УДК 517.95

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА СЕТИ

А. В. Копытин

Воронежский государственный университет

Рассматривается начальная задача для волнового уравнения на геометрическом графе Г: $u_{tt}(t,x)=u_{xx}(t,x)$, $u(0,x)=\varphi(x)$, $u_t(0,x)=0$, где функция $u(t,x):[0,+\infty]\times\Gamma\to\mathbb{R}$ задает отклонение от положения равновесия точки x графа в момент времени t. Исследуется вопрос о наличии такой независящей от начального смещения φ константы C, что выполнено неравенство: $\max\limits_{x\in\Gamma}|u(x,t)|\le C\max\limits_{x\in\Gamma}|\varphi(x)|$. С этой целью моделируется процесс распространения волн на графе Г.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, связанные с исследованием процесса распространения волн на пространственных сетях (геометрических графах), актуальны в самых различных разделах техники и естествознания [1]. Они возникают при описании явлений в непрерывных системах сетеподобной структуры (электрических, гидравлических, акустических сетях, волноводах, упругих решетчатых конструкциях, электронных системах и т. д.).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Геометрический граф Г — связное множество в $\mathbb{R}^3$, представляющее собой объединение конечного числа криволинейных отрезков $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, называемых ребрами графа, точками пересечения которых могут быть лишь их концы, называемые вершинами графа. Границей $\partial\Gamma$ графа Г называется некоторое подмножество множества вершин Г, принадлежащих единственному ребру. Вершины, не вошедшие в $\partial\Gamma$, называются внутренними.

На графе Г рассматривается задача Коши для волнового уравнения с нулевой начальной скоростью:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)=u_{xx}(t,x), \\ u(0,x)=\varphi(x),\ \ u_t(0,x)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функция $u(t,x):[0,+\infty]\times\Gamma\to\mathbb{R}$ задает отклонение от положения равновесия точки x графа в момент времени t, причем при всех $t\ge 0$ функция $u(t,\bullet)$ непрерывна на Г, дважды непрерывно дифференцируема на каждом ребре Г, обращается в 0 на границе $\partial\Gamma$ и удовлетворяет в каждой внутренней вершине v условию согласования

$$\sum_{i\in I(v)}\alpha_i u_i(t,v)'_x=0, \tag{2}$$

где $I(v)$ обозначает множество номеров ребер, примыкающих к v, $\alpha_i\ge 0$, $\sum\limits_{i\in I(v)}\alpha_i=1$, u_i — сужение функции u на ребро γ_i, а через $u_i(t,v)'_x$ обозначена «крайняя» производная функции u_i в конце v ребра γ_i по направлению «внутрь γ_i».

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Решение задачи (1) на числовой оси в виде суммы прямой и обратной волны дает известная формула Даламбера

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x-t)+\varphi(x+t)\big), \tag{3}$$

причем начальная форма обеих волн определяется функцией, равной половине начального смещения φ. Рассматривая задачу на отрезке $[0,l]$ числовой оси с закрепленными концами, используя то, что при отражении от закрепленного конца волна меняет свой знак и направление движения на противоположные, снова получим решение задачи в форме Даламбера

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big(\tilde\varphi(x-t)+\tilde\varphi(x+t)\big), \tag{4}$$

где $\tilde\varphi(x)$ — $2l$-периодическая функция, определяемая на отрезке $[0,2l]$ как

$$\tilde\varphi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0,l] \\ -\varphi(2l-x), & x\in[l,2l] \end{cases}.$$

Решение задачи на графе Г может быть получено с использованием закона прохождения волны через внутреннюю вершину графа. Этот закон [2] со стоит в том, что волна, движущаяся в направлении вершины v по i-му ребру, при прохождении через нее разбивается на $I(v)$ волн, $I(v)-1$ из которых с коэффициентом $2\alpha_i$ пойдут по остальным ребрам, примыкающим к v, а одна, с коэффициентом $2\alpha_i - 1$, отразится от вершины и пойдет в обратном направлении по тому же ребру (см. рис. 1).

Тогда решение $u(t,x)$ задачи в точке x графа Г в момент времени t может быть получено в виде суммы волн, пришедших в эту точку в момент времени t, причем начальная форма всех волн равна половине начального смещения φ.

В случае, когда длины ребер графа Г рационально соизмеримы, можно считать, что граф состоит из ребер одинаковой длины, равной общей мере длин ребер графа Г. Тогда количество волн, пришедших в любую точку графа в любой момент времени не превосходит удвоенного числа ребер такого графа. С этим связано существование некоторой независящей от начального смещения φ константы C [3]. Модуль отклонения от положения равновесия каждой точки x графа в любой момент времени t не превосходит произведения C и максимального по модулю начального смещения:

$$\max_{x\in\Gamma} |\, u(x,t) \,| \le C \max_{x\in\Gamma} |\, \varphi(x) \,| . \qquad (5)$$

В частном случае, когда граф Г имеет структуру, изображенную на рис. 1, и состоит из m ребер одинаковой длины l с одним закрепленным концом, решение задачи на каждом ребре может быть выписано в явном виде:

$$u_i(x,t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{\varphi}_i(x-t) + \tilde{\varphi}_i(x+t)\big), \quad i = 1,\ldots,m, \qquad (6)$$

где $\tilde{\varphi}_i(x)$ — $4l$-периодические функции, задаваемые на отрезке $[0,4l]$ следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \qquad (7)$$

$$= \begin{cases} \varphi_i(x), & x\in[0,l] \\ -\varphi_i(2l-x), & x\in[l,2l] \\ \left(\varphi_i(x) - 2\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j\right)(x-2l), & x\in[2l,3l] \\ \left(2\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j - \varphi_i\right)(4l-x), & x\in[3l,4l]. \end{cases}$$

Из формул следует, что неравенство выполнено, например, при $C = 3$.

В общем же случае, когда длины ребер графа Г произвольны, ввиду сложности формулы решения задачи [2] вопрос о наличии константы C, для которой выполнено неравенство остается открытым.

Однако основываясь на описанных выше законах распространения волн, можно составить программу, моделирующую процесс распространение волн на графе Г и вычисляющую сумму $\sigma(t,x)$ абсолютных значений коэффициентов волн, приходящих в некоторую точку x графа в дискретные моменты времени t. Это было сделано для графа, имеющего два ребра и одну внутреннюю вершину. В случае, когда длины ребер графа равны 1 и 1,01, коэффициенты α_1 и α_2 в условии согласования равны 1 и 3, а точка x — середина первого ребра, график функции $\sigma(t,x)$ при целых $t = 0, 1, \ldots, 500$ показан на рис. 2.

Хорошо видно, что функция $\sigma(t,x)$ возрастает по t, и ее рост напоминает рост степенной функции. Константа C, если она существует, должна быть не меньше максимального значения функции $\sigma(t,x)$. Поэтому можно сделать вывод о том, что по всей видимости в общем случае не существует константы C, для которой выполняется неравенство (5).

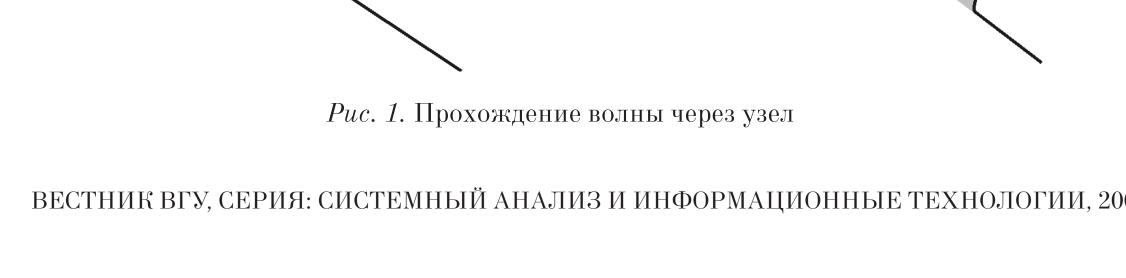

Рис. 1. Прохождение волны через узел

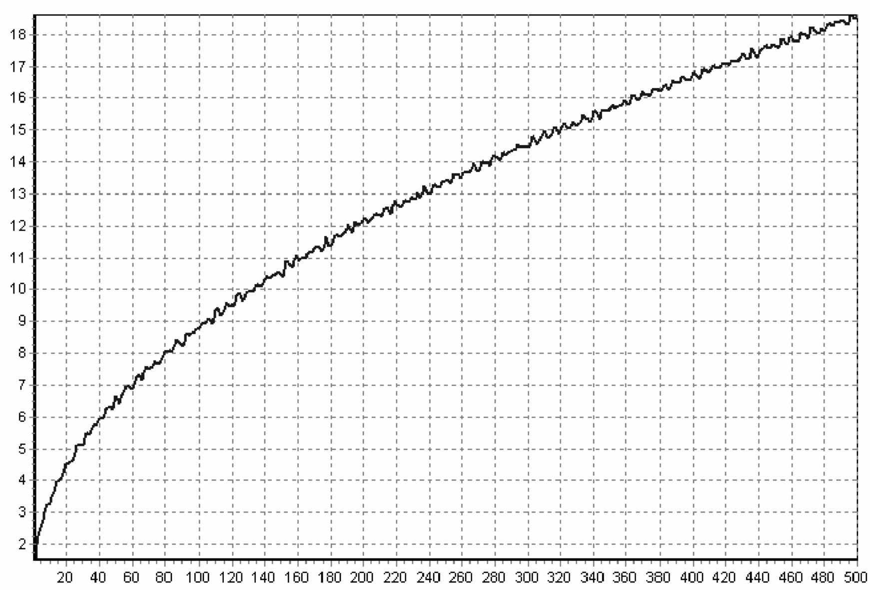

Рис. 2. График функции $\sigma(t,x)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин и др. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

2. *Копытин А.В.* Некоторые вопросы теории эволюционных задач на сетях: автореф. дис. канд. физ-мат. наук / А. В. Копытин. — Воронежский гос. ун-т, 2002. — 19 с.

3. *Копытин А.В.* Об оценке решений волнового уравнения на графе с соизмеримыми ребрами // Вестник ВГУ, Сер. Физика. Математика. — 2005, № 1. — С. 179—182.