УДК 621.3.015.4

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ С КОНДУКТИВНОЙ СВЯЗЬЮ

Н. Д. Бирюк*, Ю. Б. Нечаев, С. Ю. Алёхин****

**Воронежский государственный университет*
***ОАО «Концерн «Созвездие»*

В статье обсуждаются свойства сложных колебательных систем — систем двух связанных контуров с внутренней и внешней кондуктивной связью. Получены системы дифференциальных уравнений, представляющие свободные колебания в этих системах. Предложен способ перехода от одних дифференциальных уравнений к другим.

ВВЕДЕНИЕ

Принцип линейного включения, недостаточно используемый специалистами, придает особое значение анализу линейных систем общего вида с изменяющимися во времени параметрами, в радиотехнике называемых параметрическими. В статье рассмотрены две системы — системы двух связанных контуров с внутри- и внешнекондуктивными связями. Обсуждается их математическое описание и решается проблема устойчивости по Ляпунову.

1. ПРИНЦИП ЛИНЕЙНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Как известно, линейные системы отличаются большим разнообразием. Тем не менее, для них существует глобальный объединяющий принцип — принцип суперпозиции. Для нелинейных систем характерно еще большее разнообразие. Систематизированной теории нелинейных систем, которая была бы общей основой их анализа, не существует. Объединяющего принципа для нелинейных систем, который широко применялся бы в практическом анализе, также неизвестно. А между тем, такой принцип был сформулирован [1] в 60-х годах прошлого века под названием принципа линейного включения. Он утверждает, что любое решение нелинейной системы может быть представлено как решение специально подобранной линейной системы. Аналогичную формулировку можно привести также применительно к реальной физической нелинейной системе. Именно, любой процесс в нелинейной физической системе может быть смоделирован как тождественный ему процесс в определенной линейной системе. Другими словами, если представить себе множество всех нелинейных систем и множество всех линейных систем, то многообразие явлений в первом множестве не отличается от такового во втором множестве. Построение общей теории линейных систем — задача сложная, но все же она проще, чем построение общей теории нелинейных систем. Отсюда вытекает важность теории линейных систем и, в частности, разработки методов их анализа. В радиоэлектронике важным представителем таких систем является параметрический контур, которому посвящено много публикаций, и, тем не менее, нельзя констатировать, что свойства такого контура полностью исследованы. Следующими по сложности колебательными системами являются системы двух связанных контуров. Самыми простыми из них являются системы двух контуров с внутри- и внешнекондуктивной связями. Публикаций с анализом таких систем немного, причем они посвящены частным случаям, которые, может быть, важны для практического применения, но с позиций принципа линейного включения этого недостаточно. Ниже рассмотрены две параметрические системы двух связанных контуров с внешнекондуктивной и внутрикондуктивной связями значительно более общего характера, чем представлено в доступных публикациях.

© Бирюк Н. Д., Нечаев Ю. Б., Алехин С. Ю., 2008

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для анализа любой системы ее математическое описание (математическая модель) играет ключевую роль. Любая математическая модель носит приближенный характер. Она должна быть как можно проще, но в то же время описывать процессы в реальной системе с достаточной точностью. В радиоцепях с сосредоточенными параметрами при составлении эквивалентных схем всегда допускается неточность в том, что тепловые потери представляются в виде сосредоточенных активных сопротивлений, в действительности они распределены по всему объему радиоцепи. Практика показала, что такой подход может быть приемлемым. Весь вопрос в том, сколько должно быть активных сопротивлений и как они включены в цепь.

На рис. 1 представлена эквивалентная схема двух связанных контуров с внутрикондуктивной связью, R — элемент связи. Здесь тепловые потери учтены раздельно для емкостей в виде активных проводимостей G_1, G_2 и индуктивностей в виде активных сопротивлений R_1, R_2.

На рис. 2 представлена эквивалентная схема двух связанных контуров с внешнекондуктивной связью (R — элемент связи). Тепловые потери учтены так же, как и в предыдущем случае.

Полагаем, что все активные элементы (G_1, R_1, R и др.) изменяются по непрерывным, а реактивные элементы (C_1, L_1, C_2, L_2) — по непрерывно дифференцируемым законам, оставаясь всегда положительными. Представленные здесь эквивалентные цепи удобны для анализа свободных процессов в соответствующих реальных системах. При анализе вынужденных колебаний в эти радиоцепи нужно ввести источники энергии. В любом случае анализ свободных колебаний важнее, т. к. вынужденные колебания выражаются через свободные [2], обратное — неверно.

Обе системы близки по своим свойствам. Если бы эти системы были с постоянными параметрами, то одну систему было бы легко преобразовать в другую. В самом деле, из схемы на рис. 2 видно, что сопротивления R_1, R_2, R образуют «треугольник». По соответствующим формулам [3] его можно преобразовать в «звезду». Эти сопротивления соединены одним концом с узлами 1, 2, 3 (рис. 2), а другим — с новым узлом, который появляется в «звезде». При таком преобразовании вторая цепь (рис. 2) преобразуется в первую (рис. 1) при условии, что

$$R^{(1)} + R_1' = R_1,\ \ R^{(2)} + R_2' = R_2,\ \ R = R_3'.$$

Здесь R_1', R_2', R_3' — сопротивления «звезды», эквивалентной «треугольнику» R_1, R_2, R на рис. 2.

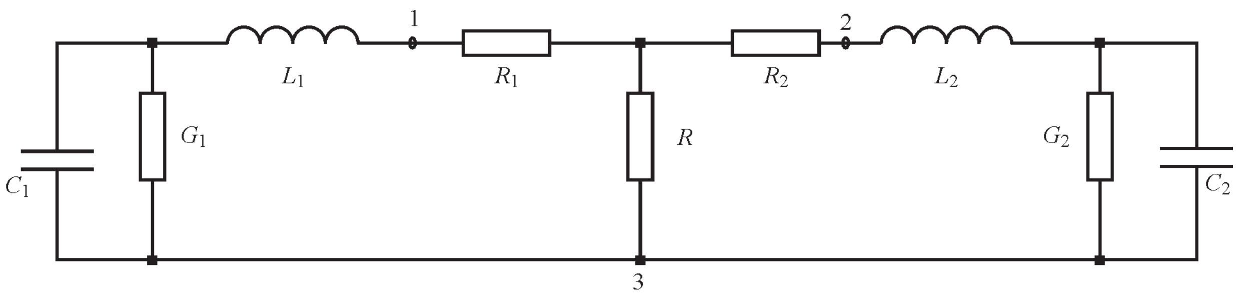


Рис. 1. Эквивалентная схема системы двух контуров с внутрикондуктивной связью

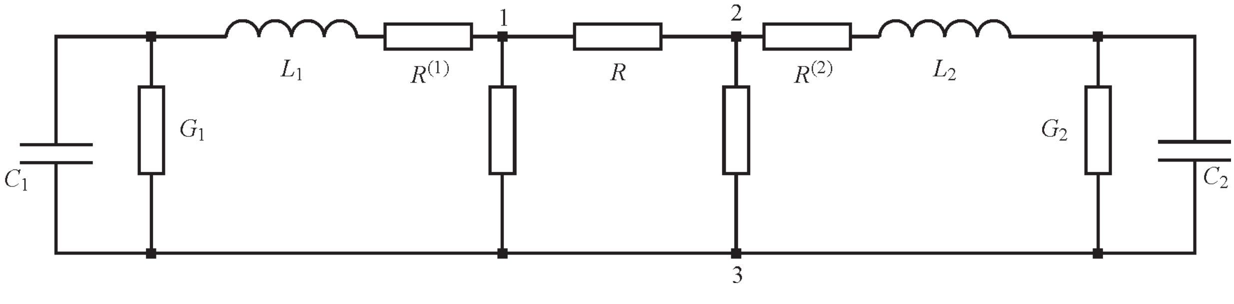


Рис. 2. Эквивалентная схема системы двух контуров с внешнекондуктивной связью

Вполне возможно, что так можно поступить и в случае изменяющихся во времени активных сопротивлений. Однако формулы для преобразования «звезды» в «треугольник» и обратно были получены для постоянных сопротивлений. Ниоткуда не следует, что они справедливы для изменяющихся во времени сопротивлений. Поэтому возникает дилемма, либо выводить формулы преобразования для изменяющихся во времени сопротивлений, либо анализировать обе представленные здесь системы независимо. В данном случае выбрана вторая возможность.

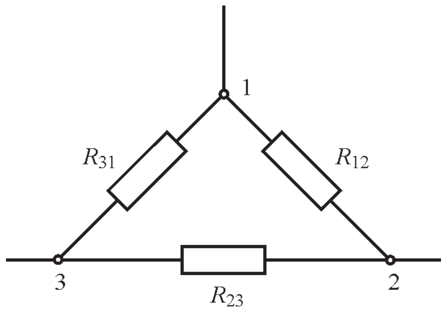
Любой из представленных здесь цепей можно поставить в соответствие сколько угодно математических моделей в зависимости от того, какие функции процесса выбраны в качестве определяющих. Обычно при рассмотрении свободных процессов принято составлять уравнения относительно зарядов конденсаторов и магнитных потоков, сцепляющихся с индуктивностями. Однако в радиоэлектронике эти функции процесса особого значения не имеют, значительно важнее напряжения и токи. Поэтому выбраны другие определяющие функции процесса, напряжения на конденсаторах $u_1,\ u_2$ и токи в индуктивностях $i_1,\ i_2$.

Для радиоцепи на рис. 1 законы Кирхгофа приводят к следующей линейной системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= -\frac{G_1+\dot{C}_1}{C_1}u_1 - \frac{1}{C_1}i_1\\
\frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_1}u_1 - \frac{R+R_1+\dot{L}_1}{L_1}i_1 + \frac{R}{L_1}i_2\\
\frac{di_2}{dt} &= \frac{R}{L_2}i_1 - \frac{R+R_2+\dot{L}_2}{L_2}i_2 - \frac{1}{L_2}u_2\\
\frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}i_2 - \frac{G_2+\dot{C}_2}{C_2}u_2
\end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Аналогичная система уравнений для радиоцепи на рис. 2 имеет вид

Между математическими системами (1) и (2) существует тесная взаимосвязь, которая достаточно скрыта и обнаруживается не так просто. Сравним схемы на рис. 1 и рис. 2 и обратим внимание на точки 1, 2, 3. На первой схеме связанные с этими точками сопротивления R_1, R_2, R соединены звездой, на второй схеме те же сопротивления соединены треугольником. В теории электрических цепей [3] получены формулы перехода от звезды к треугольнику и наоборот. Треугольник и звезда в общепринятых обозначениях показаны на рис. 3.



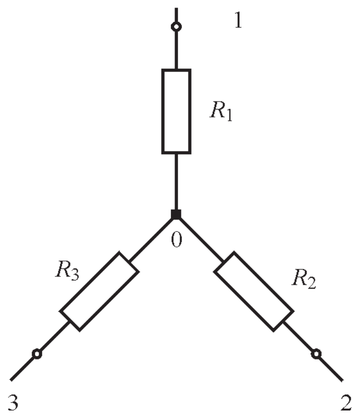


Рис. 3. Соединение трех сопротивлений треугольником и звездой

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= -\frac{G_1+\dot{C}_1}{C_1}u_1 - \frac{1}{C_1}i_1\\
\frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_1}u_1 - [R^{(1)} + \frac{R_1(R+R_2)}{R_1+R+R_2} + \dot{L}_1]\frac{1}{L_1}i_1 + \frac{R_1R_2}{R_1+R+R_2}\frac{1}{L_1}i_2\\
\frac{di_2}{dt} &= \frac{R_1R_2}{R_1+R+R_2}\frac{1}{L_2}i_1 - [R^{(2)} + \frac{R_2(R+R_1)}{R_1+R+R_2} + \dot{L}_2]\frac{1}{L_2}i_2 - \frac{1}{L_2}u_2\\
\frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}i_2 - \frac{G_2+\dot{C}_2}{C_2}u_2
\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Формулы перехода от треугольника (заданы сопротивления треугольника) к звезде (ищутся эквивалентные сопротивления звезды) и наоборот следующие:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\ R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},$$
$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\ R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3},\quad (3)$$
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_3R_2}{R_1},\ R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}.$$

Из рассмотренных схем (рис. 1, 2) следует, что существует потенциальная возможность перехода от одной схемы к другой с помощью соотношений (3), полученных для постоянных сопротивлений. Однако без доказательства этого сделать нельзя, т. к. в нашем случае сопротивления изменяются во времени.

Системы уравнений (1) и (2) получены независимо для соответствующих цепей, показанных выше на схемах. Коэффициенты этих систем позволяют убедиться, что сопротивления R_1, R_2, R на рис. 1, соединенные «звездой», связаны с сопротивлениями R_1, R_2, R на рис. 2, соединенными «треугольником», именно соотношениями (3). А это значит, что формулы (3) имеют значительно более широкую область применимости, чем принято считать, и справедливы для изменяющихся во времени по любым функциям сопротивлений.

Можно перейти от системы уравнений (1) к системе уравнений (2) с помощью замен:

$$R_1 \to R^{(1)} + \frac{RR_1}{R+R_1+R_2},$$
$$R_2 \to R^{(2)} + \frac{RR_2}{R+R_1+R_2},\quad (4)$$
$$R \to \frac{R_1R_2}{R+R_1+R_2}.$$

Таким образом, можно утверждать, что свойства систем двух связанных контуров с внутрикондуктивной связью и внешнекондуктивной связью одинаковы с точностью до только что приведенных замен.

3. САМОВОЗБУЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Между параметрическими системами связанных контуров и достаточно хорошо изученными обычными системами связанных контуров прослеживается аналогия, которую желательно использовать при разработке теории параметрических радиоцепей. Однако формальное проведение аналогии в нашем случае может привести к неожиданным результатам. Один из них является весьма примечательным и практически важным.

Как известно, в обычных системах связанных контуров свободный процесс затухающий. Это достаточно просто объясняется с позиций сохранения энергии. Действительно, в этом случае запасенная в контуре энергия не пополняется, но постоянно рассеивается из-за тепловых потерь. В параметрических системах эта энергия может увеличиваться изменяющимися во времени реактивностями. Доказано, что при некоторых функциях изменения реактивностей во времени изменяющим реактивности источником выполняется положительная работа, которая «накачивает» энергию в контур, т. е. увеличивает запасенную в реактивностях энергию. Если увеличение энергии больше, чем рассеивание, то система самовозбуждается. Полное теоретическое решение задачи о самовозбуждении параметрических систем пока не получено. При анализе устойчивости усеченного линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом академик А. М. Ляпунов обнаружил ряд интересных свойств этого уравнения, но полного решения найти не удалось. Следует отметить, что описание параметрической системы двух связанных контуров значительно сложнее, чем это уравнение. Для анализа систем такого типа приходится применять достаточно сложный математический аппарат. Его основы подробно изложены в монографиях «Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами» [4], «Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами» [5]. В абстрактно математической монографии [4] представлены основные достижения математики в этом направлении. Другая монография [5] посвящена математическому описанию систем автоматического управления с переменными параметрами. Эти системы близки к параметрическим цепям, но все же отличаются от них в плане постановки задач.

Итак, констатируем, что задачи о самовозбуждении рассматриваемых параметрических систем полностью решены быть не могут. В таком случае возможно ограничиться частичным решением, т. е. получением критериев отсутствия самовозбуждения, не охватывающих всего множества несамовозбуждающихся систем. Эта задача тоже оказывается непростой.

Для решения задачи весьма удобным является второй метод Ляпунова [6], разработанный для описания нелинейных систем типа (1), (2). Рассматриваемые системы являются линейными, и второй метод Ляпунова их включает как частный случай. Системы (1) и (2) связаны между собой, поэтому достаточно исследовать устойчивость одной из них. Выберем для этого систему (1). В этой математической системе аргументом является время, зависимые переменные — $u_1,\ u_2$ и $i_1,\ i_2$, все коэффициенты зависят от аргумента. В нашем случае эта зависимость точно не фиксируется, чем достигается общность. Таким образом, рассматриваем дифференциальную систему с аргументом t и четырьмя зависимыми переменными, которые переобозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 для удобства применения второго метода Ляпунова.

Согласно второму методу Ляпунова система типа (1) будет устойчивой, если существует определенно положительная функция Ляпунова

$$V(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \geq W(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0,$$
$$V(t, 0, 0, 0, 0) \equiv 0,$$

такая, что ее полная производная в силу системы типа (1) является неположительной, т. е.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial t} \leq 0, \qquad (5)$$
$$\frac{dV(t,0,0,0,0)}{dt} \equiv 0.$$

Если при этом полная производная является отрицательно определенной, т. е.

$$\frac{dV(t, x_1, x_2, x_3, x_4)}{dt} \leq -W_1(x_1, x_2, x_3, x_4) < 0, \quad \frac{dV(t,0,0,0,0)}{dt} \equiv 0, \qquad (6)$$

то исходная система уравнений типа (1) асимптотически устойчива. Здесь $W,\ \ W_1$ — непрерывные положительно определенные функции переменных $x_i\ \ (i = 1, 2, 3, 4)$, независящие явно от времени.

В нашем случае устойчивость означает, что при безгранично возрастающем времени любая функция свободного процесса является ограниченной. Асимптотическая устойчивость означает, что при тех же условиях любая функция свободного процесса с возрастанием времени асимптотически стремится к нулю. Для физических и технических задач асимптотическая устойчивость важнее.

Основная трудность в применении второго метода Ляпунова заключается в построении функции Ляпунова. Выберем в качестве функции Ляпунова мгновенную энергию, запасенную в реактивностях физической системы по рис. 1, т. е.

$$V = \frac{C_1 u_1^2}{2} + \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + \frac{C_2 u_2^2}{2} \geq W(u_1, i_1, i_2, u_2) > 0, \qquad (7)$$

где $W = c_1 u_1^2 + l_1 i_1^2 + l_2 i_2^2 + c_2 u_2^2$, здесь коэффициентами являются числа $c_1 < \frac{C_1}{2},\ l_1 < \frac{L_1}{2},\ l_2 < \frac{L_2}{2},\ c_2 < \frac{C_2}{2}$.

Очевидно, она является определенно положительной, как и требуется в основной теореме второго метода Ляпунова. Осталось обеспечить выполнение второго условия этой теоремы, т. е. добиться отрицательной определенности полной производной функции Ляпунова. Найдем частные производные, входящие в выражение (5)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\dot{C}_1 u_1^2}{2} + \frac{\dot{L}_1 i_1^2}{2} + \frac{\dot{L}_2 i_2^2}{2} + \frac{\dot{C}_2 u_2^2}{2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial u_1} = C_1 u_1, \quad \frac{\partial V}{\partial i_1} = L_1 i_1,$$
$$\frac{\partial V}{\partial i_2} = L_2 i_2, \quad \frac{\partial V}{\partial u_2} = C_2 u_2.$$

Если подставить в выражение (5) эти формулы, а также уравнение (1), то после упорядочения получим

$$\frac{dV}{dt} = -\left(G_1 + \frac{3}{2}\dot{C}_1\right)u_1^2 - \left(R_1 + \frac{3}{2}\dot{L}_1\right)i_1^2 - \left(R_2 + \frac{3}{2}\dot{L}_2\right)i_2^2 - \left(G_2 + \frac{3}{2}\dot{C}_2\right)u_2^2 - R(i_1 - i_2)^2. \qquad (8)$$

Система асимптотически устойчива при выполнении неравенства $\frac{dV}{dt} \leq -W_1 < 0$, где $W_1 = g_1 u_1^2 + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + g_2 u_2^2$, $g_1,\ r_1,\ r_2,\ g_2$ — сколь угодно малые положительные числа, удовлетворяющие условиям $g_1 < G_1 + \frac{3}{2}\dot{C}_1,\ r_1 < R_1 + \frac{3}{2}L_1,\ r_2 < R_2 + \frac{3}{2}L_2,\ g_2 < G_2 + \frac{3}{2}\dot{C}_2$. Таким образом, получается достаточное условие устойчивости в виде системы неравенств:

$$\left.\begin{aligned} G_1 + \frac{3}{2}\dot{C}_1 \ge g_1 > 0 \\ R_1 + \frac{3}{2}\dot{L}_1 \ge r_1 > 0 \\ R_2 + \frac{3}{2}\dot{L}_2 \ge r_2 > 0 \\ G_2 + \frac{3}{2}\dot{C}_2 \ge g_2 > 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Это — критерий асимптотической устойчивости физической системы по рис. 1. Он гарантирует невозможность самовозбуждения этой системы. Дадим формулировку этого критерия.

Критерий асимптотической устойчивости колебательной системы по рис.1. Если в колебательной системе по рис. 1 с положительными элементами, начиная с любого момента времени t_0, при всех последующих значениях времени $t_0 \le t \to \infty$ выполняется система неравенств (9), то система связанных контуров с внутрикондуктивной связью по рис. 1 асимптотически устойчива. В данном случае ее самовозбуждение невозможно.

Аналогичный критерий можно получить и для физической системы по рис. 2. Для этого нужно произвести замены (4), после чего получим

$$\left.\begin{aligned} & G_1 + \frac{3}{2}\dot{C}_1 \ge g_1 > 0 \\ & R^{(1)} + \frac{R_1 R}{R_1 + R + R_2} + \frac{3}{2}\dot{L}_1 \ge r_1 > 0 \\ & R^{(2)} + \frac{R_2 R}{R_1 + R + R_2} + \frac{3}{2}\dot{L}_2 \ge r_2 > 0 \\ & G_2 + \frac{3}{2}\dot{C}_2 \ge g_2 > 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Формулировка этого критерия отличается от предыдущего только заменой системы неравенств (9) на систему неравенств (10). В последних двух неравенствах g_1, r_1, r_2, g_2 — произвольно выбранные, сколь угодно малые положительные числа, имеющие размерности проводимости (g) и сопротивления (r).

ВЫВОДЫ

Тенденция развития радиоэлектроники предъявляет повышенные требования к разработке систематизированной теории нелинейных радиоцепей. Принцип линейного включения позволяет наметить целесообразный путь создания такой теории — прежде построить общую теорию линейных радиоцепей с изменяющимися во времени элементами.

В настоящей статье обсуждаются свойства достаточно сложных колебательных систем — системы двух связанных контуров с внутренней и внешней кондуктивной связью. Получены системы дифференциальных уравнений, представляющие свободные колебания в этих системах. Предложен простой способ перехода от одних дифференциальных уравнений к другим.

Паразитное самовозбуждение радиоцепей значительно ухудшает качество радиоприборов. В статье получены критерии, гарантирующие отсутствие самовозбуждения рассмотренных физических систем.

Применяемый здесь подход допускает обобщение для более сложных параметрических радиоцепей, поскольку для этого нет принципиальных препятствий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с.

2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1965. — 703 с.

3. *Бакалов В.П.* Основы теории электрических цепей и электроники. / В. П. Бакалов, А. Н. Игнатов, Б. И. Крук. — М. : Радио и связь, 1989. — 526 с.

4. *Якубович В.А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М. : Наука, 1972. — 718 с.

5. *Михайлов Ф.А.* Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами / Ф. А. Михайлов, Е. Д. Теряев, В. П. Булеков, Л. М. Саликов и др. — М. : Наука, 1971. — 561 с.

6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1966. — 472 с.