}$ — элементы матрицы весов первого слоя нейронной сети

$$W_1 = \begin{pmatrix} w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & \dots & w_{1n}^{(1)} \\ w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} & \dots & w_{2n}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1^{(1)} \\ W_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

где $W_{1,2}^{(1)}$ — обозначения ее строк. Соответственно,

$$\frac{1}{N-1}\left(\sum_{j=1}^{N} z_k^{(j)} \sum_{t=1}^{n} w_{1t}^{(1)} z_t^{(j)} - \right.$$

$$-w_{k1}^{(2)} \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{n} w_{1t}^{(1)} z_t^{(j)} \sum_{m=1}^{n} w_{1m}^{(1)} z_m^{(j)} -$$

$$\left. -w_{k2}^{(2)} \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{n} w_{2t}^{(1)} z_t^{(j)} \sum_{m=1}^{n} w_{1m}^{(1)} z_m^{(j)} \right) = 0, \ \ k = \overline{1,n}$$

Как и в предыдущем случае, обозначим $\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} z_k^{(j)} z_t^{(j)} = r_{kt}$. Таким образом, имеем

$$\sum_{t=1}^{n} w_{1t}^{(1)} r_{kt} - \left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} w_{1t}^{(1)} r_{mt} w_{1m}^{(1)}\right) w_{k1}^{(2)} -$$

$$-\left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} w_{2t}^{(1)} r_{mt} w_{1m}^{(1)}\right) w_{k2}^{(2)} = 0, \ \ k = \overline{1,n}.$$

В результате получаем следующее матричное уравнение:

$$R^* W_1^{(1)T} = W_1^{(2)} \left(W_1^{(1)} R^* W_1^{(1)T}\right) +$$
$$+ W_2^{(2)} \left(W_2^{(1)} R^* W_1^{(1)T}\right),$$

где $R^* = \|r_{kt}\|$ — квадратная матрица выборочной ковариации размера $n \times n$. Аналогично дифференцируя и приравнивая $\frac{\partial \bar{E}}{\partial w_{k2}^{(2)}} = 0$, получим

$$R^* W_2^{(1)T} = W_1^{(2)} \left(W_1^{(1)} R^* W_2^{(1)T}\right) +$$
$$+ W_2^{(2)} \left(W_2^{(1)} R^* W_2^{(1)T}\right).$$

Последние два уравнения можно объединить в общее матричное уравнение

$$W^{(2)} \left(W^{(1)} R^* W^{(1)T}\right) = R^* W^{(1)T}.$$

Матрица $W^{(1)} R^* W^{(1)T}$ является квадратной матрицей размера 2×2 и для нетривиальных векторов $W_1^{(1)}, W_2^{(1)}$ положительно определена. Действительно для любого ненулевого вектора x

$$x^T W^{(1)} R^* W^{(1)T} x = y^T R^* y > 0, \ \ y = W^{(1)T} x,$$

так как матрица R^* положительно определена при достаточном значении N.

Отсюда, соответственно,

$$W^{(2)} = R^* W^{(1)T} (W^{(1)} R^* W^{(1)T})^{-1}.$$

Отсюда также следует одно из утверждений теоремы о том, что $W^{(1)} W^{(2)} = I$.

Теперь минимизируем $\bar{E}(N)$ относительно элементов $W_1^{(1)}$.

$$\frac{\partial \bar{E}(N)}{\partial w_{1t}^{(1)}} = -2\frac{1}{N-1} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \left(z_k^{(j)} - \left(w_{k1}^{(2)} v_1^{(j)} + w_{k2}^{(2)} v_2^{(j)}\right)\right) w_{k1}^{(2)} z_t^{(j)} = 0,$$

$$t = \overline{1,n}.$$

Далее преобразуем

$$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} z_k^{(j)} z_t^{(j)} w_{k1}^{(2)} -$$

$$-\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n} \left(w_{k1}^{(2)}\right)^2 \sum_{m=1}^{n} z_m^{(j)} z_t^{(j)} w_{1m}^{(1)} -$$

$$-\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n} w_{k2}^{(2)} w_{k1}^{(2)} \sum_{m=1}^{n} z_m^{(j)} z_t^{(j)} w_{2m}^{(1)} = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} r_{kt} w_{k1}^{(2)} - \sum_{k=1}^{n} \left(w_{k1}^{(2)}\right)^2 \sum_{m=1}^{n} r_{mt} w_{1m}^{(1)} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} w_{k2}^{(2)} w_{k1}^{(2)} \sum_{m=1}^{n} r_{mt} w_{2m}^{(1)} = 0.$$

В итоге получим матричное уравнение

$$R^* W_1^{(2)} - R^* W_1^{(1)T} \left(W_1^{(2)T} W_1^{(2)}\right) -$$
$$- R^* W_2^{(1)T} \left(W_1^{(2)T} W_2^{(2)}\right) = 0.$$

Аналогично, дифференцируя и приравнивая $\frac{\partial \bar{E}}{\partial w_{2t}^{(1)}} = 0$, получим еще одно матричное уравнение

$$R^* W_2^{(2)} - R^* W_1^{(1)T} \left(W_2^{(2)T} W_1^{(2)}\right) -$$
$$- R^* W_2^{(1)T} \left(W_2^{(2)T} W_2^{(2)}\right) = 0.$$

Объединяя эти уравнения, получим

$$R^* W^{(2)} - R^* W^{(1)T} \left(W^{(2)T} W^{(2)}\right) = 0$$

или

$$W^{(2)} = W^{(1)T} W^{(2)T} W^{(2)}.$$

Подставляя в последнее уравнение ранее полученное выражение для $W^{(2)}$

$$W^{(2)} = R^* W^{(1)T} (W^{(1)} R^* W^{(1)T})^{-1},$$

окончательно получим

$$R^* W^{(1)T} = W^{(1)T} (W^{(1)} R^* W^{(1)T})^{-1} \times$$
$$\times W^{(1)} R^{*2} W^{(1)T}. \qquad (2)$$

Обозначим квадратную матрицу размера 2×2

$$H = (W^{(1)} R^* W^{(1)T})^{-1} W^{(1)} R^{*2} W^{(1)T}.$$

Квадратная матрица H, как нетрудно видеть, является симметричной и положительно определенной матрицей. Выполним для нее диагонализирующее ортонормированное преобразование и перепишем при этом (2) следующим образом:

$$R^* W^{(1)T} U^T = W^{(1)T} U^T U H U^T =$$

$$= W^{(1)T} U^T \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix},$$

$$R^* V_1 = \nu_1 V_1, \; R^* V_2 = \nu_2 V_2,$$

$$V_1 = W_1^{(1)} u_{11} + W_2^{(1)} u_{21},$$

$$V_2 = W_1^{(1)} u_{12} + W_2^{(1)} u_{22},$$

где $\nu_1, \nu_2, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{12}, u_{22}$ — элементы матриц UHU^T и U^T соответственно. Векторы V_1, V_2 являются решениями характеристического уравнения и, соответственно, собственными векторами R^*. Отсюда как необходимое условие следует, что столбцы матрицы $W^{(1)T}$ являются линейной комбинацией двух собственных векторов R^*:

$$W_1^{(1)T} = \alpha_{11}\tilde{\varphi}_* + \alpha_{12}\tilde{\varphi}_{**},$$

$$W_2^{(1)T} = \alpha_{21}\tilde{\varphi}_* + \alpha_{22}\tilde{\varphi}_{**},$$

а матрицы весов нейронной сети можно представить в виде

$$W^{(1)T} = (\tilde{\varphi}_* \quad \tilde{\varphi}_{**})U, \; W^{(1)} = U^T \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_*^T \\ \tilde{\varphi}_{**}^T \end{pmatrix},$$

$$W^{(2)} = (\tilde{\varphi}_* \quad \tilde{\varphi}_{**})U.$$

Исходя из свойств разложения Карунена—Лоева [6], векторы $\tilde{\varphi}_*$, $\tilde{\varphi}_{**}$ соответствуют двум максимальным собственным числам матрицы R^*, так как применение $W^{(2)}$ полученного вида дает наименьшую остаточную среднеквадратичную ошибку при минимизации $E(N)$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что при обучении нейронной сети с рассматриваемой архитектурой может быть получено бесконечное количество решений, каждое из которых формирует набор векторов весов, являющихся линейными комбинациями собственных векторов матрицы ковариации с различными коэффициентами. Данное свойство проявляется в ходе экспериментальных исследований процедуры обучения такой нейронной сети.

Следствие. *При последовательном и раздельном по нейронам скрытого слоя обучении нейронной сети, в соответствии с которым сначала по заданной выборке обучается нейронная сеть архитектуры рис. 1., имеющая один нейрон в скрытом слое, затем по остаточной ошибке обучаются весовые коэффициенты второго нейрона в скрытом слое и так далее вплоть до m-го нейрона скрытого слоя, строки матрицы $W^{(1)}$ будут упорядочены соответственно первым m максимальным собственным числам разложения Карунена—Лоева.*

Для доказательства представим каждую реализацию $Z^{(j)}$ входного случайного вектора Z в виде разложения Карунена—Лоева для выборочной матрицы ковариации R^*:

$$Z^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{\varphi}_i.$$

После обучения на основе совокупности $\{Z^{(j)}, \quad j = \overline{1, N}\}$ на первом шаге нейронной сети с одним нейроном в скрытом слое согласно доказанной выше теореме при подаче на входы сети каждого вектора $Z^{(j)}$ на выходе имеем $\hat{Z}^{(j)} = \alpha_1 \tilde{\varphi}_1$. Обозначим остаточный член разложения

$$\tilde{Z}^{(j)} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \tilde{\varphi}_i.$$

Матрица ковариации случайного вектора $\tilde{Z}$

$$R_{\sim}^* = E\{\tilde{Z}\tilde{Z}^T\} = \sum_{i=2}^{n} E\{\alpha_i^2\} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_i^T$$

имеет максимальное собственное значение $\lambda_{\max} = \lambda_2 = E\{\alpha_2^2\}$, то есть второе по величине собственное значение исходной матрицы R^*. При этом вектор $\tilde{\varphi}_2$ (как и любой другой вектор $c\tilde{\varphi}_2$) является собственным вектором, соответствующим λ_2. Отсюда следует, что добавив второй нейрон в скрытом слое и дообучив нейронную сеть для установления добавляемых весовых коэффициентов на основе совокупности $\{\tilde{Z}^{(j)}, \quad j = \overline{1, N}\}$, согласно ранее доказанным свойствам сети с одним нейроном в скрытом слое векторы весовых коэффициентов для нового нейрона будут иметь вид

$$W_2^{(1)} = \alpha_2 \tilde{\varphi}_2^T, \; W_2^{(2)} = \alpha_2^{-1} \tilde{\varphi}_2.$$

Продолжая подобную процедуру далее, получим, что при последовательно-раздельном обучении на основе формирования соответствующих выходных реакций сети, получим в скрытом слое эквивалентное разложение по первым m функциям базиса Карунена—Лоева, упорядоченное для нейронов скрытого слоя соответственно первым m максимальным собственным числам. Следствие доказано.

В качестве примера на рис. 2 изображены реальные векторы базиса Карунена—Лоева, полученные для разложения гауссовского случайного вектора Z с заданной матрицей ковариации, и соответствующие векторы весов нейронной сети, полученные после обучения сети по выборке реализаций Z. Первые два вектора разложения Карунена—Лоева φ_1 и φ_2 , рассчитанные для матрицы ковариации R_Z с элементами $R_{ij} = D_z \exp\left\{-a|i-j|\right\}$, где параметр a связан с коэффициентом корреляции ρ соотношением $a = -\log\rho$, показаны на рис. 2а и рис. 2в соответственно. На рис. 2б и рис. 2г представлены соответствующие векторы матрицы весов скрытого слоя нейронной сети, обученной в последовательном режиме. В данном примере размерность случайного вектора $M = 20$, дисперсия элементов вектора $D_z = 1$, коэффициент корреляции между соседними координатами $\rho = 0,9$. Обучающая выборка для нейронной сети формировалась из $N = 100000$ реализаций вектора Z.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены теоретические доказательства сходимости по вероятности весов промежуточного слоя автоассоциативной двуслойной линейной нейронной сети к базисным функциям разложения Карунена—Лоева. Указанные свойства ранее установлены экспериментально и использованы в работе авторов [7] при обосновании нейросетевого алгоритма сжатия изображений с регулируемым качеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов В.Г.* Нейросетевой алгоритм восстановления процессов поверхностных микроколебаний объектов при обработке последовательности интерферограмм / В.Г. Попов, А.А. Сирота // Мат. VIII Международ. науч.-техн. конф. «Кибернетика и высокие технологии XXI века». — Воронеж, 2007.

2. *Ватолин Д.* Методы сжатия данных / Д. Ватолин — М.: Диалог-Мифи, 2002.

3. *Назаров Л.Е.* Применение искусственных нейронных сетей для сжатия РСА- и сканерных изображений земной поверхности / Л.Е. Назаров // Исследование Земли из космоса. — 1999. — № 5. — С.44—50.

4. *Назаров Л.Е.* Сравнительный анализ алгоритмов сжатия космических изображений на основе использования многослойных искусственных нейронных сетей и фракталов / Л. Е. Назаров // Исследование Земли из космоса. — 2001. — № 1. — С.31—39.

5. *Widrow B.* 30 years of adaptive neural network: Perceptron, Madaline and Backpropagation / B. Widrow, M. Lehr // Proc. IEEE. — 1990. — V.78. — №9. — P.1415—1442.

6. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов: Пер. с англ. / К. Фукунага. — М.: Наука, 1979. — 368 с.

7. *Попов В.Г.* Нейросетевой алгоритм сжатия изображений с регулируемым качеством / В.Г. Попов, А.А. Сирота // Мат. V Международ. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии». — Воронеж: ВГУ, 2005.

Сирота Александр Анатольевич — д.т.н., проф., каф информационных систем, Воронежский государственный университет. Тел. (4732)208-724. E-mail: sir@cs.vsu.ru.

Попов Василий Георгиевич — аспирант каф. информационных систем, Воронежский государственный университет. Тел. (4732) 208-909.

Sirota Aleksandr Anatolyevich — Doctor of Technic Sciences, Professor, the dept. of the Information Systems, Voronezh State University. Tel. (4732)208-909. E-mail: sir@cs.vsu.ru.

Popov Vasiliy Georgievich — Post-Graduate Student , The dept. of the Information Systems, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-724.