УДК 681.3

НЕЧЕТКАЯ РАСКРАСКА

Т. М. Леденева, Л. С. Тюнина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.05.2008 г.

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы раскраски нечетких графов, а так же определение степеней разделимости нечеткого графа и нечеткого хроматического множества графа. Для нахождения нечеткого хроматического множества используется обобщенный метод Магу.

Ключевые слова: раскраска нечетких графов, степеней разделимости нечеткого графа.

Abstract. In this paper the questions of coloring of fuzzy graphs are observed. Definitions of separation degree and fuzzy chromatic set of fuzzy graphs are presented. Properties of fuzzy chromatic set are considered. The method for finding fuzzy chromatic set is suggested and substantiated.

Key words: coloring of fuzzy graphs, Definitions of separation degree of fuzzy graphs.

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивые множества нечеткого графа и связанные с ними числовые характеристики описывают важные структурные свойства нечеткого графа и имеют разнообразные приложения.

Использование нечетких графов в качестве моделей различных систем (социальных, экономических, коммуникационных сетей и др.) связано с трудностями, так как большинство изоморфных преобразований нечетких графов изменяет их внешнее представление. В связи с этим представляет интерес задача раскраски нечетких графов.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Пусть E есть множество, A — подмножество E: $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Чтобы определить отношение принадлежности между элементом $x \in \mathrm{E}$ и множеством A можно использовать характеристическую функцию $\mu : \mathrm{E} \to \{0,1\}$, такую что $\mu_{\mathrm{A}}(x)=1$, если $x \in \mathrm{A}$ и $\mu_{\mathrm{A}}(x)=0$, если $x \notin \mathrm{A}$.

Предполагается, что характеристическая функция может принимать любое значение в интервале $\{0,1\}$. В соответствии с этим элемент x_i множества E может не принадлежать A ($\mu_{\mathrm{A}} = 0$), может быть элементом A в небольшой степени (μ_{A} близко к 0), может более или менее принадлежать A (μ_{A} ни слишком близко к 0, ни слишком близко к 1), может в значительной степени быть элементом A (μ_{A} близко к 1) или, наконец, может быть элементом A ($\mu_{\mathrm{A}} = 1$).

Нечетким подмножеством A множества E называется множество вида

$$\tilde{\mathrm{A}} = \{(x_i \mid \mu_{\mathrm{A}}(x_i))\},$$

где $\mu_{\mathrm{A}}(x_i)$ — степень принадлежности элемента x_i множеству A.

Таким образом, нечеткое множество является математической структурой, которая позволяет оперировать с относительно неполно определенными элементами универсального множества, принадлежность которых к данному множеству может быть нечетко (неточно) оценена некоторым числом из $\{0,1\}$.

Для нечетких множеств вводятся основные отношения, определенные следующим образом:

1) Включение. Пусть E — множество, M — множество принадлежностей и A и B — два нечетких подмножества E; считается, что A содержится в B, если

$$\forall x \in \mathrm{E} : \mu_{\mathrm{A}}(x) \le \mu_{\mathrm{B}}(x) \qquad (1)$$

и обозначается $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Строгое включение соответствует случаю, когда в (1) по крайней мере одно неравенство строгое и обозначается $\mathrm{A} \subset\subset \mathrm{B}$.

2) Равенство. Пусть E — множество, M — множество принадлежностей и A и B — два нечетких подмножества E. Считается, что A и B равны тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathrm{E} : \mu_{\mathrm{A}}(x) = \mu_{\mathrm{B}}(x) \qquad (2)$$

и обозначается A. Если найдется по крайней мере один такой элемент A из E, что равенство $\mu_{\mathrm{A}}(x) = \mu_{\mathrm{B}}(x)$ не удовлетворяется, то A и B не равны, и обозначается $\mathrm{A} \ne \mathrm{B}$.

3) Дополнение. Пусть E — множество, M — множество принадлежностей и A и B — два нечетких подмножества E. Считается, что A и B дополняют друг друга, если

$$\forall x \in \mathrm{E}: \mu_{\mathrm{B}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x) \tag{3}$$

и обозначается $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}}$. Очевидно, что $(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{A}$.

Пересечение. Пусть E — множество, M — множество принадлежностей и A и B — два нечетких подмножества E; пересечение $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ определяется как наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B:

$$\forall x \in \mathrm{E}: \mu_{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}(x) = \min(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(x)) \tag{4}$$

4) Объединение. Пусть E — множество, M — множество принадлежностей и E и B — два нечетких подмножества E; объединение $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ определяется как наименьшее нечеткое подмножество, которое содержит как A, так и B:

$$\forall x \in \mathrm{E}: \mu_{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}(x) = \max(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(x)) \tag{5}$$

Пусть $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ есть функция принадлежности элемента x нечеткому подмножеству A и определены простейшие операции, которые можно выполнять с нечеткими подмножествами одного и того же универсального множества. Предполагается, что множество степеней принадлежности произвольного элемента универсального множества к нечеткому множеству есть $\mathrm{M} = [0,1]$.

Нечеткая переменная задается тройкой $\langle \alpha, U, \mathrm{A} \rangle$, где α — название переменной, U — универсальное множество (область определения переменной α), A — нечеткое множество на U с функцией принадлежности $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, описывающее ограничения на значение нечеткой переменной α. Пусть A и B — нечеткие переменные с функциями принадлежности $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ и $\mu_{\mathrm{B}}(x)$. Учитывая введенные понятия можно определить следующие основные операции над нечеткими переменными:

1) $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = \min(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (6)

2) $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} = \max(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (7)

3) $\overline{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{A}$ (8)

2. УСТОЙЧИВЫЕ МНОЖЕСТВА НЕЧЕТКИХ ГРАФОВ

Пусть задан нечеткий неориентированный граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$, где X — множество вершин графа, $\tilde{U} = \{\mu_U(x_i, x_j) \mid (x_i, x_j) \in X^2\}$ — нечеткое множество ребер графа, вершина x_i является началом, x_j — концом ребра (x_i, x_j); $\mu_U : X^2 \to [0,1]$ — значение функции принадлежности для ребра (x_i, x_j). Рассмотрим нечеткий подграф $\tilde{G}' = (X', \tilde{U}')$, где $X' \subseteq X$, $U' \subseteq \tilde{U}$. Пусть

$$t = \max_{\forall x_i, x_j \in X'} \max \{\mu_U(x_i, x_j)\}.$$

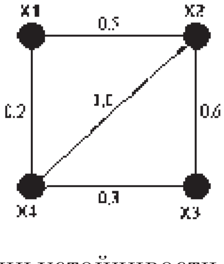
Множество вершин графа называется независимым, если никакие две вершины в нем не являются смежными. Независимое множество называется максимальным, если оно не является собственным подмножеством никакого другого независимого множества.

Множество вершин называется доминирующим, если для каждой вершины, не входящей в него, существует дуга с начальной вершиной в этом множестве. Доминирующее множество называется минимальным, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества.

Ядро — множество вершин графа, которое является одновременно минимальным доминирующим и максимальным независимым. Подмножество вершин X' называется *нечетким внутренне устойчивым* множеством со степенью внутренней устойчивости $\alpha(X') = 1 - t$.

Если $X' = X$, то величина $\alpha(X)$ определит степень внутренней устойчивости графа G. Подмножество вершин $X' \subseteq X$ называется *максимальным нечетким внутренне* устойчивым множеством со степенью $\alpha(X')$, если для любого $X'' \supseteq X'$ величина $\alpha(X'') < \alpha(X')$.

Пример. Для графа, представленного на рисунке, найдем нечеткие внутренне устойчивые множества.



При степени устойчивости $\alpha = 0{,}1$ нечеткие внутренне устойчивые множества

$$\Psi_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Psi_2 = \{x_1, x_3, x_4\};$$

при степени устойчивости $\alpha = 0{,}3$ нечеткие внутренне устойчивые множества

$$\Psi_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Psi_2 = \{x_1, x_3, x_4\};$$

при степени устойчивости $\alpha = 0{,}5$ нечеткие внутренне устойчивые множества

$$\Psi_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Psi_2 = \{x_2\}.$$

Рассмотрим нечеткий граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$. Пусть X' — произвольное подмножество множества вершин X. Для каждой вершины $y \in X \setminus X'$ определяется значение:

$$\gamma(y) = \max_{x \in X} \{\mu_U(y, x)\} \qquad (9)$$

Множество X' называется *нечетким внешне устойчивым* множеством для вершины y со степенью внешней устойчивости $\beta(X') = \min_{y \in X \setminus X'} \gamma(y)$. Учитывая выражение (9), получается $\beta(X') = \min_{y \in X \setminus X'} \max_{x \in X'} \gamma\{\mu_U(y, x)\}$.

Подмножество $X' \subseteq X$ называется *минимальным внешне устойчивым* множеством графа $\tilde{G}$ со степенью $\beta(X')$, если для любого подмножества $X'' \subseteq X$ выполняется условие $\beta(X'') < \beta(X')$.

Пусть задан нечеткий граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$. Пусть $N \subseteq X$ — произвольное подмножество вершин с нечеткой степенью внутренней и внешней устойчивости соответственно $\alpha(N)$ и $\beta(N)$.

Подмножество $N \subseteq X$ называется *нечетким ядром* графа $\tilde{G}$ со степенью нечеткости $\lambda(N) = \alpha(N) \wedge \beta(N)$.

3.ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД MARY

3.1. НЕЧЕТКИЕ ВНУТРЕННЕ УСТОЙЧИВЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть Ψ — некоторое нечеткое внутренне устойчивое множество со степенью внутренней устойчивости $\alpha(\Psi)$. Для произвольных вершин $x_i, x_j \in X$ может выполняться один из следующих случаев:

1. $x_i \notin \Psi$;
2. $x_j \notin \Psi$;
3. $x_i \in \Psi$ и $x_j \in \Psi$.

В последнем случае степень внутренней устойчивости $\alpha(\Psi) \leq 1 - \mu_U(x_i, x_j)$. Перечисленные выше случаи можно объединить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\forall x_i \in X, \forall x_j \in X (x_i \notin \Psi \vee x_j \notin \Psi \vee \\ &\vee (\alpha(\Psi) \leq 1 - \mu_U(x_i, x_j))). \end{aligned} \qquad (10)$$

С каждой вершиной $x_i \in X$ свяжем булеву переменную p_i, такую что

$$p_i = \begin{cases} 1 \text{ при } x_i \in \Psi, \\ 0 \text{ при } x_i \notin \Psi. \end{cases}$$

Высказыванию $\alpha(\Psi) \leq 1 - \mu_U(x_i, x_j)$ ставится в соответствие нечеткая переменная $\xi_{ij} = 1 - \mu_U(x_i, x_j)$.

Учитывая, что квантор $\forall$ обобщает конъюнкцию, выражение (10) можно записать в виде (11) и рассматривать как логическое высказывание.

$$\Phi_\Psi = \mathop{\wedge}_{i} \mathop{\wedge}_{j \neq i} (\overline{p}_i \vee \overline{p}_j \vee \xi_{ij}) \qquad (11)$$

На основе нечеткой логики [5] выражение (11) можно привести к каноническому представлению в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), раскрывая скобки и приводя подобные члены по закону поглощения. Тогда для каждого слагаемого в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) совокупность всех вершин, соответствующих переменным, которые в ней отсутствуют, дает максимальное внутренне устойчивое множество с вычисленной степенью внутренней устойчивости.

3.2. НЕЧЕТКИЕ ВНЕШНЕ УСТОЙЧИВЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть T — некоторое нечеткое внешне устойчивое множество нечеткого графа $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$ со степенью внешней устойчивости $\beta(T)$. Тогда должно выполняться одно из двух условий (или оба одновременно):

a) $\qquad x_i \in T$;

b) $$\begin{aligned} &\forall x_i \in X (x_i \in T \vee \\ &\vee \exists x_j ((x_j \in T) \wedge \mu_U(x_i, x_j) \geq \beta(T))) \end{aligned} \qquad (12)$$

Каждой вершине $x_i \in X$ поставим в соответствие булеву переменную p_i, такую что

$$p_i = \begin{cases} 1 \text{ при } x_i \in T, \\ 0 \text{ при } x_i \notin T, \end{cases}$$

тогда высказыванию $\mu_U(x_i, x_j) \geq \beta(T)$ ставится в соответствие нечеткая переменная $\xi_{ij} = \mu_U(x_i, x_j)$.

Переходя от кванторного предиката (12) к бескванторной форме (квантор $\exists$ обобщает дизъюнкцию) получим высказывание

$$\Phi_T = \mathop{\wedge}_{i} (p_i \vee \mathop{\vee}_{j} (p_j \wedge \xi_{ij})).$$

Полагая $\xi_{ij} = 1$ и учитывая, что для любого x_i выполняется равенство $p_i \vee ((\mathop{\vee}_{j} p_i) \wedge \xi_{ij}) = \mathop{\vee}_{j} p_j \xi_{ij}$, окончательно получим:

$$\Phi_T = \mathop{\wedge}_{i} \mathop{\vee}_{j} (\xi_{ij} p_j) \qquad (13)$$

Выражение (13) представим в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ). Каждый член этого разложения дает минимальное внешне устойчивое множество с полученной наибольшей степенью внешней устойчивости. Это следует из того, что такой член не содержит переменных с отрицанием, и поэтому из множества вершин, соответствующих переменным, встречающимся в этом члене, нельзя ни одну удалить.

3.3. ЯДРА НЕЧЕТКОГО ГРАФА

Рассмотрим метод нахождения всех нечетких ядер графа с наибольшей степенью λ. Пусть $N \subseteq X$ — нечеткое ядро графа G со степенью $\lambda(N) \in [0,1]$. Учитывая определение нечеткого ядра графа, получим следующее выражение:

$$\Phi_N = \Phi_\Psi \wedge \Phi_T \qquad (14)$$

где Φ_Ψ и Φ_T — высказывания, определяемые выражениями (11) и (13).

4. НЕЧЕТКОЕ ХРОМАТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО

Пусть задан нечеткий граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$, где $|X| = n$ — количество вершин графа; U — множество ребер, причем на каждом ребре $(x, y) \in X$ определим степень принадлежности $\mu_G(x, y), \mu_G : U \to [0,1]$.

Пусть G является k-хроматическим $(1 \le k \le n)$, тогда можно рассматривать подграф $\tilde{G}_i = (X_i, \tilde{U}_i)$, где X_i — подмножество вершин, окрашенных в i-й цвет. Тогда величина $\alpha_i = 1 - \vee_{x,y \in X_i} \mu_G(x, y)$ определяет степень внутренней устойчивости нечеткого подграфа $\tilde{G}_i = (X_i, \tilde{U}_i)$.

Величина

$$L = \mathop{\wedge}_{i=\overline{1,k}} \alpha_i = \mathop{\wedge}_{i=\overline{1,k}} (1 - \mathop{\vee}_{x,y \in X_i} \mu_G(x, y))$$

называется степенью разделимости нечеткого графа G при его окраске в k цветов.

При раскраске нечеткого графа возникают следующие задачи:

1) для заданного k-хроматического нечеткого графа G определить наибольшую степень разделимости L;

2) для заданной степени разделимости L определить минимальное число красок k, необходимых для раскраски нечеткого графа G.

Нечеткий граф G может быть раскрашен в произвольное число красок k и при этом степень разделимости L зависит от их числа. Таким образом, нечеткому графу G можно поставить в соответствие семейство нечетких множеств $\Re = \{\overline{A}_G\}$, где $\overline{A}_G = \{L_{\tilde{A}}(k)/k, k = \overline{1,n}\}$ и $L_{\tilde{A}}(k)$ определяет степень разделимости графа $\tilde{G}$ при некоторой его раскраске в k цветов.

Нечеткое множество $\overline{\gamma} = \{L_{\tilde{\gamma}}(k)/k, k = \overline{1,n}\}$ называется нечетким хроматическим множеством графа G, если для любого другого множества $\overline{A}_G \in \Re$, справедливо $\overline{A}_G \subseteq \gamma$.

Иначе говоря,

$$\forall \overline{A}_G \in \Re, \forall k = \overline{1,n}, \ (L_A(k) \le L_{\tilde{\gamma}}(k)).$$

Или, иными словами, нечеткое хроматическое множество определяет наибольшие степени разделимости графа G при его раскраске в один, два... или n цветов.

Если для нечеткого графа $\tilde{G}$ известно нечеткое хроматическое множество $\gamma(G)$, то сформулированные выше задачи решаются автоматически. Поэтому задача нахождения нечеткого хроматического множества является базой для решения проблем 1)—2).

Рассмотрим алгоритм нахождения *нечеткого хроматического множества* нечеткого графа:

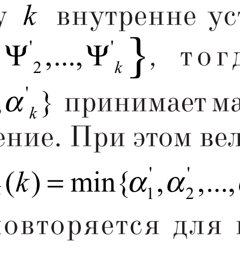
1) Для нечеткого графа $\tilde{G}$ определить семейство всех максимальных нечетких внутренне устойчивых множеств $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_r\}$ со степенями внутренней устойчивости $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ соответственно;

2) Из множества $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_r\}$ сформировать выборку k внутренне устойчивых множеств $\{\Psi'_1, \Psi'_2, ..., \Psi'_k\}$, тогда величина $\min\{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_k\}$ принимает максимально возможное значение. При этом величина

$$L_{\tilde{\gamma}}(k) = \min\{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_k\}.$$

Шаг 2) повторяется для всех значений $k = \overline{1, n-1}$.

Пример. Для графа, представленного на рисунке, найдем хроматические множества при окраске вершин в k цветов и степени разделимости.



При раскраске графа в три цвета ($k = 3$), степень разделимости $L_{\tilde{\gamma}}(3) = 0,2$. Хроматичсекие множества:

$$\Psi_1 = \{x_2, x_4\}, \Psi_2 = \{x_1\}, \Psi_3 = \{x_3\}.$$

При раскраске графа в два цвета ($k = 2$), степень разделимости $L_{\tilde{\gamma}}(2) = 0,2$. Хроматичсекие множества:

$$\Psi_1 = \{x_2, x_4\}, \Psi_2 = \{x_1, x_3\}.$$

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель эксперимента — установление взаимосвязей между множествами и числовыми характеристиками, которые связаны с понятием устойчивости для обычных и нечетких графов.

Для реализации эксперимента была разработана программа в среде разработки Borland Delphi.

В процессе эксперимента рассматривались следующие задачи:

1) влияние значений степени устойчивости на устойчивые множества;

1) исследование характеристик хроматического множества при раскраске вершин графа в один цвет;

1) исследование характеристик хроматического множества при раскраске вершин графа в k цветов.

Анализ результатов эксперимента позволил сделать следующие выводы:

1) Если обозначить через $T_{\alpha_1} = \{\Psi_{11}, \Psi_{12}, ..., \Psi_{1\alpha_1}\}$ и $T_{\alpha_2} = \{\Psi_{21}, \Psi_{22}, ..., \Psi_{2\alpha_2}\}$ — семейства максимальных внутренне устойчивых множеств со степенями внутренней устойчивости α_1 и α_2 соответственно, то для $\alpha_1 < \alpha_2$ справедливы следующие утверждения:

a) $\left|T_{\alpha_1}\right| \le \left|T_{\alpha_2}\right|$;

b) $(\forall \Psi_{2i} \in T\alpha_2)[\exists \Psi_{1j} \in T_{\alpha 1} \mid \Psi_{2i} \subseteq \Psi_{1j}]$

2) Если обозначить через $A = \{\Phi_{11}, \Phi_{12}, ..., \Phi_{1n}\}$ — семейства максимальных внутренне устойчивых множеств обычного графа и $T = \{T_{11}, T_{12}, ..., T_{1m}\}$ — семейства максимальных внутренне устойчивых множеств нечеткого графа со степенями внутренней устойчивости $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, то справедливо следующее выражение $A \subseteq T$.

3) При окраске нечеткого графа $\tilde{G}$, содержащего n вершин в один цвет, степень разделимости равна 0, если существует хотя бы одно ребро со степенью 1. Другими словами степень $L_{\tilde{\gamma}}(n) \ge 0$ причем $(L_{\tilde{\gamma}}(1) = 0) \leftrightarrow (\exists x, y \in X \mid \mu_G(x, y) = 1)$.

4) Чем большее количество красок используется при окраске нечеткого графа $\tilde{G}$, тем больше его оптимальная степень разделимости L. Другими словами справедливо выражение

$$\forall i, j = \overline{1, n}(i > j \rightarrow L_{\tilde{\gamma}}(i) \ge L_{\tilde{\gamma}}(j)).$$

5) Если обозначить через $\gamma_1 = \{L_{\tilde{\gamma}_1}(k_1)/k_1, k_1 = \overline{1, n}\}$ — хроматическое множество нечеткого графа, а через $\gamma_2 = \{L_{\tilde{\gamma}_2}(k_2)/k_2, k_2 = \overline{1, n}\}$ — хроматическое множество нечеткого графа с уменьшенными функциями принадлежности, то справедливо следующее выражение: $L_{\tilde{\gamma}_2} \ge L_{\tilde{\gamma}_1}$, при $k_1 = k_2$.

6) Очевидно, что при раскраске нечеткого графа $\tilde{G}$, содержащего n вершин, в n цветов, степень разделимости $L_{\tilde{\gamma}}(n) = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берж К. Теория графов и ее применение* / К. Берж; пер. с франц. Б.А. Дашевского. — 3-е изд. — М.: Фолио, 2000. — 320 с.

2. *Власов А.В., Хахалин Г.К.* Процедура построения графа с “внутренне устойчивым множеством” // Вопросы теории графов. —1998. —№ 8. — С. 56—61.

3. *Леденева Т.М.* Обработка нечеткой информации: учебное пособие / Т.М. Леденева. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. — С. 110 — 130.

4. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткая раскраска и оценка степени изоморфизма нечетких графов / Л.С. Берштейн, А.В. Боженюк // Известия академии наук. Теория и системы управления. — 2002. — № 3.— С. 116—122.

5. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман; пер. с франц. В.Б. Кузьмина. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

Леденева Татьяна Михайловна — д.т.н., проф., каф. Матетатических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. Тел.(4732) 208-282.

Тюнина Людмила Сергеевна — выпускница каф. Матетатических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. E-mail: Lusia07@list.ru.

Ledenyova Tatyna Michaylovna — Doctor of Technic Sciences, Professor, the dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University, Tel.(4732) 208-282.

Tyunina Lydmila Sergeevna — Student of the dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University, E-mail: Lusia07@list.ru.