УДК 681.3

НЕЧЕТКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

А. И. Зенчук, А. И. Шашкин

Воронежский государственный университет

В статье предложена модель решения задачи финансового бюджетирования в условиях неопределенности, основанная на нечеткой параметризации исходных данных. В связи с этим проведен анализ применимости аппарата нечетких интервальных вычислений к решению данной задачи и показано, что сведение нечеткой интервальной задачи к множеству интервальных задач, соответствующим α-срезам исходной задачи, позволяет получить достоверное и хорошо интерпретируемое решение, введена мера неопределенности, позволяющая оценить, насколько плохо определены границы интервалов, предложен численный метод решения интервальных задач, который позволяет получать возможные границы искомых решений.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из аспектов деятельности любой динамично развивающейся коммерческой организации, руководство которой отдает приоритет рентабельности в долгосрочной перспективе, является инвестирование. В условиях рыночной экономики, когда возможностей для инвестирования довольно много, а свободные финансовые ресурсы организации, доступные для вложения, ограничены, руководители сталкиваются с необходимостью планирования движения финансовых средств. Процесс управления финансами фирмы опирается на инвестиционную политику и управление источниками средств — откуда брать средства, и какова структура источников финансирования. По сути, инвестиционная деятельность характеризуется иммобилизацией финансовых ресурсов компании и обычно осуществляется в условиях риска и неопределенности, степень которой может значительно варьироваться.

В основе процесса принятия управленческих решений инвестиционного характера лежит оценка и сравнение объема предполагаемых инвестиций, их стоимости и будущих прогнозируемых доходов, приведенных к единому моменту времени. Подавляющая часть компаний имеет дело не с отдельными проектами, а с портфелем инвестиций. Отбор и реализация проектов из этого портфеля осуществляется в рамках составления бюджета капиталовложений в условиях динамического риска.

Бюджетирование проекта базируется на анализе некоторых финансовых параметров. В случае инвестирования в ценные бумаги можно предвидеть будущие доходы, основываясь на истории биржи и статистических методах, но горизонт планирования будет невелик. Однако в случае реальных инвестиций мы имеем дело, как правило, с бизнес-планом, реализация которого занимает продолжительное время (около двух лет и более). В таких случаях описание неопределенности с помощью известных вероятностных моделей невозможно из-за отсутствия достоверных вероятностей будущих событий. Поэтому возрос интерес к использованию интервальных и нечетких методов анализа. Цель данной статьи заключается в исследовании моделей нечеткой оценки некоторых финансовых параметров проекта — чистой приведенной стоимости NPV, внутренней нормы доходности IRR, а также количественной оценки инвестиционного риска.

Заметим, что при оценке инвестиционных проектов также возникает задача учета различных локальных критериев, которые базируются на инвестиционных финансовых параметрах. Ее можно рассматривать как оптимизационную *задачу компенсации* — поиск оптимального потока наличности, где в качестве критерия качества проекта берется некий компромиссный показатель между локальным критерием доходности, который мы хотим максимизировать, и финансовым риском, который нам необходимо минимизировать.

ПАРАМЕТРЫ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Как правило, для оценки инвестиционных проектов используются следующие показатели: NPV (чистая приведенная стоимость), IRR (внутренняя норма доходности), PB (период

© Зенчук А. И., Шашкин А. И., 2008

окупаемости) и PI (индекс рентабельности). На практике эти параметры имеют различную значимость, но, по мнению многих исследователей, наиболее важными являются NPV и IRR. Поэтому наши дальнейшие рассуждения будут касаться анализа только этих параметров.

Чистая приведенная стоимость обычно вычисляется по формуле

$$NPV = \sum_{t=t_n}^{T} \frac{P_t}{(1+d)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{KV_t}{(1+d)^t}, \quad (1)$$

где d — ставка дисконтирования; t_n — год начала проекта; t_c — год окончания инвестирования; KV_t — капитальные вложения в году t; P_t — прибыль в году t; T — продолжительность инвестиционного проекта в годах.

Обычно ставка дисконтирования принимается равной средней банковской ставке по вкладам в стране инвестора или другому подходящему значению прибыльности альтернативных капитальных вложений в другие проекты или хеджирующие элементы.

Экономическую природу внутренней нормы доходности можно объяснить следующим образом. В качестве альтернативы инвестиций в анализируемый проект рассматривается депозитный банковский вклад под некую ставку (распределенный во времени, как и в случае инвестиционных значений). Предполагается, что все доходы, получаемые в период реализации проекта, также будут пополнять депозит с той же процентной ставкой. Если ставка дисконтирования равна IRR, то инвестирование в проект дает ту же доходность, что и депозитный банковский вклад. Если действительная банковская дисконтирующая ставка меньше IRR, то инвестирование предпочтительнее. Таким образом, IRR — дисконтирующая ставка, отбирающая эффективные и неэффективные инвестиционные проекты. Значение IRR — решение нелинейного уравнения относительно d вида

$$\sum_{t=t_n}^{T} \frac{P_t}{(1+d)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{KV_t}{(1+d)^t} = 0. \quad (2)$$

Оценка IRR часто используется на первом шаге финансового анализа. Только проекты со значением IRR, которое лежит выше некоторого приемлемого порогового значения (обычно 15—20 %), выбираются для дальнейшего рассмотрения.

Сегодня традиционные подходы к оценке NPV, IRR и других финансовых параметров подвергаются достаточно строгой критике, поскольку будущие доходы P_t, капитальные вложения KV_t и ставка d являются нечеткими параметрами, которые не могут быть адекватно описаны в вероятностных терминах. Реально инвесторы и/или эксперты могут достоверно предсказать только возможные интервальные значения P_t, KV_t и d, а также наиболее вероятные значения внутри интервалов. Такой подход позволяет использовать для оценки этих параметров нечеткие числа и применен в [1, 2] для оценки NPV. Приоритетной становится задача оценки проектного риска на основе нечеткого NPV. Не решена и задача нечеткой оценки IRR — уравнение (2) не имеет смысла в нечетких терминах. В [3] предложен метод оценки нечеткого IRR, где используются представление нечетких чисел в виде α-срезов.

Остановимся на задаче оценки значений IRR. Внутренняя норма доходности — ставка дисконтирования, при которой сумма входящих денежных потоков равна сумме исходящих потоков, т.е. решение нелинейного уравнения

$$\sum_{t=t_n}^{T} \frac{P_t}{(1+d)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{KV_t}{(1+d)^t} = 0 \quad (3)$$

относительно d.

Рассмотрим пример одногодичного проекта, в котором инвестиции производятся в начале года, и сразу начинается производство. Доход мы получаем в конце года, после чего проект закрывается. В этом случае уравнение (3) примет вид

$$\frac{P_1}{(1+d)} - KV_0 = 0. \quad (4)$$

Пусть KV_0 — обычное (четкое) число, что соответствует реальности, поскольку сумма инвестиций всегда достаточно определена, P_1 — нечеткий интервал. Заметим, что α-срез P_1 является четким интервалом. Понятно, что простейшее решение задачи имеет вид

$$IRR = \frac{P_1}{KV_0} - 1. \quad (5)$$

Рассмотрим различные интервальные расширения начальной задачи (4).

Прямое интервальное расширение (4) представляется очевидным и имеет вид

$$\frac{[P_{11}, P_{12}]}{(1+[d_1, d_2])} - KV_0 = [0,0]. \quad (6)$$

Из уравнения (6) получим уравнения для нахождения границ интервала NPV:

$$\begin{aligned} &\frac{P_{11}}{(1+d_2)} - KV_0 = 0 \ \text{(левая граница)}, \\ &\frac{P_{12}}{(1+d_1)} - KV_0 = 0 \ \text{(правая граница)}, \end{aligned} \tag{7}$$

откуда

$$d_1 = \frac{P_{12}}{KV_{01}} - 1\,, d_2 = \frac{P_{11}}{KV_{02}} - 1\,.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае подстановка вырожденного нулевого интервала в правую часть (6) эквивалентна требованию сокращения неопределенности левой части выражения до нуля. Это возможно только в том случае, если интервал $[d_1, d_2]$ является инверсионным, что можно интерпретировать как требование ввода отрицательной энтропии в систему.

Понятно, что подобные проблемы типичны для общего случая интервального расширения исходного уравнения (3)

$$\sum_{t=t_n}^{T} \frac{[P_t]_\alpha}{\left(1+[d]_\alpha\right)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{[KV_t]_\alpha}{\left(1+[d]_\alpha\right)^t} = [0,0], \tag{8}$$

где $[P_t]_\alpha$ и $[KV_t]_\alpha$ — четкие интервалы, соответствующие α-срезам.

Итак, мы пришли к выводу, что естественное допущение о том, что в правой части (8) должен стоять вырожденный нулевой интервал не позволяет получить адекватные результаты. Это вполне согласуется с основным правилом интервального анализа, утверждающим, что даже если в уравнении только один невырожденный интервал не умножается на вырожденный 0, то выходной интервал не будет невырожденным. Таким образом, можно утверждать, что в общем случае требование невырожденности нулевого интервала в правой части интервального уравнения неправильно. Для получения конструктивных приближений воспользуемся следующим аппаратом.

Существует разница в интервальных значениях входящих и исходящих потоков в уравнении (3). Поскольку IRR — ставка дисконтирования, при которой NPV=0, понятно, что в интервальном случае разница между интервальными значениями дисконтированных входящих и исходящих потоков должна быть равна разнице между одинаковыми интервалами. В соответствии с основными положениями интервальной арифметики это означает, что результаты должны быть симметричными, содержащими 0, т.е. невырожденными [4]. Тогда уравнение (4) может быть представлено в следующем виде

$$\frac{[P_1, P_2]}{1+[d_1, d_2]} - KV_0 = [-y, y]. \tag{9}$$

В правой части уравнения (9) стоит симметричный интервал $[y, -y]$, содержащий 0, где y — некоторое положительное число, характеризующее неопределенность ставок в левой части уравнения.

Преобразуем левую часть (9) в соответствие с правилами интервальной арифметики

$$\left[\frac{P_1}{1+d_2} - KV_0, \frac{P_2}{1+d_1} - KV_0\right] = [-y, y]. \tag{10}$$

Уравнение (10) эквивалентно равенству двух интервалов, что означает, что левые и правые границы этих интервалов должны быть равны, а именно

$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{1+d_2} - KV_0 = -y, \\ \dfrac{P_2}{1+d_1} - KV_0 = y. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) содержит 3 неизвестных. Суммируя левые и правые части, получим уравнение, связывающее левую d_1 и правую d_2 границы интервала IRR:

$$d_2 = \frac{P_1}{2 \cdot KV_0 - \dfrac{P_2}{1+d_1}} - 1. \tag{12}$$

Поскольку алгебраический эквивалент (4) — уравнение

$$P_1 - KV_0 \cdot (1+d) = 0\,, \tag{13}$$

то как альтернативу (10) можно рассматривать следующее уравнение

$$[P_1, P_2] - KV_0\left(1+[d_1, d_2]\right) = [-y, y], \tag{14}$$

решая которое получим

$$d_2 = \frac{P_1 + P_2}{KV_0} - 2 - d_1\,. \tag{15}$$

Анализируя уравнения (10) и (14), легко заметить, что при $d_1 \le d_2$ минимальные значения y, т.е. минимальная неопределенность левых частей рассматриваемых интервальных уравнений достигается, когда

$$d_1 = d_2 = \frac{P_1 + P_2}{2 * KV_0} - 1. \qquad (16)$$

Наконец, в полном соответствии с общим методологическим тезисом, замещение невырожденного интервала на вырожденный понижает общую неопределенность полученного результата. Таким образом, уравнение (16) определяет верхнюю границу возможных значений d_1 и d_2 для рассматриваемого случая, уравнения (12) и (15) могут быть использованы для получения ограниченного нечеткого интервала с условием:

$$0 \le d_1 \le d_2,, \qquad (17)$$

которое отражает естественные требования для интервала $\mathrm{IRR} = [d_1, d_2]$ и положительность значения ставки дисконта.

Процедура решения задачи основывается на следующих рассуждениях. Понятно, что когда $d_1 = 0$, то d_2 принимает максимальное значение, и интервал $[d_1, d_2]$ имеет максимальную ширину, а мера неопределенности принимает максимальное значение $y = y_{\max}$. Когда d_1 возрастает от 0 до максимального значения, определяемого выражением (16), ширина интервала $[d_1, d_2]$ стремится к 0, и одновременно y падает до некоторого минимального значения $y_{\min}$. Поэтому значение функции $\mu(y) = \dfrac{y}{\mathrm{y}_{\max} - y_{\min}}$, вычисленное для интервала $[d_1, d_2]$, отражает степень неопределенности, которая ему присуща. Следовательно, $\mu(y)$ можно рассматривать как функцию принадлежности для некого нечеткого интервального решения задачи, в которой $[d_1, d_2]_n$ является неким α-срезом.

Результаты решения задач с использованием альтернативных вариантов интервальных расширений (10) и (14) для трех различных инвестиционных проектов представлены на рисунках: рис. 2 показывает, что в проекте 2 при использовании уравнения (10) границы нечеткого интервала IRR могут изменяться от [0,∞] на нижнем α-срезе до [0.67, 0.67] на верхнем α-срезе (при этом, значение y уменьшается от 1.5 до 0.3). Стоит отметить, что в точке $d_1 = 0$ уравнение (10) имеет разрыв. Решение уравнения (10), приведенное на рис. 3, также имеет разрыв в точке $d_1 = 0.67$. Решения, приведенные на рисунках 1—3, показывают, что значения IRR, найденные как решения уравнения (14), имеют форму нечетких конечных интервалов с линейными сторонами, в то время как решения уравнения (10) может содержать бесконечные интервалы. Наряду с этим, использование уравнения (14) в любом случае обеспечивает получение близких нечетких интервальных результатов. Все вышесказанное означает, что предпочтительно использовать нечеткое интервальное расширение в виде уравнения (14).

Полученные нечеткие интервальные решения могут использоваться в том же виде, что удобно для анализа инвестиционного риска, или могут быть подвергнуты дефазификации. Может показаться странным получение нечеткого интервального результата как решения интервальной задачи. Но такая ситуация довольно часто возникает в задачах анализа в условиях неопределенности, т.е. возможно получение ограниченного интервального решения полуопределенной системы неинтервальных алгебраических уравнений.

Обратимся к методу решения нелинейных задач вычисления нечеткого интервального значения IRR. Перепишем уравнение (3) в следующем виде

$$\sum_{t=1}^{T} P_t (1+d)^{T-t} - KV_0 (1+d)^T = 0. \qquad (19)$$

Интервал, эквивалентный уравнению (19), имеет вид

$$\sum_{t=1}^{T} [PL_t, PP_t][1+d_1, 1+d_2]^{T-t} - KV_0 [1+d_1, 1+d_2]^T = [-y, y], \qquad (20)$$

где PL_t, PP_t — значения левой и правой границ интервалов, описывающих входящие потоки в году t.

Преобразуя (20) в соответствие с правилами интервального анализа, получим

$$\left[\sum_{t=1}^{T} PL_t (1+d_1)^{T-t} - KV_0 (1+d_2)^T, \sum_{t=1}^{T} PP_t (1+d_2)^{T-t} - KV_0 (1+d_1)^T\right] = [-y, y]. \qquad (21)$$

Уравнение (21) задает эквивалентность двух интервалов, что означает равенство их левых и правых границ.

$$\sum_{t=1}^{T} PL_t (1+d_1)^{T-t} - KV_0 (1+d_2)^T = -y, \quad \sum_{t=1}^{T} PP_t (1+d_2)^{T-t} - KV_0 (1+d_1)^T = y. \qquad (22)$$

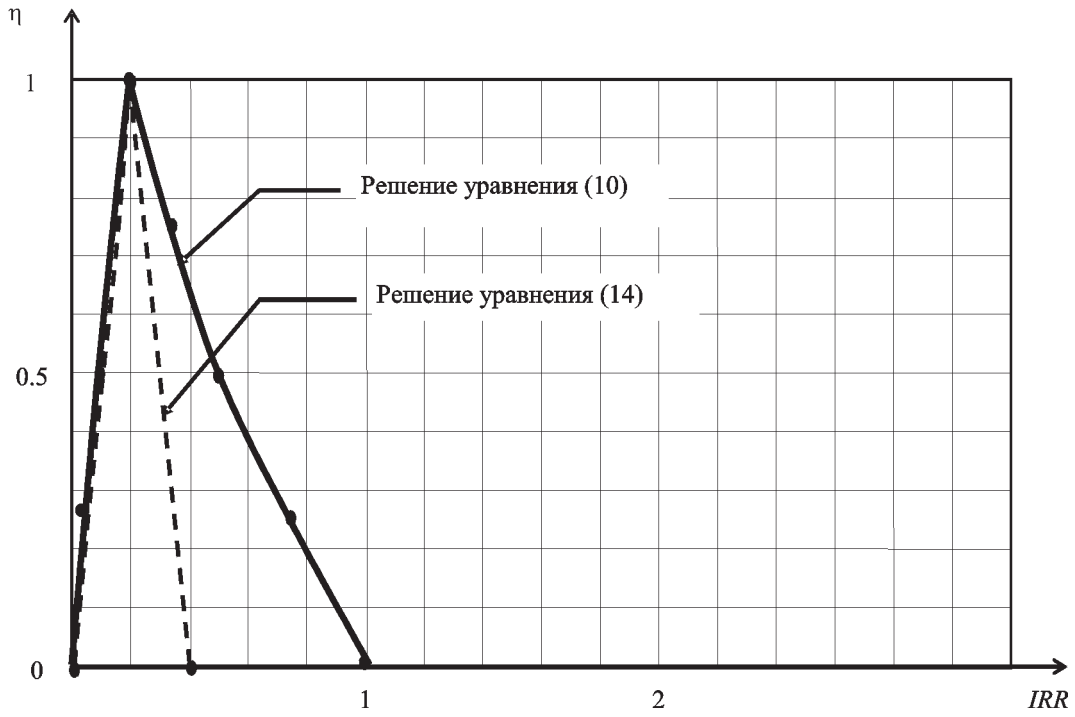

Рис. 1. Нечеткие интервалы IRR для случая $P_1 = [2, 4]$; $KV_0 = 2.5$

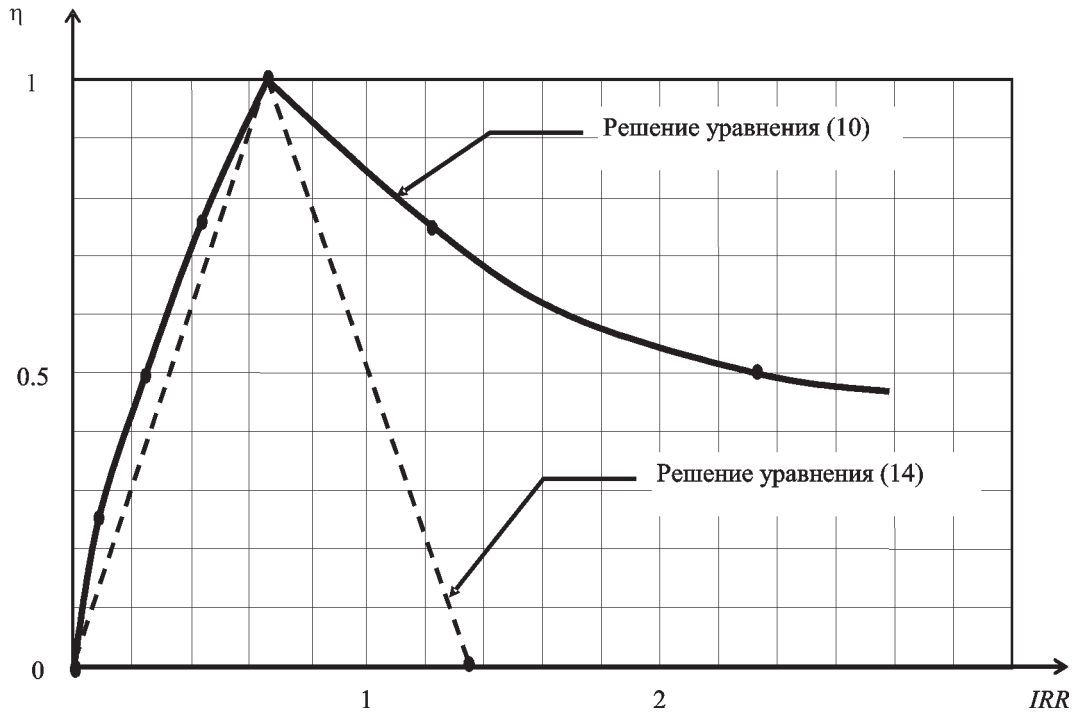

Рис. 2. Нечеткие интервалы IRR для случая $P_1 = [2, 3]$; $KV_0 = 1.5$

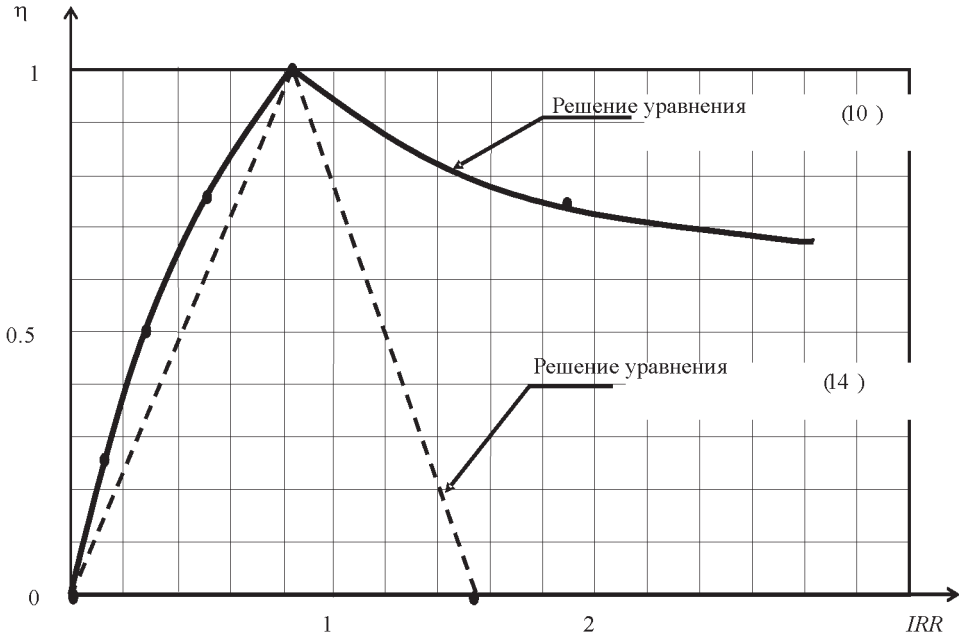

Рис. 3. Нечеткие интервалы IRR для случая $P_1 = [2, 3.5]$; $KV_0 = 1.5$

Система двух уравнений (22) имеет три неизвестных. Складывая левые и правые части уравнений, получим следующее уравнение, связывающее левую d_1 и правую d_2 границы:

$$\sum_{t=1}^{T} PL_t \left(1+d_1\right)^{T-t} - KV_0 \left(1+d_2\right)^T + \\ + \sum_{t=1}^{T} PP_t \left(1+d_2\right)^{T-t} - KV_0 \left(1+d_1\right)^T = 0. \quad (23)$$

Для решения нелинейной задачи (23) нами разработан специальный метод, идею которого проиллюстрируем на следующем примере.

Пусть инвестиции в первом году составили $KV_0 = 1$, в последующие три года планируется получать прибыль, задаваемую в виде нечетких интервалов с трапециевидными функциями принадлежности, которые представлены через соответствующие α-срезы (табл.).

Границы средних α-срезов обозначены линейными функциями.

Путем деления на заданное число n α-срезов нечеткая интервальная задача (23) преобразуется в множество интервальных задач, соответствующих α-срезам. На каждом уровне α определяются интервалы прибыли $\left[PL_1, PP_1\right]_\alpha$, $\left[PL_2, PP_2\right]_\alpha$, $\left[PL_3, PP_3\right]_\alpha$. Затем для каждого α-среза вычисляется максимальное значение $\left(d_1\right)_\alpha$ как решение нелинейного уравнения (21). Это значение соответствует вырожденному интервалу решения $\left(d_1\right)_\alpha = \left(d_2\right)_\alpha$ и тогда из (22) получаем $y = y_{\min}$.

На следующем этапе для каждого α-среза найденный интервал возможных значений $\left(d_1\right)_\alpha = \left[0, \left(d_2\right)_\alpha\right]$ делится на m равных частей и вычисляются $\left(d_1\right)_{\alpha_i}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, причем $\left(d_1\right)_{\alpha_0} = 0$ и $\left(d_1\right)_{\alpha_m} = \left(d_2\right)_\alpha$. Подстановкой $\left(d_1\right)_{\alpha_i}$ в уравнение (23) получаются соответствующие значения $\left(d_2\right)_{\alpha_i}$. Затем подстановкой $\left(d_1\right)_{\alpha_i}$, $\left(d_2\right)_{\alpha_i}$ в систему уравнений (22) получаем y_{α_i}, и, используя выражение (18), получаем значения η_{α_i}, определя-

Таблица

Нижние α-срезы	Верхние α-срезы
$[PL_1, PP_1] = [1, 2]$	$[PL_1, PP_1] = [1.1, 1.5]$
$[PL_2, PP_2] = [1.5, 3]$	$[PL_2, PP_2] = [1.6, 2]$
$[PL_3, PP_3] = [1, 2]$	$[PL_3, PP_3] = [1.2, 1.5]$

ющие степень принадлежности найденных четких интервалов $\left[(d_1)_{\alpha_i}, (d_2)_{\alpha_i}\right]$ нечеткому интервальному решению уравнения (23) на α-срезе.

Дефазификация полученных результатов осуществляется по методу центра тяжести или другим методом. Решение задачи для рассматриваемого примера представлено на рис. 4.

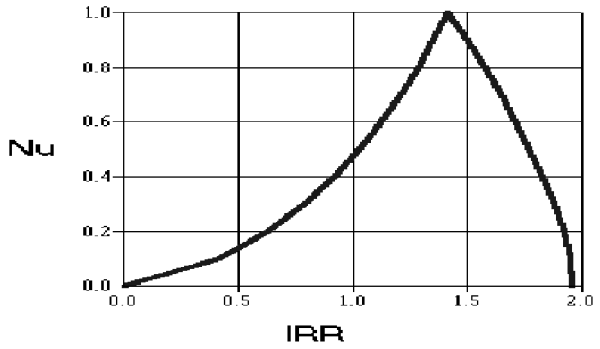

Рис. 4. Решение задачи для данных, представленных в табл., $kV_0 = 1$.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм поиска оптимального инвестиционного плана:

Шаг 1. Получение экспертных прогнозов о денежных потоках.

Шаг 2. Преобразование полученных данных в интервальную форму.

Шаг 3. Выбор ширины интервала приближения для балансового уравнения денежных потоков.

Шаг 4. Переход к математическому представлению балансового уравнения в виде системы.

Шаг 5. Вычисление интервальных значений срезов IRR.

Шаг 6. Восстановление функции принадлежности (для решения задач, возникающих на шагах 5 и 6, используется описанный выше метод решения нечетких интервальных систем).

Шаг 7. Дефазификация полученных нечетких результатов.

Шаг 8. Представление полученного значения IRR в виде графической зависимости.

Шаг 9. Выбор оптимального решения на основании компромисса между допустимыми рисками и прогнозируемым доходом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье нами предложена модель решения актуальной на сегодняшний день задачи финансового бюджетирования в условиях неопределенности, основанная на нечеткой параметризации исходных данных. Проведен анализ применимости аппарата нечетких интервальных вычислений к решению данной задачи. Показано, что сведение нечеткой интервальной задачи к множеству интервальных задач, соответствующим α-срезам исходной задачи, позволяет получить достоверное и хорошо интерпретируемое решение. Введена мера неопределенности, позволяющая оценить, насколько плохо определены границы интервалов. Предложен численный метод решения интервальных задач, который позволяет получать возможные границы искомых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S.* An empirical examination of capital budgeting techniques: impact of investment types and firm characteristics / S. Chen // Eng. Economist (1995) 40 (2), P. 145—170.

2. *Kuchta D.* Fuzzy capital budgeting. Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) P. 367—385.

3. *Babusiaux D., Pierru A.* Capital budgeting, project valuation and financing mix: Methodological proposals. Europian Journal of Operational Research. 135 (2001) 326—337.

4. *Moore R.E. I*nterval analysis. — Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966.