УДК 330.46

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ *d*-ОЦЕНОК РУССМАНА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ АКТИВОВ

М. З. Берколайко, И. Л. Каширина, К. Г. Иванова

Воронежский государственный университет

В данной статье предлагается метод управления портфелем ценных бумаг, основанный на представлении процесса формирования и управления портфелем в виде достижения системой некоторой заранее объявленной цели. Под системой понимается сам портфель, а целью будет являться некоторый фиксированный прирост его стоимости за определенный промежуток времени.

ВВЕДЕНИЕ

Основы используемого в данной статье подхода изложены в [1, 2], где в качестве меры риска при управлении портфелем ценных бумаг рассматривается так называемая «трудность достижения цели», введенная ранее И. Б. Руссманом для количественного измерения качества (изделия, системы, управления и т.д.) [3]. Суть трудности достижения цели, ее простая математическая форма, имеет далеко не очевидные аналоги и в теории вероятностей, и в геометрии (метрика Гильберта—Клейна), и в теории надежных систем, составленных из ненадежных элементов (Шеннон). Это позволило предположить, что существуют эффективные приложения аппарата трудностей к теории управления портфелем активов, и в [1, 2] дан общий алгоритм разработки соответствующих методов. В данной статье мы доводим один из таких методов до его конкретного применения в real trading на ММВБ в течение нескольких, непростых для рынка, месяцев 2006—2007 годов. Мы вводим здесь термин «*d*-оценки Руссмана» в честь замечательного ученого, к несчастью, не дожившего, до подтверждения эффективной применимости его, на первый взгляд, абстрактных рассуждений в столь сложной области, как операции на рынке акций.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем величины (параметры), которые будут использоваться при определении системы. За *плановый срок* t_{pl} обозначим время, в течение которого нужно добиться *планового результата* (цели) A_{pl}. Заметим, что измерять количественное выражение результата и время, необходимое для его достижения, можно и в безразмерных величинах; для этого достаточно положить A_{pl} и t_{pl} равными единице. Это особенно удобно, если значения A_{pl} и t_{pl} практически не изменяются при переходе от одного планового срока к другому. Пусть из предыстории объекта известно, что минимальная скорость его движения к цели есть $V_{\min}$ (минимальная скорость прироста стоимости портфеля), а максимальная скорость — $V_{\max}$. (Заметим, что в случае с ценными бумагами для определения минимальной и максимальной скорости есть смысл использовать достаточно короткую предысторию, это связано с механизмом быстрого старения подобной информации). Допустим следующую особенность: минимальная скорость движения может быть отрицательной — это характерно для случаев с ценными бумагами. В качестве планового результата мы ставим достижение бумагой определенного прироста стоимости за плановое время, но, как известно, курс может падать, что в нашей трактовке говорит об отрицательности минимальной скорости.

Укажем необходимые ограничения на соотношения между параметрами:

1) максимальная скорость должна обеспечивать достижение планового результата за плановый срок: $V_{\max}t_{pl} > A_{pl}$, в противном случае ни о каком выполнении результата речь идти не может;

2) двигаясь все время с минимальной скоростью, мы не должны превысить планового результата $V_{\min}t_{pl} < A_{pl}$, иначе нет необходимости ставить задачу, нужный результат будет получен без всяких усилий;

3) минимальная скорость должна быть меньше максимальной $V_{\min} < V_{\max}$.

Критерием оптимизации системы будет являться величина *трудности достижения цели*. Данное допущение не ограничивает область применения задачи, так как трудность достижения цели эквивалентна риску, как мере угрозы потери управляемости и эквивалентна стоимости (затратам) на сохранение управляемости или стоимости возможности достижения цели. Трудность достижения цели в некоторый момент t $(0 < t < t_{pl})$ естественным образом зависит от положения системы в этот момент, а так же от минимальной и максимальной возможных скоростей движения рассматриваемой системы.

Очевидно, что такие параметры, как максимальная и минимальная скорость прироста стоимости портфеля, определяются аналогичными характеристиками входящих в портфель активов и пропорцией между ними в портфеле. Таким образом, ставится задача: *сформировать портфель таким образом, чтобы максимум трудности достижения цели этого портфеля при движении системы вдоль некоторой предполагаемой траектории* $A = f(t)$ *был минимален.*

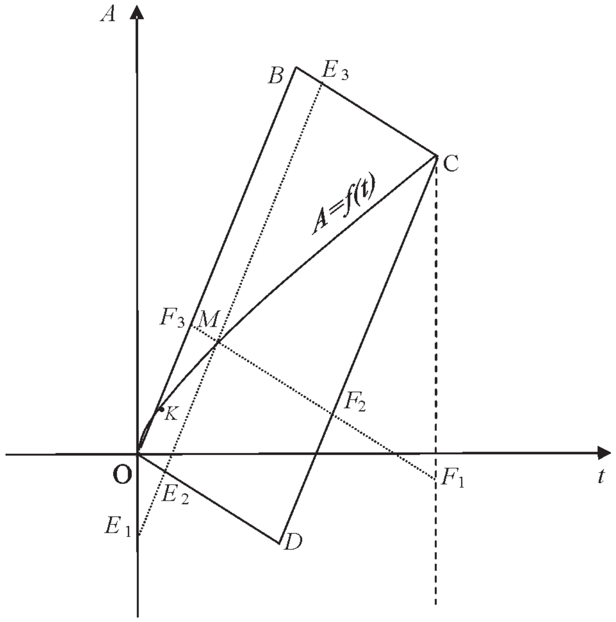

Рис. 1. Графическое представление возможных траекторий системы

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для практического вычисления величины *трудности достижения цели* воспользуемся формулой из аппарата трудностей И.Б. Руссмана[1]

$$d = \frac{\varepsilon(1-\mu)}{(1-\varepsilon)\mu}, \tag{1}$$

где через ε обозначена нижняя граница требований к качеству ресурса, μ — оценка текущего качества ресурса.

На рис. 1 траектории движения системы с минимальной скоростью соответствует прямая OD, траектории движения с максимальной скоростью — прямая OB. Кривая $A = f(t)$ — некоторая ожидаемая (или желательная) траектория движения системы к цели. Заметим, что мы рассматриваем только те участки этой кривой, которые лежат внутри параллелограмма OBCD. Участки кривой, находящиеся за его пределами (если такие имеются), заменяются на соответствующие отрезки прямых, ограничивающих параллелограмм.

Пусть M — некоторая точка траектории, лежащая на кривой $A = f(t)$. Рассмотрим две трудности: d_1 и d_2, причем d_1 стремится к 1 (максимальной трудности), когда M приближается к прямой OD. Область, лежащую ниже прямой OD, будем считать запретной в силу того, что движение объекта со скоростью ниже минимальной говорит о возникновении неблагоприятных маловероятных ситуаций. Аналогично d_2 стремится к 1 при приближении точки M к прямой CD, т. к. область, лежащая за прямой CD, также является запретной, поскольку при попадании в нее объекта достижение поставленной цели в заданное время становится невозможным и контроль теряет смысл.

За величину риска недостижения цели будем принимать значение:

$$d = d_1 + d_2, \tag{2}$$

где

$$d_1 = \frac{\varepsilon_1(1-\mu_1)}{(1-\varepsilon_1)\mu_1}, \tag{3}$$

$$d_2 = \frac{\varepsilon_2(1-\mu_2)}{(1-\varepsilon_2)\mu_2}. \tag{4}$$

За ε_1 возьмем соотношение $\frac{|E_1E_2|}{|E_1E_3|}$, а μ_1 положим равным $\frac{|E_1M|}{|E_1E_3|}$. Чем меньше угол между прямой OD и осью OA, тем меньшие требования мы предъявляем к нижней границе качества ресурса (т.е. допускаем большие по модулю отрицательные скорости).

Если точка M находится внутри параллелограмма, то $|E_1E_2| < |E_1M| < |E_1E_3|$, и, следовательно, $\varepsilon_1 < \mu_1 < 1$.

Если точка M лежит на прямой OD, то $\varepsilon_1 = \mu_1$ и $d_1 = 1$. Если точка M лежит на прямой BC, то $E_1M = E_1E_3$, то есть $\mu_1 = 1$ и $d_1 = 0$.

При движении точки M от прямой OD к прямой BC параллельно OB величина d_1 убывает (т. к. ε_1 остается постоянной, а μ_1 увеличивается).

Подставив выражения для ε_1 и μ_1 в формулу (3), получаем

$$d_1 = \frac{\frac{|E_1E_2|}{|E_1E_3|}\left(1-\frac{|E_1M|}{|E_1E_3|}\right)}{\left(1-\frac{|E_1E_2|}{|E_1E_3|}\right)\frac{|E_1M|}{|E_1E_3|}} = \frac{|E_1E_2|\left(|E_1E_3|-|E_1M|\right)}{\left(|E_1E_3|-|E_1E_2|\right)\,|E_1M|}. \quad (5)$$

Аналогично, обозначим $\varepsilon_2 = \frac{|F_1F_2|}{|F_1F_3|}$, $\mu_2 = \frac{|F_1M|}{|F_1F_3|}$. Для любой точки M, находящейся внутри параллелограмма, $|F_1F_2| < |F_1M| < |F_1F_3|$, и, следовательно, $\varepsilon_2 < \mu_2 < 1$.

Если точка M лежит на прямой CD, то $\varepsilon_2 = \mu_2$ и $d_2 = 1$. Если точка M лежит на прямой OB, то $|F_1M| = |F_1F_3|$, то есть $\mu_2 = 1$ и $d_2 = 0$.

При движении точки M от прямой CD к прямой OB параллельно OD величина d_2 убывает (ε_2 остается постоянной, а μ_2 увеличивается). Подставив выражения для ε_2 и μ_2 в формулу (3), получаем

$$d_2 = \frac{\frac{|F_1F_2|}{|F_1F_3|}\left(1-\frac{|F_1M|}{|F_1F_3|}\right)}{\left(1-\frac{|F_1F_2|}{|F_1F_3|}\right)\frac{|F_1M|}{|F_1F_3|}} = \frac{|F_1F_2|\left(|F_1F_3|-|F_1M|\right)}{\left(|F_1F_3|-|F_1F_2|\right)\,|F_1M|}. \quad (6)$$

Заметим, однако, что в некоторых практических ситуациях, движение с отрицательной скоростью может быть допустимым, но крайне нежелательным (например, как в рассматриваемом случае управления портфелем активов). В таком случае, может быть целесообразным определить величины ε_1 и μ_1 иным образом, так, чтобы значение d_1 было равно единице на прямой $A = 0$ и $d_1 = +\infty$ на прямой OD.

С этой целью внесем небольшие изменения в рис. 1: за точку E_1 обозначим пересечение прямой E_2E_3 и оси Ot (рис. 2). Величины ε_1 и μ_1 введем следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{|E_2E_1|}{|E_2E_3|},\ \mu_1 = \frac{|E_2M|}{|E_2E_3|}.$$

Для вычисления d_1 по-прежнему используем формулу (3).

Если точка M находится внутри параллелограмма, то $|E_2E_1| < |E_2M| < |E_2E_3|$, и, следовательно, $\varepsilon_1 < \mu_1 < 1$. Если точка M лежит на прямой BC, то $|E_2M| = |E_2E_3|$, то $\mu_1 = 1$ и $d_1 = 0$. Если точка M лежит на прямой Ot ($M = E_1$), то $\varepsilon_1 = \mu_1$ и $d_1 = 1$. Если точка M лежит на прямой OD ($|E_2M| = 0$), то $\mu_1 = 0$ и $d_1 = +\infty$ (конечно, при условии, что $|E_2E_1| \neq 0$). При движении точки M от прямой OD к прямой BC параллельно OB величина d_1 убывает (ε_1 остается постоянной, а μ_1 увеличивается).

Подставив выражения для ε_1 и μ_1 в формулу (3), получаем

$$d_1 = \frac{\frac{|E_2E_1|}{|E_2E_3|}\left(1-\frac{|E_2M|}{|E_2E_3|}\right)}{\left(1-\frac{|E_2E_1|}{|E_2E_3|}\right)\frac{|E_2M|}{|E_2E_3|}} = \frac{|E_2E_1|\left(|E_2E_3|-|E_2M|\right)}{\left(|E_2E_3|-|E_2E_1|\right)|E_2M|}. \quad (7)$$

Обозначим через $f(t)$ траекторию движения системы к цели, где $f(t)$ — непрерывная функция. Исследуем поведение величины трудности $d = d_1 + d_2$ для некоторых классов функций. Для

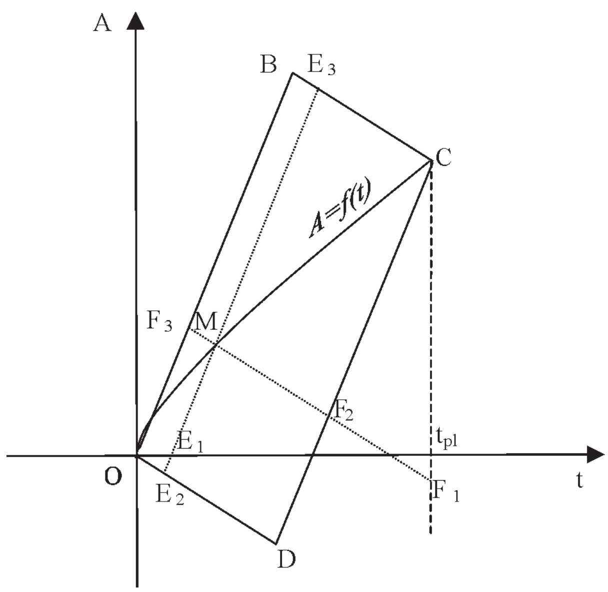

Рис. 2. Альтернативный способ расчета трудностей

этого выразим длины отрезков в формулах (5), (6) и (7) через параметры $A_{pl}, t_{pl}, V_{\max}, V_{\min}$ и координаты произвольной точки траектории М $(t_0, f(t_0))$. Для удобства обозначим $V_{\min} = k_1$, $V_{\max} = k_2$.

Преобразуем вначале формулы (5) и (6). Найдем координаты точек $E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3$.

Точка E_1 лежит на пересечении прямой $A = k_2(t - t_0) + f(t_0)$ с осью $t = 0$. Следовательно, она имеет координаты $(0, -k_2 t_0 + f(t_0))$.

Точка E_2 лежит на пересечении прямых E_1E_3 $(A = k_2(t - t_0) + f(t_0))$ и OD $(A = k_1 t)$. Ее координаты $\left(\frac{k_2 t_0 - f(t_0)}{k_2 - k_1}, k_1 \frac{k_2 t_0 - f(t_0)}{k_2 - k_1}\right)$.

Точка E_3 лежит на пересечении BC $(A = k_1(t - t_{pl}) + A_{pl})$ и E_1E_3 $(A = k_2(t - t_0) + f(t_0))$. Она имеет координаты $\left(\frac{A_{pl} - k_1 t_{pl} + k_2 t_0 - f(t_0)}{k_2 - k_1}, \frac{A_{pl}k_2 - k_1 k_2 t_{pl} + k_2 k_1 t_0 - k_1 f(t_0)}{k_2 - k_1}\right)$.

Точка F_1 лежит на пересечении прямых F_1F_3 $(A = k_1(t - t_0) + f(t_0))$ и $t = t_{pl}$. Ее координаты $(t_{pl}, k_1(t_{pl} - t_0) + f(t_0))$.

Точка F_2 лежит на пересечении прямых F_1F_3 $(A = k_1(t - t_0) + f(t_0))$ и DC $(A = k_2(t - t_{pl}) + A_{pl})$. Она имеет координаты $\left(\frac{f(t_0) - A_{pl} + k_2 t_{pl} - k_1 t_0}{k_2 - k_1}, \frac{-A_{pl}k_1 + k_1 k_2 t_{pl} - k_2 k_1 t_0 + k_2 f(t_0)}{k_2 - k_1}\right)$.

Точка F_3 лежит на пересечении прямых F_1F_3 $(A = k_1(t - t_0) + f(t_0))$ и OB $(A = k_2 t)$. Ее координаты $\left(\frac{-k_1 t_0 + f(t_0)}{k_2 - k_1}, k_2 \frac{-k_1 t_0 + f(t_0)}{k_2 - k_1}\right)$.

Зная координаты точек, находим длины отрезков, входящих в состав формул (5) и (6)

$$|E_1E_2| = \frac{k_2 t_0 - f(t_0)}{k_2 - k_1}\sqrt{1 + k_2^2}$$

$$|E_1M| = t_0\sqrt{1 + k_2^2}$$

$$|E_1E_3| = \frac{k_2 t_0 - k_1 t_{pl} + A_{pl} - f(t_0)}{k_2 - k_1}\sqrt{1 + k_2^2}$$

$$|F_1F_2| = \frac{k_1 t_0 - k_1 t_{pl} + A_{pl} - f(t_0)}{k_2 - k_1}\sqrt{1 + k_1^2}$$

$$|F_1M| = (t_{pl} - t_0)\sqrt{1 + k_1^2}$$

$$|F_1F_3| = \frac{k_1 t_0 + k_2 t_{pl} - k_1 t_{pl} - f(t_0)}{k_2 - k_1}\sqrt{1 + k_1^2}.$$

Подставим эти значения в формулы (3) и (4)

$$d_1 = \frac{(k_2 t_0 - f(t_0))(A_{pl} + k_1 t_0 - k_1 t_{pl} - f(t_0))}{t_0(A_{pl} - k_1 t_{pl})(k_2 - k_1)}. \quad (8)$$

$$d_2 = \frac{(k_2 t_0 - f(t_0))(A_{pl} + k_1 t_0 - k_1 t_{pl} - f(t_0))}{(t_{pl} - t_0)(k_2 t_{pl} - A_{pl})(k_2 - k_1)}. \quad (9)$$

Если, как было предложено ранее, перейти к безразмерным величинам и положить A_{pl} и t_{pl} равными единице, то формулы вычисления трудностей в произвольной точке $(t, f(t))$ будут иметь следующий вид

$$d_1 = \frac{(k_2 t - f(t))(1 + k_1 t - k_1 - f(t))}{t(1 - k_1)(k_2 - k_1)}, \quad (10)$$

$$d_2 = \frac{(k_2 t - f(t))(1 + k_1 t - k_1 - f(t))}{(1 - t)(k_2 - 1)(k_2 - k_1)}. \quad (11)$$

Отсюда

$$d = d_1 + d_2 = \\ = \frac{(k_2 t - f(t))(1 + k_1 t - k_1 - f(t))}{(k_2 - k_1)} \times \\ \times \left(\frac{1}{t(1 - k_1)} + \frac{1}{(1 - t)(k_2 - 1)}\right) \quad (12)$$

Заметим, что с учетом сформулированного ранее 1-го ограничения на соотношения между параметрами системы должно выполняться условие $k_2 \geq 1$ (при движении с максимальной скоростью цель $A_{pl} = 1$ должна быть достижима за время $t_{pl} = 1$). При этом случай $k_2 = 1$ не представляет интереса для исследований, т. к. предполагает единственно возможную траекторию движения системы к цели. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $k_2 > 1$.

Перейдем теперь ко второму возможному способу вычисления трудности d_1 и преобразуем формулу (6) с учетом новых обозначений. Координаты точек E_2, E_3 останутся прежними, а координаты точки E_1 примут вид: $\left(\frac{k_2 t_0 - f(t_0)}{k_2 - k_1}, 0\right)$.

Соответственно, изменятся длины отрезков $|E_1E_2|$, $|E_1E_3|$ и $|E_1M|$. После преобразований, аналогичных сделанным ранее, формула для вычисления d_1 будет выглядеть следующим образом:

$$d_1 = \\ = \frac{-k_1(k_2 t - f(t))(1 + k_1 t - k_1 - f(t))}{(f(t) - k_1 t)(k_2 - k_1 k_2 + k_1 k_2 t - k_1 f(t))}. \quad (13)$$

Тогда

$$d = d_1 + d_2 = \\ = (k_2 t - f(t))(1 + k_1 t - k_1 - f(t)) \times \\ \times\left(-\frac{k_1}{(f(t) - k_1 t)(k_2 - k_1 k_2 + k_1 k_2 t - k_1 f(t))} + \frac{1}{(1-t)(k_2 - k_1)(k_2 - 1)}\right). \quad (14)$$

Заметим, что формула (14) получилась значительно более громоздкая, чем формула (12) и представляет больше сложностей для исследования. Поэтому в дальнейшем в выкладках мы будем опираться на формулу (12), хотя, подчеркнем, формула (14) также представляет определенный теоретический и практический интерес.

Перейдем теперь к исследованию поведения величины трудности $d = d_1 + d_2$ для некоторых классов функций $A = f(t)$.

В первую очередь рассмотрим случай равномерного движения системы к цели: $f(t) = t$. В этом случае формулы для вычисления трудностей существенно упрощаются:

$$d_1 = \frac{(k_2 t - t)(1 + k_1 t - k_1 - t)}{t(1 - k_1)(k_2 - k_1)} = \frac{(k_2 - 1)(1 - t)}{k_2 - k_1} \quad (15)$$

$$d_2 = \frac{(k_2 t - t)(1 + k_1 t - k_1 - t)}{(1 - t)(k_2 - 1)(k_2 - k_1)} = \frac{(1 - k_1)t}{k_2 - k_1} \quad (16)$$

$$d = d_1 + d_2 = \frac{(2 - k_1 - k_2)t + k_2 - 1}{k_2 - k_1}. \quad (17)$$

Таким образом, при $f(t) = t$, d представляет собой линейную функцию. Рассмотрим возможные значения максимума этой функции на промежутке $t \in [0,1]$.

1. Пусть $2 - k_1 - k_2 > 0$. Тогда функция возрастает и достигает максимума при $t = 1$, $d_{\max} = \dfrac{1 - k_1}{k_2 - k_1}$. То есть среди всех портфелей, чьи скорости удовлетворяют неравенству $2 - k_1 - k_2 > 0$, требуется выбрать портфель, для которого соотношение $\dfrac{1 - k_1}{k_2 - k_1}$ минимально. Рассмотрим графическую интерпретацию этого результата (рис. 3). Исследуем поведение прямых вида $\dfrac{1 - k_1}{k_2 - k_1} = C$ при уменьшении значения C ($C > 0$). Преобразовав это выражение, получаем $(1 - C)k_1 + Ck_2 = 1$. Такое равенство задает семейство прямых, проходящих через точку (1,1). Так как точка (0, 1/C) является точкой пересечения этих прямых с осью ординат, то для их попадания в область, задаваемую условиями: $\{2 - k_1 - k_2 > 0,\ k_2 > 1,\ k_1 < 0\}$, должны выполняться неравенства $1 < \dfrac{1}{C} < 2$ или $\dfrac{1}{2} < C < 1$. При этом, с уменьшением С (приближением к значению 1/2) сокращается угол между прямыми $(1 - C)k_1 + Ck_2 = 1$ и $k_1 + k_2 = 2$. Таким образом, графически ищется прямая, проходящая через точки (1,1) и (k_1, k_2), такая, чтобы угол между ней и прямой $k_1 + k_2 = 2$ был минимальным.

2. Пусть $2 - k_1 - k_2 < 0$. Тогда функция убывает и достигает максимума при $t = 0$, $d_{\max} = \dfrac{k_2 - 1}{k_2 - k_1}$. То есть в данном случае ищется портфель, для которого соотношение $\dfrac{k_2 - 1}{k_2 - k_1}$ минимально. Рассмотрим прямые вида $\dfrac{k_2 - 1}{k_2 - k_1} = C$ (или $Ck_1 + (1 - C)k_2 = 1$). Это то же самое семейство прямых, что и в первом случае, и для пересечения этих прямых с областью $2 - k_1 - k_2 < 0$ необходимо выполнение неравенства $\dfrac{1}{1 - C} > 2$ или $\dfrac{1}{2} < C < 1$. При уменьшении С до значения 1/2 аналогичным образом сокращается угол между прямыми $Ck_1 + (1 - C)k_2 = 1$ и $k_1 + k_2 = 2$.

3. Если $2 - k_1 - k_2 = 0$, то $d = \dfrac{k_2 - 1}{k_2 - k_1} = \dfrac{k_2 - 1}{k_2 - 2 + k_2} = \dfrac{1}{2}$. В этом случае трудность является постоянной величиной. Значение 1/2 представляет собой минимум из всех возможных максимумов d, при условии, что $f(t) = t$.

На рис. 3 точками обозначены активы, которые могут быть включены в портфель. Множество допустимых портфелей представляет собой выпуклую линейную оболочку этого множества активов. Отрезок AB —это множество эффективных портфелей, для каждого из них максимум трудности при движении по прямой $f(t) = t$ равен 1/2.

На рис. 4 представлено семейство параллелограммов, у которых $k_1 + k_2 = 2$. Вершины B и D этих параллелограммов имеют одинаковую абсциссу $t = 1/2$.

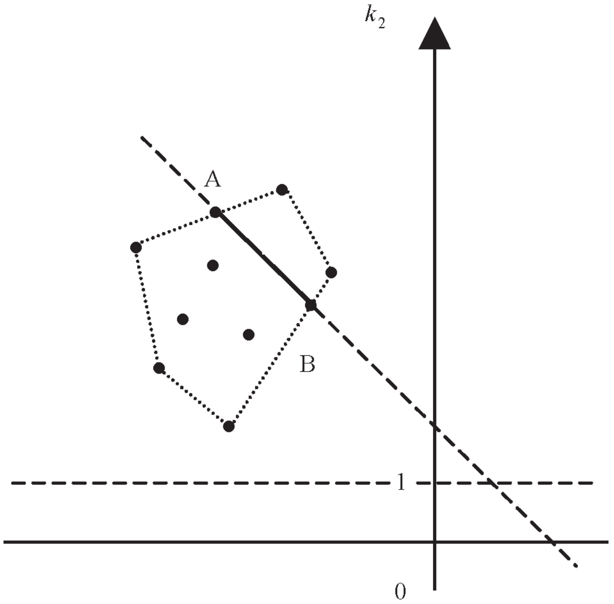

Рис. 3. Множество эффективных портфелей

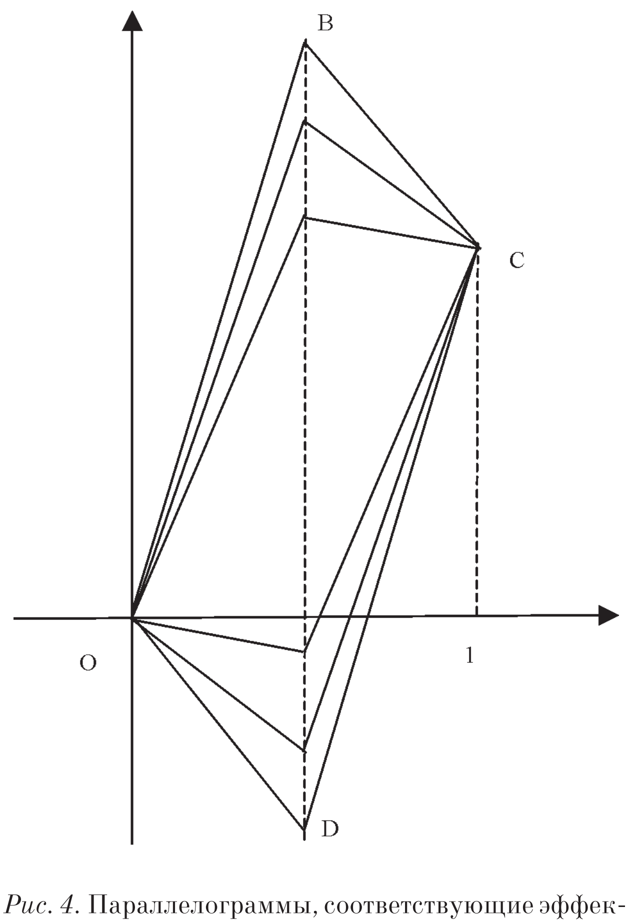

Рис. 4. Параллелограммы, соответствующие эффективным портфелям

Теперь исследуем движение системы к цели по траекториям вида: $f(t) = t^{\alpha}$ $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$.

Преобразуем выражение для d:

$$d = d_1 + d_2 = \frac{(k_2 t - t^{\alpha})(1 + k_1 t - k_1 - t^{\alpha})}{(k_2 - k_1)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t(1-k_1)} + \frac{1}{(1-t)(k_2 - 1)} \right) = \frac{(k_2 t - t^{\alpha})(1 + k_1 t - k_1 - t^{\alpha})}{(k_2 - k_1)} \times$$

$$\times \frac{\big((2 - k_1 - k_2)t + k_2 - 1\big)}{t(1-k_1)(1-t)(k_2-1)}.$$

$$d(t, k_1, k_2, \alpha) = = \frac{k_2 t - t^{\alpha}}{k_2 t - t} \times \frac{1 + k_1 t - k_1 - t^{\alpha}}{1 + k_1 t - k_1 - t} \times \times \frac{(2 - k_1 - k_2)t + k_2 - 1}{(k_2 - k_1)}. \qquad (18)$$

Заметим, что при $t \in [0,1]$ трудность d является растущей функцией по параметру α: с увеличением α величина t^{α} уменьшается, следовательно, числители первой и второй дроби в выражении (18) увеличиваются.

Таким образом, при $\alpha > 1$

$$d(t, k_1, k_2, \alpha) \geq d(t, k_1, k_2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{t \in [0,1]} d(t, k_1, k_2, \alpha) \geq \geq \max_{t \in [0,1]} d(t, k_1, k_2, 1) \Rightarrow$$

$$\min_{k_1 \leq 0, k_2 \geq 1} \max_{t \in [0,1]} d(t, k_1, k_2, \alpha) \geq \frac{1}{2}.$$

Кроме того, несложно заметить, что при $t \in [0,1]$ и $\alpha > 1$ первый и второй множители в выражении (18) больше 1, а третий представляет собой линейную функцию, рассмотренную в случае $\alpha = 1$

Если положить $k_1 = 2 - k_2$ и k_2 устремить к бесконечности, то первый и второй множители в выражении (18) будут стремиться к 1, а третий множитель будет в точности равен 1/2. Таким образом, все произведение будет стремиться к 1/2 — минимально возможному $\max\limits_{t \in [0,1]} d(t, k_1, k_2, \alpha)$ при условии $\alpha > 1$. Отсюда можно сделать вывод, что при рассмотрении траектории $f(t) = t^{\alpha}$ с $\alpha > 1$ оптимальными будут те портфели, у которых сумма $k_1 + k_2$ близка к 2 и значения $|k_1|$, k_2 достаточно велики.

Рассмотрим случай $\alpha < 1$. При таких α

$$d(t, k_1, k_2, \alpha) \leq d(t, k_1, k_2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{k_1 \leq 0, k_2 \geq 1} \max_{t \in [0,1]} d(t, k_1, k_2, \alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

Заметим, что первый множитель в выражении (18) представляет собой возрастающую функцию по параметру k_2. Действительно,

$$\left(\frac{k_2 t - t^{\alpha}}{k_2 t - t}\right)'_{k_2} = \frac{t(k_2 t - t) - t(k_2 t - t^{\alpha})}{(k_2 t - t)^2} = \frac{t(t^{\alpha} - t)}{(k_2 t - t)^2} > 0$$

при $t \in (0,1)$, $\alpha < 1$.

Таким образом, этот множитель уменьшается с уменьшением k_2.

Второй множитель в выражении (18) представляет собой убывающую функцию по параметру k_1 при каждом $t \in (0,1)$. Действительно,

$$\left(\frac{1 + k_1 t - k_1 - t^{\alpha}}{1 + k_1 t - k_1 - t}\right)'_{k_1} =$$
$$= \frac{(t-1)(1 + k_1 t - k_1 - t)}{(1 + k_1 t - k_1 - t)^2} -$$
$$- \frac{(t-1)(1 + k_1 t - k_1 - t^{\alpha})}{(1 + k_1 t - k_1 - t)^2} =$$
$$= \frac{(t-1)(t^{\alpha} - t)}{(1 + k_1 t - k_1 - t)^2} < 0,$$

при $t \in (0,1)$, $\alpha < 1$.

Таким образом, этот множитель уменьшается с ростом k_1 (а т. к. $k_1 \le 0$, можно сказать, что этот множитель уменьшается с уменьшением модуля k_1).

Третий множитель не является монотонной функцией k_1 или k_2, но про него нам уже известно, что его максимум минимален, если $k_1 + k_2 = 2$.

Отсюда можно сделать вывод, что при рассмотрении траектории $f(t) = t^{\alpha}$, $\alpha < 1$ наилучшими (в смысли минимума максимального значения трудности) будут те портфели, у которых сумма $k_1 + k_2$ близка к 2 и значения $|k_1|$, k_2 достаточно малы.

Заметим, что полученные теоретические выводы относительно значений k_1, k_2 при рассмотрении траектории $f(t) = t^{\alpha}$ $(\alpha > 0, \alpha \ne 1)$ подтверждаются многочисленными экспериментами, в которых $\min\limits_{k_1 \le 0, k_2 \ge 1} \max\limits_{t \in [0,1]} d(t, k_1, k_2, \alpha)$ отыскивался численными оптимизационными методами.

Для полноты описания включим в рассмотрение случай $f(t) = t^{\alpha}$, $\alpha = 0$, иначе говоря, $f(t) = 1$. Этот случай имеет следующую трактовку: достигнув на максимальной скорости запланированной прибыли, мы продаем все имеющиеся активы и до конца текущего планового периода не участвуем в торгах. В этом случае трудность достижения цели имеет вид

$$\begin{aligned} d &= \frac{k_2 t - 1}{k_2 t - t} \frac{k_1 t - k_1}{1 + k_1 t - k_1 - t} \times \\ &\times \frac{(2 - k_1 - k_2)t + k_2 - 1}{(k_2 - k_1)} = \\ &= \frac{k_2 t - 1}{k_2 t - t} \frac{k_1}{k_1 - 1} \times \\ &\times \frac{(2 - k_1 - k_2)t + k_2 - 1}{(k_2 - k_1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, что при $k_1 \to 0$ трудность $d \to 0$, что является, безусловно, ее оптимальным значением. Однако практически ситуация $k_1 = 0$ и $d \equiv 0$ маловероятна, поскольку означает, что на протяжении рассматриваемого исторического периода стоимость всех активов, входящих в портфель, монотонно росла.

Если считать $k_1 \ne 0$, то путем исследования функции $d(t)$, полученной в формуле (19), находим, что при $2 - k_1 - k_2 \ge 0$ ее максимум равен $\frac{-k_1}{k_2 - k_1}$. Соответственно, нас интересуют такие значения k_1, k_2, чтобы этот максимум был минимален. Рассмотрим опять же графическую интерпретацию этого результата (рис. 4). Исследуем поведение прямых вида $\frac{-k_1}{k_2 - k_1} = C$ (или $(1 - C)k_1 + Ck_2 = 0$). Это равенство задает семейство прямых, проходящих через точку (0, 0). При уменьшении значения С ($C > 0$) они приближаются к оси ординат $k_1 = 0$. Таким образом, на рис. 4 среди портфелей, для которых

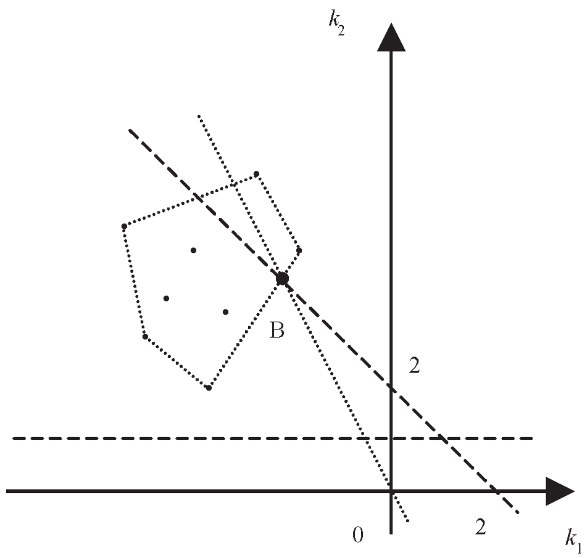

Рис. 5. Оптимальный портфель

$2-k_1-k_2 \ge 0$ наилучшим будет портфель, соответствующий точке B.

При $2-k_1-k_2<0$ выражение для максимума $d(t)$ усложняется:

$$d_{\max}=\frac{-k_1}{k_2-k_1}\times\frac{(\sqrt{k_2(k_2-k_1)}-\sqrt{k_1+k_2-2})^2}{(1-k_1)(k_2-1)}$$

и не допускает простой графической интерпретации. Однако, очевидно, что если $k_2 \to \infty$, то второй множитель этого выражения также стремится к бесконечности. И если в случае $2-k_1-k_2 \ge 0$, наряду с уменьшением k_1 нам был выгоден рост k_2, то в случае $2-k_1-k_2<0$ большее значение приобретает уменьшение k_1. Этот вывод также подтверждается численными экспериментами.

Перейдем к вопросу осуществления контроля системы в течение планового периода. Как изложено ранее, поведение рассматриваемой нами системы определяется некоторым количеством параметров состояния (максимальная и минимальная скорость движения, предполагаемая траектория движения, плановый результат). Однако в течение планового периода какие-то из этих параметров могут измениться (например, скорость роста стоимости какого-либо актива превысит известную для него ранее максимальную скорость, или с учетом общего падения рынка станет ясно, что заявленного планового результата достичь невозможно). Для таких случаев необходимо предусмотреть точки контроля системы. Обозначим: t_1 — абсцисса точки B, t_2 — абсцисса точки C. Возможны 3 варианта взаимного расположения точек $t_1<t_2$, $t_1>t_2$ (рис. 6), $t_1=t_2$.

Очевидно, что контроль системы необходимо осуществлять на отрезке $[t_1,t_2]$ в первом случае, на отрезке $[0,t_2]$, во втором, и в точке $t_1=t_2$, в третьем [2].

Выразим значения t_1,t_2 через параметры системы:

$$t_1=\frac{A_{pl}-k_1t_{pl}}{k_2-k_1},\ t_2=\frac{k_2t_{pl}-A_{pl}}{k_2-k_1}.$$

В случае нормировки данных ($t_{pl}=A_{pl}=1$):

$$t_1=\frac{1-k_1}{k_2-k_1},\ t_2=\frac{k_2-1}{k_2-k_1}.$$

В случае использования плановой траектории $f(t)=t$ минимум максимального значения трудности достигается при условии $t_1=t_2=1/2$. Заметим, что эта ситуация наиболее удобна в смысле отыскания точки контроля, которая здесь определяется единственным образом. В точке контроля заново пересчитываются параметры системы, и, если они изменились, портфель может быть переформирован.

Стоит отметить, что $t_2=\dfrac{k_2t_{pl}-A_{pl}}{k_2-k_1}$ является точкой раздела влияния трудностей: при $0\le t<t_2$ выполняется неравенство $d_1>d_2$; при $t_2<t\le 1$ справедливо неравенство $d_2>d_1$. Действительно, при $d_2=d_1$:

$$\frac{(k_2t-f(t))(A_{pl}+k_1t-k_1t_{pl}-f(t))}{t(A_{pl}-k_1t_{pl})(k_2-k_1)}=$$

$$=\frac{(k_2t-f(t))(A_{pl}+k_1t-k_1t_{pl}-f(t))}{(t_{pl}-t)(k_2t_{pl}-A_{pl})(k_2-k_1)}\Rightarrow$$

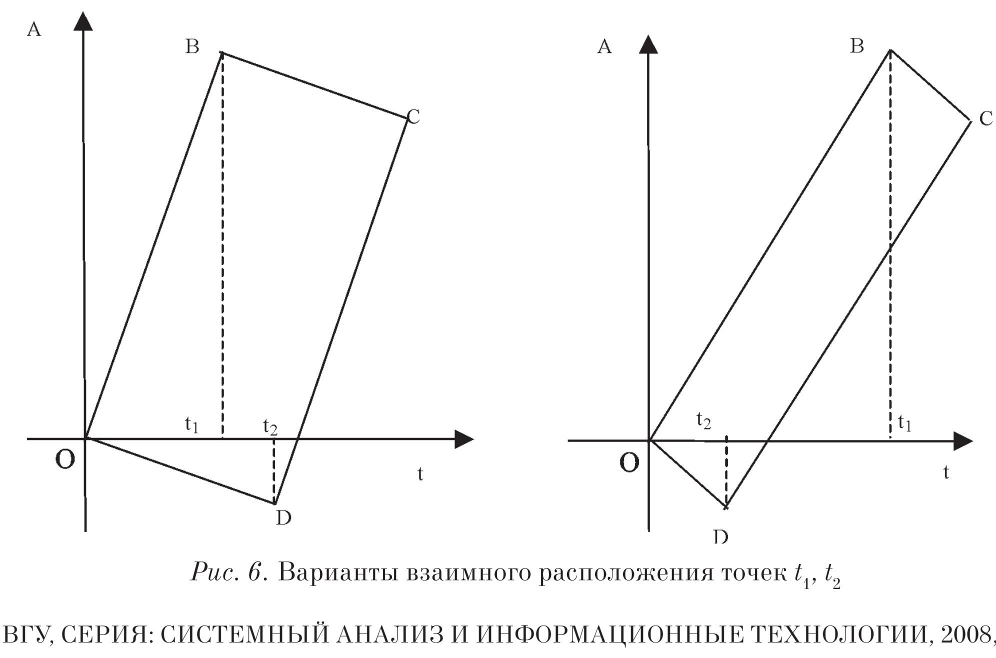

Рис. 6. Варианты взаимного расположения точек t_1, t_2

$$\Rightarrow \frac{1}{t(A_{pl} - k_1 t_{pl})} = \frac{1}{(t_{pl} - t)(k_2 t_{pl} - A_{pl})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{k_2 t_{pl} - A_{pl}}{k_2 - k_1} = t_2.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем в заключение данные по операциям на ММВБ, осуществленным с помощью торговой системы, формирующей портфель активов согласно описанной в статье методике.

На рис. 7 приведен график изменения стоимости этого портфеля ценных бумаг (верхняя кривая) в период с 01.06.2006 по 01.03.2007 года в сравнении со стоимостью «индексного» портфеля ММВБ (нижняя кривая) с аналогичным стартовым капиталом и в тот же период. Из приведенного графика видно, что доходность нашего портфеля в указанный период значительно превышает среднюю рыночную доходность, что подтверждает практическую эффективность применения d-оценок Руссмана для управления портфелем активов.

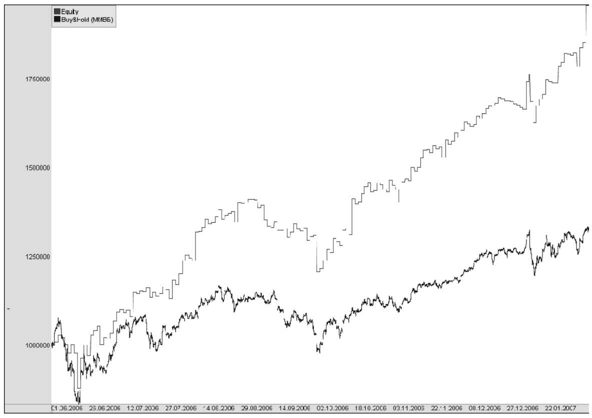

Рис. 7. График доходности портфеля ценных бумаг в сравнении с индексом ММВБ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берколайко М.З.* О некоторых методах формирования и управления портфелем активов. Часть 1 / М. З. Берколайко, И. Б. Руссман // Экономическая наука современной России, РАН. — 2004. — № 1.— С. 18—32.

2. *Берколайко М.З.* О некоторых методах формирования и управления портфелем активов. Часть 2 / М. З. Берколайко, И. Б. Руссман // Экономическая наука современной России, РАН. — 2004. — № 2. — С. 25—36.

3. *Бабунашвили М.К.* Оперативное управление в организационных системах / М. К. Бабунашвили, М. А. Бермант, И. Б. Руссман // Экономика и математические методы. — 1971. — Т. 7.3. — С. 480—492.