

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ TAKAGI-SUGENO

Е. В. Кочергин, Т. М. Леденева, А. В. Алтухов

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 11.05.2008 г.

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема интерпретируемости систем Takagi-Sugeno. Интерполяционные свойства обеспечиваются специальной моделью, которая дополняет основную линейную модель.

**Ключевые слова:** нечеткое моделирование, системы Takagi-Sugeno, интерполяция.

**Abstract.** The paper deals with the interpretability problem of Takagi-Sugeno systems. Interpolation effect is carry out by a corrective special model complementing main linear model.

**Key words:** fuzzy modeling, Takagi-Sugeno systems, interpolation effect.

### ВВЕДЕНИЕ

Среди моделей нечеткого логического вывода значительный интерес для приложений представляет модель Takagi-Sugeno [1], а системы, разработанные на ее основе — TS-системы, позволяют построить кусочно-линейную аппроксимацию неизвестной функции и поэтому представляют собой достаточно мощный аппарат для моделирования сложных нелинейных систем. Использование нечетких продукционных правил, объединенных в базу правил, позволяет описать неизвестную функцию на качественном уровне и, по сути, порождает класс моделей «серого» ящика, отличительной особенностью которого является *интерпретируемость*. В данном случае это свойство означает, что на определенной области входного пространства «действует» линейная модель, в то время как на границах областей поведение функции нелинейное. Для улучшения качества аппроксимации необходимы подходы, которые адекватно описывают это поведение. Генерация и оптимизация базы правил — актуальные проблемы нечеткого TS-моделирования, стратегия решения которых направлена на описание поведения моделируемой системы небольшим числом правил. Следует заметить, что большинство существующих подходов к решению этих проблем основано на структурной и/или параметрической оптимизации нечеткой систе-

мы по методу наименьших квадратов. Исследование взаимодействия параметров — сложная проблема, при этом уникальность поведения сложной моделируемой системы не позволяет сформулировать общих рекомендаций по выбору оптимальных значений параметров. Основная идея TS-моделирования сводится к построению локальных линейных моделей на основе, например, процедур кластеризации, применяемых к наблюдаемым данным на этапе предварительного анализа [2]. В этом случае модель сложной нелинейной системы — есть совокупность локальных линейных моделей, каждая из которых «настраивается» методом наименьших квадратов. Заметим, что локальный метод наименьших квадратов оценивает параметры модели по отдельности, следовательно, каждое нечеткое правило может порождать весь вывод целиком в ограниченной области пространства входных данных. Заметим, что при таком подходе каждое нечеткое правило действует, как независимая модель, относящаяся только к подмножеству обучающих данных. Однако существует проблема: даже если построены оптимальные локальные модели, каждая из которых действует в своей области входного пространства, тем не менее обобщенная нечеткая система не всегда оптимальна. Существующие подходы к решению данной проблемы, как правило, устраняют излишнюю параметризацию и игнорируют необходимость компромисса между точностью и интерпретируемостью — трудно совместимые свойства TS-систем. В [3]

предложена идея, суть которой заключается в комбинации двух моделей, одна из которых обладает повышенной степенью интерпретируемости, а вторая — дополняет первую и сглаживает нежелательное влияние TS-вывода. Цель настоящей статьи заключается в исследовании данного подхода, разработке алгоритма и программы, которые его реализуют.

## 1. ОСОБЕННОСТИ TS-МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Нечеткая TS-модель с множеством входных переменных и одной выходной переменной представляет собой совокупность правил вида

$$R_r : \text{если } x_1 \text{ есть } A_{r1} \text{ и } x_2 \text{ есть } A_{r2} \text{ и...и } x_N \text{ есть } A_{rN}, \text{ то } y = f_r(x_1, \dots, x_N), \quad (1)$$

где  $A_{r1}, A_{r2}, \dots, A_{rN}$  — лингвистические значения входных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_N$  в  $r$ -ом правиле,  $r = \overline{1, R}$ ;  $y$  — выходная переменная;  $f_r$  — полином  $N$ -й степени, порядок которого также определяет и порядок TS-модели. Так, в TS-модели первого порядка  $f_r(x_1, \dots, x_N) = a_0^r + a_1^r x_1 + \dots + a_N^r x_N$ . На рис. 1 представлена нечеткая TS-модель с одним входом и одним выходом, где каждому лингвистическому значению входной переменной  $x$  соответствует своя линейная функция. Заметим, что в этом случае база правил, которая описывает поведение функции, будет иметь следующий вид:

- $R_1$  : если  $x$  маленький, то  $y = a_1x + b_1$ ;
- $R_2$  : если  $x$  средний, то  $y = a_2x + b_2$ ;
- $R_3$  : если  $x$  большой, то  $y = a_3x + b_3$ .

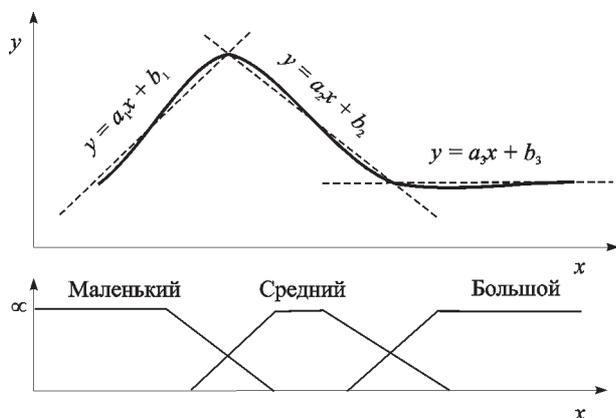


Рис. 1. Нечеткая TS-модель с одним входом и одним выходом

Известно, что в TS-модели выходное значение переменной  $y$ , полученное с использованием дефазификации по методу центра тяжести, вычисляется по формуле

$$y = \frac{\sum_{r=1}^R y_r \prod_{i=1}^N \mu_{ri}(x_i)}{\sum_{r=1}^R \prod_{i=1}^N \mu_{ri}(x_i)} = \frac{\sum_{r=1}^R \tau_r y_r}{\sum_{r=1}^R \tau_r}, \quad (2)$$

где  $y_r$  — выходное значение, полученное по правилу  $r$ ;  $\mu_{ri}$  — функция принадлежности термина  $A_{ri}$ .

При использовании TS-модели возникает следующая проблема, сущность которой показана на рис. 2.

Здесь на соседних областях заданы локальные линейные модели. Единственный путь получить желаемый гладкий вывод при помощи (2) заключается в том, что необходимо ввести новое дополнительное правило, которое уменьшит ошибку на границе. При таком подходе все правила можно разбить на два класса: *первичные*, которые задают локальные линейные модели, и *вторичные*, предназначенные для повышения качества интерполяции. Заметим, что первичная модель отвечает за интерпретируемость TS-модели, в то время как вторичная — за ее интерполяционные свойства.

Рассмотрим, каким образом могут быть определены данные модели. Для каждой входной переменной в TS-модели может быть задана своя лингвистическая шкала, а каждый терм определяется функцией принадлежности вида (3). Здесь  $\mu_i^S(x_i)$  — функция принадлежности термина  $S$ ;  $a_i^S, b_i^S, c_i^S, d_i^S$  ( $s = \overline{1, S_i}$ ) — параметры функции принадлежности такие, что  $[a_i^S, d_i^S]$  — но-

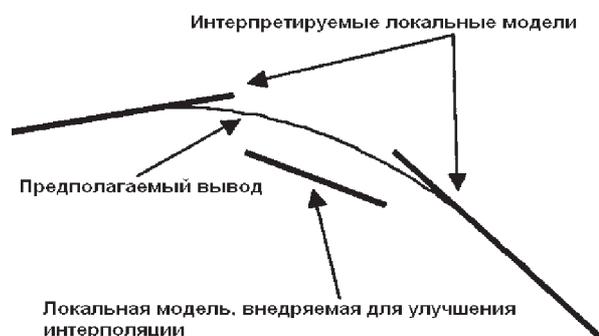


Рис. 2. Интерполяция TS-модели

ситель и  $[b_i^S, c_i^S]$  — ядро соответствующего нечеткого множества. Очевидно, что соседние термы должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$a_i^S = c_i^{S-1}, d_i^S = d_i^{S+1}.$$

Кроме того, для начального терма  $a_i^S = b_i^S$ , а для конечного —  $c_i^S = d_i^S$ .

$$\mu_i^S(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i < a_i^S \text{ или } x_i < d_i^S \\ 2 \left( \frac{x_i - a_i^S}{b_i^S - a_i^S} \right), & \text{если } a_i^S \leq x_i \leq \frac{a_i^S + b_i^S}{2} \\ 1 - 2 \left( \frac{b_i^S - x_i}{b_i^S - a_i^S} \right)^2, & \frac{a_i^S + b_i^S}{2} \leq x_i \leq b_i^S \\ 1, & \text{если } b_i^S < x_i \leq c_i^S \\ 1 - 2 \left( \frac{x_i^S - c_i^S}{d_i^S - c_i^S} \right)^2, & c_i^S \leq x_i \leq \frac{c_i^S + d_i^S}{2} \\ 2 \left( \frac{d_i^S - x_i}{d_i^S - c_i^S} \right), & \frac{c_i^S + d_i^S}{2} \leq x_i \leq d_i^S \end{cases}. \quad (3)$$

Лингвистические шкалы входных переменных  $TS$ -модели образуют входное разделение пространства входных переменных. Выбор функций принадлежности в виде (3) неоднозначен. Важно, что термы лингвистической шкалы представляются нечеткими интервалами.

Функции принадлежности вторичной модели обозначим через  $\gamma_i^t(x_i)$  ( $t = \overline{1, T_i}$ ) и будем считать, что они задаются также формулой (3), но во избежание путаницы ее параметры —  $\alpha_i^t, \beta_i^t, \chi_i^t, \delta_i^t$ , причем их значения получаются на основе параметров соответствующих линейных моделей:

$$\alpha_i^t = c_i^S, \delta_i^t = d_i^S, \beta_i^t = \chi_i^t = \frac{c_i^S + d_i^S}{2} \quad (4)$$

$$(t = 2s \text{ и } s = \overline{1, S_i - 1}).$$

Соотношение между функциями принадлежности локальной линейной и интерполяционной моделями имеет следующий вид:

$$\gamma_i^S : \alpha_i^t = c_i^S, \delta_i^t = d_i^S, \beta_i^t = \chi_i^t = \frac{c_i^S + d_i^S}{2}, \quad (5)$$

$$\text{если } t = 2s \text{ (} s = \overline{1, S_i - 1} \text{)}.$$

Изначально,  $TS$ -модель имеет комбинаторную базу правил. Это означает, что в ней описаны все возможные комбинации входных функций принадлежности, и общее число правил  $P = \prod_{i=1}^N S_i$ . Пусть  $\chi_{ir}$  и  $\beta_{ir}$  — параметры функ-

ции принадлежности  $i$ -й входной переменной, связанной с  $r$ -м начальным правилом. Если выполняется условие

$$\forall i (\chi_{ir} - \beta_{ir} > 0),$$

где  $r = \overline{1, R}$ , а  $R = \prod_{i=1}^N T_i$ , то данное правило удаляется из базы правил вторичной модели, полученной изначально по похожему с первичной принципу, т.к. они уже описаны в первичной модели. После фильтрации во вторичной модели остается  $Q = R - P$  правил.

Стоит отметить, что тип функций вывода  $y_q$  вторичной модели не обязательно должен быть 1-го порядка, как у первичной. В некоторых случаях, более высокий порядок может быть более подходящим из-за улучшенной интерполяционной эффективности. С другой стороны, иногда можно ограничиться функциями 0-го порядка, т.е. константами.

Результирующее значение выходной переменной получается по формуле

$$y = y_1 + y_2 = \sum_{p=1}^P y_p \tau_p / \sum_{q=1}^Q \tau_q + \sum_{q=1}^Q y_q \tau_q / \sum_{q=1}^Q \tau_q.$$

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ

Пусть изначально сформированы все возможные  $P$  интерпретируемых правил, и задан набор обучающих данных, состоящий из  $K$  тестовых точек  $\{(x_k, y_k)\}_{k=\overline{1, K}}$ . Метод оптимизации, описанный в этом разделе, основывается на том факте, что если изоляция правил улучшает интерпретируемость системы, то его аппроксимирующая способность зависит в первую очередь от уровня интерполируемости. Поэтому, изначально мы имеем интерпретируемую модель с высоким уровнем изоляции правил и постепенно, увеличивая зону интерполяции, стремимся к достижению удовлетворительного результата аппроксимации. Опишем более подробно алгоритм оптимизации.

**Этап 1 (входное разделение).** Для инициализации параметров функции принадлежности разобьем тестовые данные на  $h = \overline{1, H}$  кластеров (например, по методу Gustafson — Kessel [4]) с центрами  $(x_{1h}, \dots, x_{Nh}; y_h)$ . При заранее заданном уровне интерполяции/изоляции  $\eta \in [0, 1]$  входное разделение первичной модели осуществляется по следующим формулам при  $i = \overline{1, N}, h = \overline{1, H - 1}$ :

$$c_i^h = a_i^{h+1} = x_i^h + \frac{(x_i^{h+1} - x_i^h)}{2}(1 - \eta),$$

$$d_i^h = b_i^{h+1} = c_i^h + (x_i^{h+1} - x_i^h)\eta,$$

$$a_i^1 = b_i^1 = x_i^{\min}, c_i^H = d_i^H = x_i^{\max}.$$

Заметим, что при  $\forall i = \overline{1, N}$  имеем  $S_i = H$ .

Входное разделение вторичной модели построено на основе первичной в соответствии с (4) и (5).

**Этап 2 (идентификация параметров).** Параметрическая оптимизация TS-системы при условии, что задана структура базы правил и определены входные терм-множества осуществляется по методу наименьших квадратов [1]. Пусть матрица  $X_e$  содержит значения тестовых входных переменных;  $\Gamma = [W_1 X_e, \dots, W_p X_e]$ , где  $W_r$  — матрица весов.

$$W_r = \begin{bmatrix} \beta_r(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_r(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \beta_r(K) \end{bmatrix},$$

где  $\beta_r(k) = \frac{\tau_r(k)}{\sum_{l=1}^R \tau_l(k)}$  — степень активации

правила  $r$ , тогда в соответствии с методом наименьших квадратов  $y = \Gamma\theta + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — ошибка аппроксимации, причем

$$\theta = [\Gamma^T \Gamma]^{-1} \Gamma^T y. \quad (6)$$

Для получения параметров локальных линейных моделей будем использовать следующую двухэтапную процедуру: сначала параметры выходной переменной обеих моделей определяются по формуле (6), при  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ , где  $\Gamma_1 = [W_1 X_e, \dots, W_p X_e]$ ,  $\Gamma_2 = [W_1 X_e, \dots, W_q X_e]$ ,  $\theta = [\theta_1, \theta_2]$ .

Не обращая внимания на реальную конфигурацию вторичной модели, предположим, что она является TS-системой первого порядка так же, как и первичная. На втором шаге, параметры выходной переменной вторичной модели изменятся по правилу:

$$\theta_2 = [\Gamma_2^T \Gamma_2]^{-1} \Gamma_2^T (y - \Gamma_1 \theta_1). \quad (7)$$

**Этап 3 (оптимизация входного разделения).**

После инициализации модели и идентификации параметров выходной переменной осуществляется итерационная оптимизация параметров функций принадлежности входных переменных. На каждом шаге, выбирается  $k$ -я обучающая

точка (из общего числа  $K$  тестовых точек), для которой ошибка аппроксимации  $\varepsilon(k)$  максимальна. Каждая  $i$ -я компонента этой точки проецируется на соответствующие оси активированные функции принадлежности ( $\mu_i^S(x_i(k)) > 0, \gamma_i^i(x_i(k)) > 0$ ) обеих моделей обновляются.

Рассмотрим следующие ситуации:

а)  $x_i(k)$  окажется в изолированной зоне первичной модели, т.е. только  $\mu_i^S$  будет иметь ненулевую степень активности;

б)  $x_i(k)$  окажется в левой части зоны интерполяции, т.е.  $\mu_i^S$  и  $\mu_i^{S+1}$  будут обе иметь ненулевую степень активности, и  $\mu_i^S(x_i(k)) > \mu_i^{S+1}(x_i(k))$ ;

в)  $x_i(k)$  окажется в правой части зоны интерполяции, т.е.  $\mu_i^{S-1}$  и  $\mu_i^S$  имеют ненулевую степень активности, и  $\mu_i^S(x_i(k)) > \mu_i^{S-1}(x_i(k))$ .

Каждая из этих ситуаций предполагает свое правило для обновления функции принадлежности.

В случае а), ядро  $(c_i^S - b_i^S)$  функции принадлежности  $\mu_i^S$  уменьшается с обеих сторон на заранее заданное значение  $\Delta x$ . Однако при этом необходимо изменить некоторые параметры соседних функций принадлежности.

В случае б), ядро функции принадлежности  $\mu_i^S$  будет уменьшено с правой стороны и параметр  $a_i^{S+1}$  будет обновлен.

В случае в), ядро функции  $\mu_i^S$  уменьшается с левой стороны, а  $d_i^{S-1}$  будет обновлен.

Заметим, что изменение функций принадлежности входных переменных первичной модели влечет изменение функций принадлежности вторичной модели по формулам (4) и (5). Для завершения этапа обучения применяются формулы (6) и (7). Оптимизация закончена, когда критерий останова (который может быть задан в виде числа периодов, значения ошибки или уровня изменения ошибки) достигает указанного уровня.

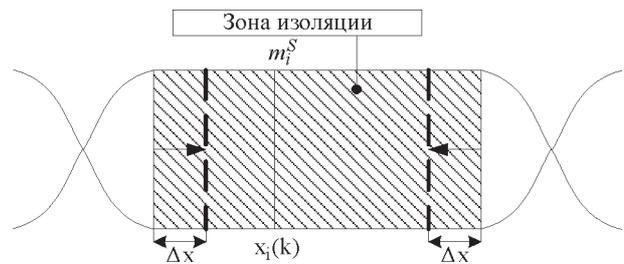


Рис. 3. Модификация функций принадлежности, в случае, когда  $x_i(k)$  оказывается в зоне изоляции.

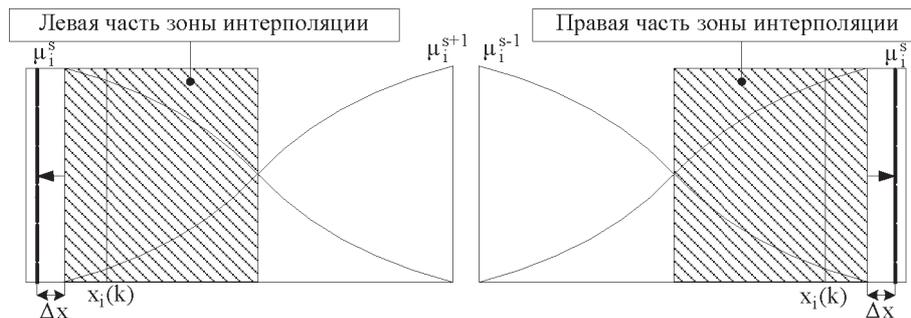


Рис. 4. Модификация функций принадлежности в случае б).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Нами рассматривались различные нелинейные функции, к которым применялся изложенный выше подход. Остановимся на следующих двух примерах.

В первом случае функция имеет вид  $y = x \cdot \sin x$ , но заранее он не известен. Однако, задан набор точек  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \overline{K}}$  (рис. 5). На этапе предварительного анализа с помощью про-

цедуры кластеризации (Gustafson-Kessel) формировались кластеры, причем в соответствии с процедурой их количество известно заранее. На рис. 5–6 представлены результаты формирования базы знаний путем проецирования на ось абсцисс полученных кластеров в соответствии с [5]. Затем использовался подход, изложенный в настоящей статье. Первичная и вторичная модели для пяти кластеров представлены на рис. 7–8, при этом начальная ошибка

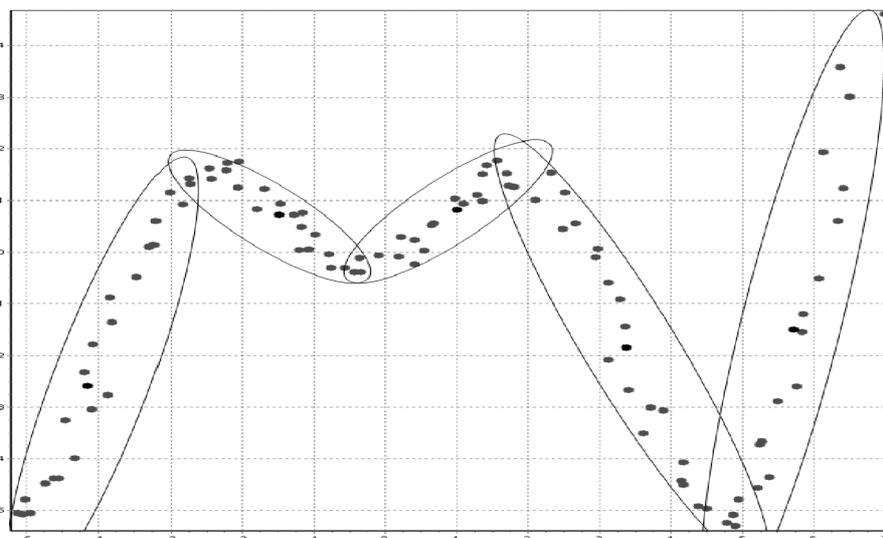


Рис. 5. Кластеры, сформированные на основе процедуры Gustafson—Kessel

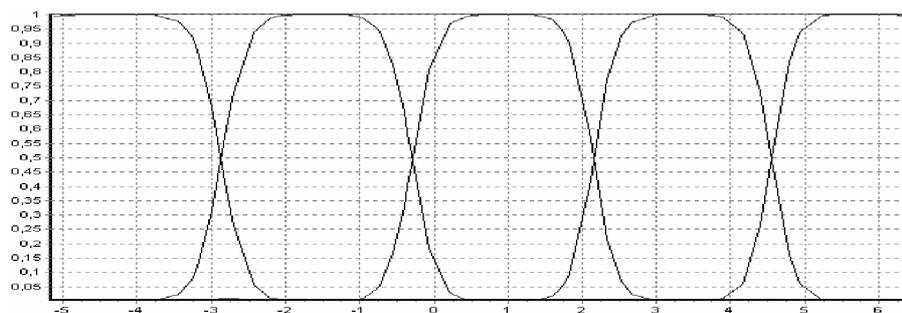


Рис. 6. Функции принадлежности, полученные проецированием кластеров

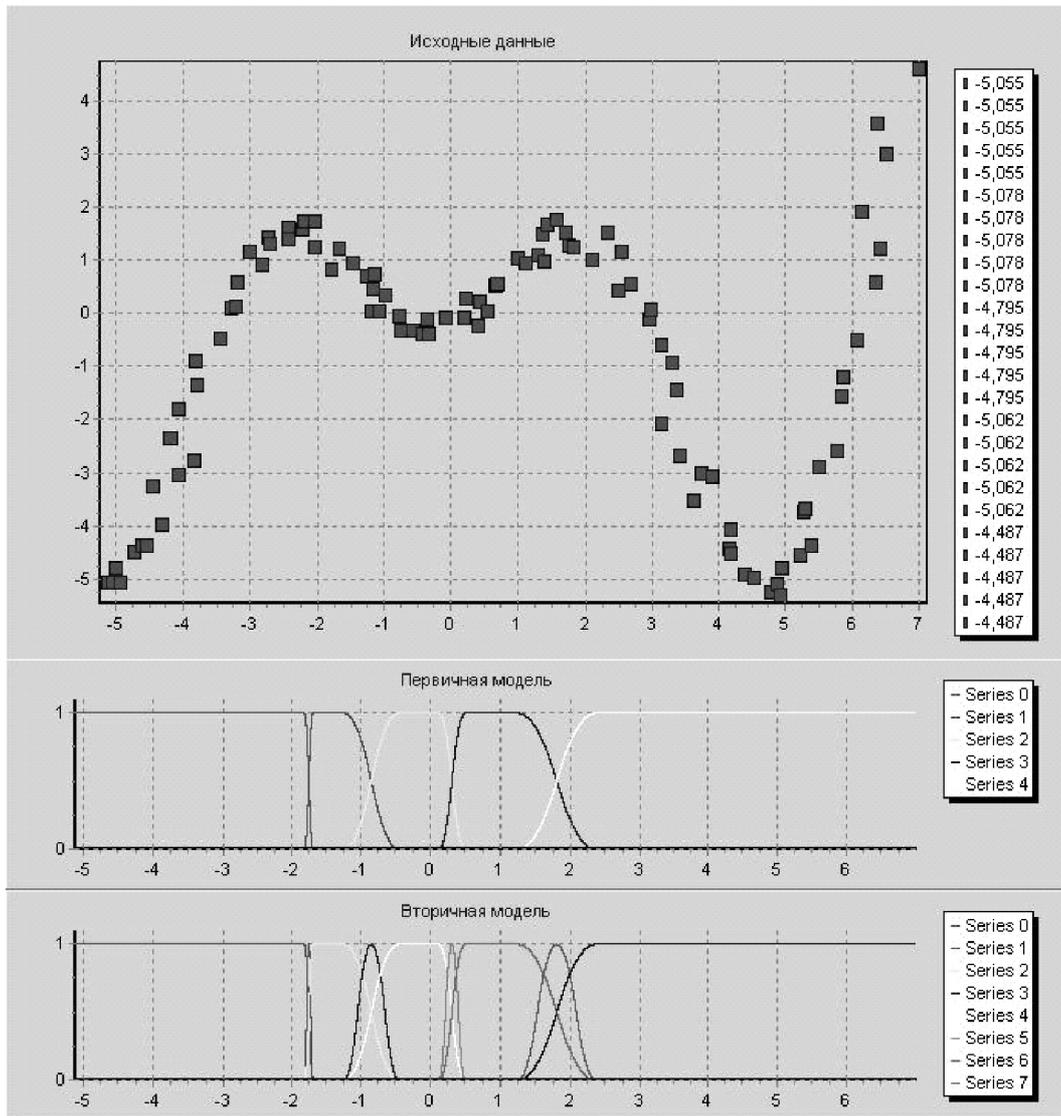


Рис. 7. Начальное входное разбиение для пяти кластеров

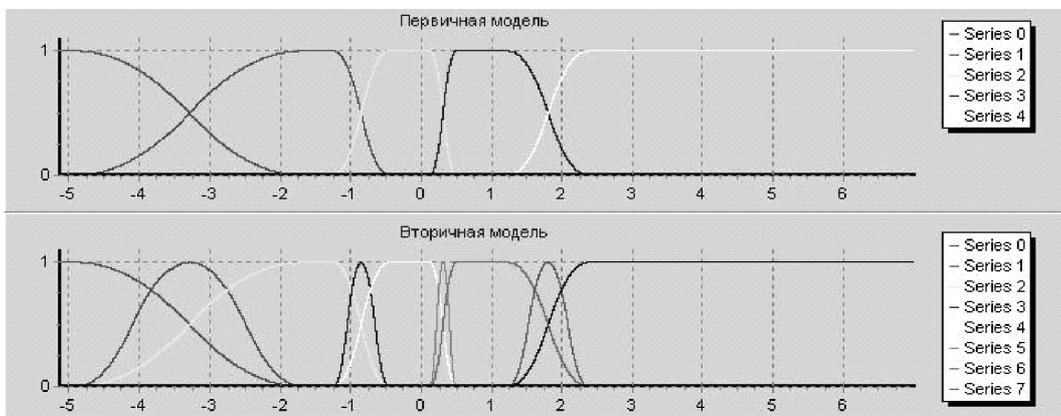


Рис. 8. База правил после коррекции

аппроксимации составила 0.357699, а после коррекции — 0.25721. Заметим, что такое разбиение на кластеры является естественным, а функции принадлежности входных переменных полностью определяются сформированными кластерами.

Следующий пример — функция

$$y = 0.6 \sin(\pi x) + 0.3 \sin(3\pi x) + 0.1 \sin(5\pi x),$$

представленная 201 точкой, которые равноудалены друг от друга на отрезке  $[-1, 1]$  входного пространства. Данная функция моделируется с помощью 3, 5 и 9 правил, каждое из которых представляет собой TS-модель  $k$ -го порядка при  $k = 0, 1, 2, 3$ . Результаты моделирования

представлены в табл., при этом результирующая степень интерполяции/изоляции определялась по формуле

$$\eta_{final} = 1 - \frac{1}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} \sum_{s=1}^{S_i} b_i^s - c_i^s,$$

где  $L$  означает число обучающих шагов, необходимое для получения минимального значения среднеквадратичной ошибки. Во всех экспериментах  $\Delta x = 0.02$ . В данном случае оптимальной оказалась функция 2-го порядка. Стоит принять во внимание, однако, что вычисление параметров функции более высокого уровня требует больших вычислительных мощностей и увели-

Таблица.

Результаты эксперимента

$P(Q)$	Порядок $y_i$	Среднеквадратичная ошибка	$\eta_{final}$	$L$
3(5)	0/1	0,0071/0,0071	0,9679/0,9679	66/62
3(5)	2/3	0,0071/0,0085	0,9679/0,9579	61/60
5(9)	0/1	0,0143/0,0087	0,6000/0,6900	16/21
5(9)	2/3	0,0064/0,0063	0,6900/0,6900	21/21
9(17)	0/1	0,1180/0,0059	0,5100/0,5900	7/15
9(17)	2/3	0,0045/0,0044	0,5900/0,5900	13/13

чит сложность модели. Увеличение  $P$  дает нам большую интерпретируемость и более быструю сходимость, но тогда увеличение этого параметра должно быть обдуманным, чтобы не усложнять систему.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дальнейшем предполагается а) исследование зависимости TS-модели от типов нечетких интервалов для представления функций принадлежности входных переменных; б) оптимизация TS-модели на основе взвешенного агрегирования правил; в) привлечение процедур кластерного анализа, которые учитывают геометрическую форму кластеров и не требуют априорного задания их количества.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Takagi, T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control // *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 1985, №15(1), P. 116—132.
2. Dickerson J. A., Kosko B. Fuzzy Function Approximation with Ellipsoidal Rules // *IEEE Transaction on fuzzy systems*. — Vol. 26. № 4, 1996. — P.542—560.
3. Butkiewicz B., Rutkowski L., Kacprzyk J. Simple modification of Takagi-Sugeno Model // *Neural Networks and Soft Computing*. — № 11, 2003. — P. 504—509.
4. Gustafson D.E., Kessel W.C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix // *IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego, 1979. P. 761—767.
5. Алтухов А.В. Формирование базы знаний нечеткой системы на основе нечеткой кластеризации // *Системный анализ и информационные технологии*, № 1, 2008.

**Кочергин Евгений Владимирович** — аспирант каф. Автоматизированных и вычислительных систем, Воронежский государственный технический университет. Тел. (4732) 208-282.

**Леденева Татьяна Михайловна** — д.т.н., проф., каф. Математических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. Тел. (4732) 208-282.

**Алтухов Антон Владимирович** — аспирант каф. Математических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. Тел. (4732) 208-282, E-mail: a.altukhov@rtec.ru

**Kochergin Evgeniy Vladimirovich** — post-graduate student Department of Automation and calculation systems, Voronezh State Technical University.

**Ledenyova Tatyna Michaylovna** — Doctor of Technic Sciences, Professor, the dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University, Tel. (4732) 208-282.

**Altuchov Anton Vladimirovich** — Post-graduate student Department of Mathematical Methods of Operational Research, the Faculty of Applied Mathematics Informatics and Mechanics, Voronezh State University, Tel. (4732) 208-282, E-mail: a.altukhov@rtec.ru.