УДК 519.95

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ СРЕДНИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Е. М. Михайлов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.05.2008 г.

Аннотация. Получена система уравнений для нахождения интерполяционных многочленов на основе принимаемых на отрезках средних значений функции. Введен термин "квадратурная интерполяция".

Ключевые слова: система уравнений, интерполяционая функция, квадратурная интерполяция.

Abstract. The system of equation for finding interpolation function by mean function values is given. A new term "quadrature interpolation" is introduced.

Key words: The system of equation, interpolation function, quadrature interpolation.

ВВЕДЕНИЕ

Определение значений функции внутри интервала по заданному набору значений используется в самых различных прикладных задачах. Интерполяцией называют приближение функции полиномом на отрезке таким образом, чтобы оно совпадало со значениями функции в узлах и удовлетворяло ряду дополнительных условий. Наиболее часто для этих целей используются кубические сплайны, для определения которых налагаются требования равенства первой и второй производной смежных полиномов в промежуточных точках [1, 2]. Сплайны позволяют эффективно решать задачи обработки экспериментальных зависимостей, имеющих достаточно сложную структуру.

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

На начальном этапе считается известными значения функции в $n+1$ одной точке, т.е. задано множество значений аргумента $\{x_i\}$ и значений функции $\{y_i\}$, для $i = 0,1..n$. Однако, в ряде прикладных задач оказывается достаточно трудно отыскать такие значения функции. Например, если речь идет о построении плотности вероятности какого-либо процесса, то измеряемая величина не может быть получена напрямую со шкалы прибора, а напротив, в результате эксперимента возможным оказывается измерение некоторого среднего значения, которое может быть найдено только за определенный интервал времени. Тогда функция принимает свое среднее значение в неопределенной точке на этом интервале. Подобные задачи возникают при описании случайных процессов, таких как поступление звонков на телефонную станцию, прохождение машин через определенную точку трассы, трафик работы компьютерной сети. Необходимость данной процедуры возникает в случае численного отыскания плотности вероятности какого-либо процесса. В этом случае необходимо изменить процедуру построения интерполяционной функции. В данной статье излагается способ, с помощью которого можно построить интерполяционный многочлен по измеренным средним значениям функции. Это построение будем проводить аналогично построению кубических сплайнов, а для получившейся интерполяции предложим использовать термин "квадратурная интерполяция" или "квадратурный сплайн".

Пусть известны среднее значение функции на n интервалах, т.е. известны n значений $\{y_i\}$ $(i = 1,2..n)$ и $n+1$ значений $(i = 0,1..n)$ Будем искать функцию f_i, описывающую промежуточные значения на каждом i-ом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ в виде:

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2. \qquad (1)$$

На эту функцию наложим условия непрерывности ее и ее первой производной в промежуточных точках, а также требования равенству интеграла на отрезке заданному значению Y_i:

$$\begin{cases} f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i), \\ f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i), \\ \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)dx = Y_i = y_i h_i = a_i h_i + b_i \dfrac{h_i^2}{2} + c_i \dfrac{h_i^3}{3}, \end{cases} \quad (2)$$

здесь введено обозначение $h_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i-го интервала, а y_i — среднее значение на нем. Из последней системы с учетом (1) имеем:

$$\begin{cases} a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = a_{i+1}\ . \\ b_i + 2c_i h_i = b_{i+1} \\ a_i + b_i \dfrac{h_i}{2} + c_i \dfrac{h_i^2}{3} = y_i \end{cases} \quad (3).$$

Для построения интерполяционных многочленов требуется найти *3n* неизвестных: *n* наборов коэффициентов a_i, b_i, c_i уравнения (1). Промежуточных точек, для которых записаны системы уравнений (3) имеется *n-1*, что позволят отыскать только *3(n-1)* неизвестных. Для определения остальных параметров нужно использовать дополнительные условия. Одно из них состоит в определении среднего значения y_n для последнего интервала. Остальные условия должны быть определены специально в зависимости от свойств описываемого объекта. В данной задаче будем полагать, что значение функции в начальной точке x_0 известно, а также будем считать, что процесс со временем стремиться к линейному поведению. В итоге система дополнительных условий будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{b_n}{2} h_n + \dfrac{c_n}{3} h_n^2 = y_n h_n \\ a_1 = y(x_0) \\ c_n = 0 \end{cases} \quad . \quad (4)$$

Решая систему (3) относительно b_i получим рекуррентное соотношение на коэффициенты b_i:

$$\begin{cases} b_i \dfrac{h_i}{6} + b_{i+1}\left(\dfrac{h_i}{3} + \dfrac{h_{i+1}}{3}\right) + b_{i+2} \dfrac{h_{i+1}}{6} = y_{i+1} - y_i \\ a_i = y_i - \dfrac{h_i}{6}(2b_i + b_{i+1}) \\ c_i = \dfrac{b_{i+1} - b_i}{2h_i} \end{cases} \quad . \quad (5)$$

Первое уравнение системы (\ref{a1f5}) определяет трехдиагональную матрицу вида

$$\begin{cases} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{cases} \quad (6)$$

которую можно решить методом прогонки. Поскольку в каждом уравнении участвуют только три неизвестных, а в первом и последнем два, можно последовательно исключая неизвестные выполнить первый проход для устранения одного неизвестного каждого уравнения, и обратный для отыскания оставшихся. Достоинство данного метода состоит в том, что для решения необходимо использовать только *4n* параметров, а не n^2, как в случае решения обычной системы линейных уравнений.

Фрагмент кода программы для решения такой системы будет выглядеть:

```
{прямой ход}
for i:=2 to n do
begin
b[i]:=b[i]-c[i-1]*a[i]/b[i-1];
d[i]:=d[i]-d[i-1]*a[i]/b[i-1];
end;
{обратный ход}
d[n]:=d[n]/b[n];
for i:=n-1 downto 1 do
d[i]:=(d[i]-d[i+1]*c[i])/b[i]
```

Здесь *d[i]* — правая часть уравнений (6), в которых впоследствии формируются решение системы. Отметим, что в системе (6) первое и последние уравнения неполные, содержат связь только между двумя неизвестными, тогда как в рекуррентном соотношении системы (5) всегда присутствуют три неизвестных. В алгоритме решения системы этот факт проявляется в том, что в нем отсутствуют параметры *a[1]* и *c[n]*. Два неполных уравнения можно получить из системы (4), последнее уравнения в системах (4) и (5) дают, что $b_{i+1} = b_n$. Из системы (5) и условия $a_1 = f(x_0)$ имеем два неполных уравнения системы (6):

$$\begin{cases} b_1 \dfrac{h_1}{3} + b_2 \dfrac{h_1}{6} = y_1 - f(x_0) \\ b_{n-1} \dfrac{h_{n-1}}{6} + b_n\left(\dfrac{h_{n-1}}{3} + \dfrac{h_n}{2}\right) = y_n - y_{n-1} \end{cases} \quad . \quad (7)$$

Найдя коэффициенты b_i с помощью уравнений системы (5) можно определить коэффициенты a_i и c_i интерполяционных многочленов (1).

При приближении функции использовались многочлены второй степени. Если использовать многочлены более высоких степеней, то количество необходимых дополнительных уравнений будет расти, из-за нехватки одной системы уравнений с условиями сшивки интерполирующих функций на границе, так как промежуточных точек на единицу меньше, чем интервалов. Одно условие определяется известным средним значением для последнего промежутка, а оставшиеся *N-1* уравнение нужно искать из специальных условий задачи, как в системе (4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На рис. представлен результат расчета интерполяции функции на основе систем уравнений (5) и (7). Обращает на себя внимание, что интерполяционная функция не проходит через узловые точки, но на каждом промежутке пересекает линию среднего значения. Если на определенном промежутке поведение функции близко к линейному, то приближение достигает среднего значения на интервале близко к его середине, но если поведение функции более сложное, то положения точек пересечения при-

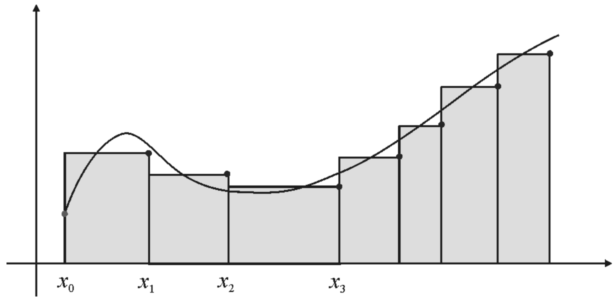

Рис.

ближения со средним значением функции менее симметрично. Поскольку реальное значение функции на границе интервала может значительно отличаться от ее среднего значения, возникает необходимость использования этого метода. Данное исследование может быть полезно как при обработке статистической информации, так и при проектировании систем прогноза каких-либо технологических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов С.Н.* Численные методы / С. Н. Бахвалов — М:Наука, 1957 — 632 с.

2. *Fritsch F.N. Monotone Piecewise Cubic Interpolation* / F.N. Fritsch, R.E. Carlson // J. of Numerical Analysis — 1980. — V. 17(2).— P. 238—246.

Михайлов Евгений Михайлович — к. ф.-м. н., доцент кафедры Программирования и информационных технологий Воронежский государственный университет. тел. (4732) 208-470. E-mail: mihailov@cs.vsu.ru

Myhailov Yevgeny Myhailivich — Candidate of physics-math. Sciences, Assistant, the dept. of Programming and Information Technologies, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-470. E-mail: mihailov@cs.vsu.ru.