УДК 519.112.71

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Ю. А. Осыкина, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.05. 2008 г.

Аннотация. Рассматривается многокритериальная транспортная задача с разрывной целевой функцией и целочисленными переменными. Предложен способ отыскания нижней границы значения целевой функции и приближенный алгоритм «жадного» типа.

Ключевые слова: многокритериальная транспортная задача, целевая функция, алгоритм «жадного» типа.

Abstract. The multicriterion transport problem with discontinuous objective function and integer variables is considered. The method of searching for the lower boundary value of objective function and the approximate algorithm of "greedy" type are suggested.

Key words: multicriterion transport problem, objective function, algorithm of "greedy" type.

В стандартной транспортной задаче требуется минимизировать суммарные затраты, связанные с перевозками продукции из пунктов отправления в пункты потребления. На практике часто возникает задача с другим критерием — требуется минимизировать количество поставщиков для каждого потребителя. Такая задача может быть описана математически следующим образом.

Задача 1.

$$\max_j f_j(y) = \max_j \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \to \min; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,,\ \ i = 1,2,\ldots,m; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,\ \ j = 1,2,\ldots,n; \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n; \qquad (4)$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } x_{ij} = 0 \\ 1, \text{если } x_{ij} > 0 \end{cases}, \qquad (5)$$

$$i = 1,\ldots m; j = 1,\ldots n.$$

Здесь введены следующие обозначения:

m — количество пунктов отправления (поставщиков), n — количество пунктов назначения (потребителей), a_i — объем производства продукта в i-м пункте отправления, b_j — объем потребления продукта в j-м пункте назначения, x_{ij} — количество единиц продукта, планируемое к перевозке из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, y_{ij} — наличие связи между i-м пунктом отправления и j-м пунктом назначения.

Каждая целевая функция $f_j(y)$ фиксирует число связей j-го потребителя с поставщиками. Целевая функция исходной задачи требует минимизировать максимальное (среди всех потребителей) число поставщиков.

Последовательные преобразования модели (1)-(5) позволяют получить задачу, оценочную к исходной. Результат решения оценочной задачи является нижней границей целевой функции исходной задачи.

Утверждение 1. Логическое условие (5) может быть заменено на условие вида

$$x_{ij} \leq M_{ij}\, y_{ij}\,, \quad i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n, \qquad (5')$$

где $M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$, i = 1, 2, ..., m; j = 1,2,..., n. Задача при этом остается эквивалентной исходной.

Покажем, что переменные x_{ij} и y_{ij} в оптимальной точке обращаются в нуль одновременно. Действительно, если некоторое $\hat{y}_{ij} = 0$, то условие (5') запишется в виде $\hat{x}_{ij} \leq 0$. Вместе с условием неотрицательности получаем $\hat{x}_{ij} = 0$. С другой стороны, если $\hat{x}_{ij} = 0$, а $\hat{y}_{ij} = 1$, то, сохраняя полученные допустимые значения $\hat{x}_{ij}$, можно заменить значения $\hat{y}_{ij}$ на $y_{ij}{*} = 0$, при этом значение целевой функции не увеличится. Таким образом, в дальнейшем рассматривается задача 2.

Задача 2.

$$\max_j \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \to \min; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\ldots,m; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (4)$$

$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (5')$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \ i = 1,\ldots m; \ j = 1,\ldots n. \quad (6)$$

Вводится новая переменная, обозначенная через μ и равная $\mu = \max_j \sum_{i=1}^{m} y_{ij}$

Тогда задача 2 эквивалентно переписывается в виде задачи 3.

Задача 3.

$$\mu \to \min; \quad (1')$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\ldots,m; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (4)$$

$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (5')$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \ i = 1,\ldots m; \ j = 1,\ldots n; \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \leq \mu, \ j = 1,2,\ldots,n. \quad (7)$$

Утверждение 2. Если в задаче 3 требование целочисленности (6) заменить условием

$$0 \leq y_{ij} \leq 1, \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n, \quad (6')$$

то в оптимальной точке условие (5') выполняется как равенство.

Действительно, пусть (x^*, μ^*, y^*) оптимальная точка в задаче (1'),(2),(3),(4),(5'),(6'),(7), и пусть ограничение (5') для некоторой пары номеров (l, k) выполняется как строгое неравенство, то есть $x_{lk}{}^* < M_{lk} \cdot y_{lk}{}^*$, тогда, не меняя значений x_{lk}, можно уменьшить y_{lk} так, чтобы выполнялось равенство, полагая $\hat{y}_{lk} = \frac{x_{lk}{}^*}{M_{lk}}$. Можно выбрать точку $(x^*, \mu^*, \hat{y})$, где $\hat{y}_{ij} = y_{ij}{}^*, (i,j) \neq (l,k)$, $\hat{y}_{lk} = \frac{x_{lk}{}^*}{M_{lk}}$ Очевидно, что в выбранной таким образом точке все ограничения выполняются и при этом возможно уменьшение оптимального значения μ^*.

Таким образом, из условия (5') можно выразить переменные $y_{ij} = \frac{x_{ij}}{M_{ij}}$, i = 1, 2, ..., m; j = 1,2,..., n и перейти к следующей задаче.

Задача 4.

$$\mu \to \min; \quad (1')$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\ldots,m; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{M_{ij}} - \mu \leq 0, \ j = 1,2,\ldots,n. \quad (7')$$

Получена задача линейного программирования, которая может быть решена, например, симплексным методом. В результате решения этой задачи получается нижняя оценка μ^* значения целевой функции исходной задачи.

С другой стороны, используя «жадные» алгоритмы получения приближенного решения транспортной задачи, можно получать допустимые точки с некоторым значением целевой функции R. Оптимальное значение целевой функции исходной задачи φ^* находится в интервале $\mu^* \leq \varphi^* \leq R$.

Для получения рекордов R предполагается использовать алгоритмы отыскания базисных точек в транспортной задаче. Так как алгоритм «северо-западного» угла не использует информацию о значении целевой функции, то в нашем случае удобно использовать именно его. Результаты работы алгоритма «северо-западного угла» зависят от порядка перечисления пунктов отправления и пунктов назначения. Предлагается использовать несколько вариантов работы алгоритма.

1. Исходные данные a_i, i = 1, 2, ..., m и b_j, j = 1,2,..., n располагаются по возрастанию $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

2. Исходные данные a_i, i = 1, 2,..., m и b_j, j = 1,2,..., n располагаются по убыванию $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$.

3. Исходные данные a_i, i = 1, 2, ..., m и b_j, j = 1,2,..., n располагаются в первоначально заданном порядке.

4. Исходные данные a_i, i = 1, 2, ..., m и b_j, j = 1,2,..., n располагаются в случайно заданном порядке.

5. Кроме того, так как в вырожденной транспортной задаче существуют базисные точки с нулевыми базисными координатами, то предлагается следующий вариант.

а) Определить наличие вырожденности в транспортной задаче проверкой равенств

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j,$$

$$I \subset \{1...m\}, J \subset \{1...n\}$$

b) Расположить данные для работы метода северо-западного угла в порядке, соответствующем найденным суммам.

Лучший из полученных результатов (с минимальным значением числа связей) определяет число R.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корбут А.А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. — 368 с.

2. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин — М.: Наука, 1969. — 304 с.

Осыкина Юлия А. – магистрант, кафедра математических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. Тел.(4732) 208-282. E-mail: julia_osykina@mail.ru.

Чернышова Галина Дмитриевна – доцент, к.т.н., кафедра математических методов исследования операций, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет. Тел.(4732) 208-282.

Osykina Julia A. - Magister of the Applied Mathematics and Informatics, Voronezh State University. Tel.(4732) 208-282. E-mail: julia_osykina@mail.ru.

Chernyshova Galina Dmitrievna - Candidate of physics-math. Sciences, Associate Professor, the dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University. Tel.(4732) 208-282.