УДК 517.98

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ УДЕРЖАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА В РЕЖИМЕ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА

Н. Б. Баева, Е. В. Куркин

Воронежский государственный университет

Для удержания экономического объекта в режиме сбалансированного роста разработана двухуровневая модель. На первом уровне — модель оптимального управления, обеспечивающая расчет траектории развития. На втором уровне — модель выбора оптимального момента контроля, построенная на основе понятия трудности. Предложен алгоритм реализации модели, проведены экспериментальные расчеты.

ВВЕДЕНИЕ

Реформы последних лет, последствиями которых оказалась потеря производственного потенциала многих хозяйствующих субъектов, требуют поиска идей, подходов, методов и средств, которые бы привели к повсеместному сбалансированному росту объема ВВП на основе перевооружения предприятий, обновления их технологии, совершенствования организации производства и труда. Осуществить все это без разработки механизмов системного управления невозможно. Системное управление нами понимается как способы осуществления синтеза составляющих элементов управления: планирования, целеполагания, контроля и регулирования. Попытки решения этой проблемы в литературе нам известны (см. например [1, 2, 3, 8, 11]), однако многие аспекты решения этой проблемы не рассмотрены. Речь идет, прежде всего, о необходимости создания прикладного инструментария, реально обеспечивающего органичное соединение этапов управления сложным экономическим объектом. Причем таким образом, чтобы плавающая в обусловленной области траектория догоняла цель, которая в свою очередь определяется нечетко и эта пара — цель и догоняющая ее траектория — взаимно настраивалась бы на основе специальной системы контроля. Обоснованию этого подхода и посвящена настоящая статья.

В основу разработки прикладного инструментария удержания траектории реального развития экономического объекта в режиме сбалансированного роста положена двухуровневая модель, к описанию которой мы и переходим.

1. ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ОБЕСПЕЧЕНИЯ СБАЛАНСИРОВАННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Приведем, прежде всего, понятие двухуровневой задачи, введенное в работе В. Т. Дементьева и Ю. В. Шамардина [5] и положенное нами в основу синтеза этапов управления экономическим объектом.

Пусть в качестве задачи первого уровня выбрана следующая:

$$\min_y G(y)\,,\ y \in Y(x,y)\,.$$

Предположим, что приведенная задача разрешима и y^* — ее оптимальное решение, тогда в качестве задачи второго уровня может быть принята следующая:

$$\min F(x,y^*)\,,\ x \in X(x,y^*)\,.$$

В рамках такого понимания двухуровневой модели, мы построим систему управления функционированием и развитием сложного экономического объекта, основанную на модели выбора эффективной траектории движения объекта к цели, в качестве которой выбрана максимизация внутреннего валового продукта (ВВП) и модели реализации трассологического контроля.

Рассматривается экономический объект, функционирующий в сфере материального производства, объем деятельности которого может быть измерен количественно. Пусть объект состоит из n подразделений ($i = 1, ..., n$). Для каждого подразделения (подотрасли) на основе обработки статистических данных за предысторию получены производственные функции $f_i(X_i)$, $i=1,..,n$. Здесь под X будем понимать матрицу ресурсов (чаще всего в качестве ресурсов выбирают капитал и трудовые ресурсы). Обозначим количество ресурсов, которые использует экономический объект через m, то есть $X_i = (X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^m)$. В дальнейшем с целью сокращения записи $f_i(X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^m)$ будем часто использовать $f_i(X_i)$, где под X_i будет пониматься вектор приведенный выше. Пусть $\Delta\overline{X}^j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $t = t_0, \ldots, t_{\text{пр}}$ — дополнительно получаемые ресурсы (например, из управляющего центра) в момент времени t, считающиеся заданными для каждого j. Отметим, что в одной и той же задаче разным номерам j могут соответствовать различные единицы измерения, соответствующие заложенному в каждый $\Delta\overline{X}^j(t)$ смысл, например, $\Delta\overline{X}^1(t)$ может быть капиталом, $\Delta\overline{X}^2(t)$ — трудом, $\Delta\overline{X}^3(t)$ — каким-либо сырьевым ресурсом и так далее. На каждом временном этапе с целью роста валового выпуска будет производиться перераспределение дополнительных средств между подотраслями

$$X_i^j(t) = X_i^j(t-1) + \beta_i^j(t)\Delta\overline{X}^j(t).$$

В качестве параметра перераспределения дополнительных ресурсов выступают коэффициенты $\beta_i^j(t)$, причем $0 \le \underline{\beta_i^j}(t) \le \beta_i^j(t) \le \overline{\beta_i^j}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Как было отмечено выше, цель задачи первого уровня — максимизировать внутренний валовой продукт экономического объекта, тогда с учетом коэффициентов (доли) λ_i каждого подразделения в общем выпуске, получаем следующую модель:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(X_i(t)) \to \max. \tag{1}$$

$$X_i^j(t) = X_i^j(t-1) + \beta_i^j(t)\Delta\overline{X}^j(t). \tag{2}$$

$$\begin{gathered} 0 \le \underline{\beta_i^j}(t) \le \beta_i^j(t) \le \overline{\beta_i^j}(t), \\ i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j(t) = 1, \forall j = 1, \ldots, m, \\ t = t_0, \ldots, t_{\text{пр}}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} X_i^j(t_0) = X_{0i}^j, \\ i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{5}$$

где $X_{0i}^j, i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$ — начальное распределение ресурсов, которыми располагает объект на момент построения задачи, λ_i — заданные неотрицательные коэффициенты, характеризующие приоритеты различных подотраслей $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Неизвестными в данной задаче являются $\beta_i^j(t)$ $i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$. Как отмечалось выше, величины $\Delta\overline{X}^j(t)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ считаются заданными для каждого периода времени t. Объемы ресурсов $X_i^j(t)$ находятся в задаче по мере определения параметров распределения $\beta_i^j(t)$. Модель представляет собой задачу динамического программирования, с начальными условиями (5), функцией цели (1) и является аналогом модели, предложенной в [10].

Проблемы получения решения на основе этой модели, ее анализ будут рассмотрены ниже, а пока предположим, что алгоритм реализации этой модели и способы отыскания траектории известны.

Важнейшей особенностью функционирования экономических объектов, является тот факт, что реально они далеко не всегда развиваются по оптимальной траектории, потому необходимо на втором этапе разработать метод, с помощью которого бы решалась проблема отыскания момента времени, когда необходимо вычислять возможные отклонения от оптимальной траектории. На втором уровне будем рассматривать постановку и решение подобной задачи.

Для отыскания моментов контроля предлагается использовать специальные квалиметрические методы для получения оценок качества, которые можно было бы использовать во всех встречающихся вариантах управления процессом успешного функционирования экономического объекта по траектории сбалансированного роста. Теория таких оценок качества была разработана и успешно использовалась на практике [1, 2, 8, 12]. Приведем некоторые понятия и факты этой теории, которые понадобятся для формирования модели второго уровня.

Пусть в организационной системе на входе существует исходный набор необходимых для достижения цели ресурсов, пронумерованных индексом k, где $1 \le k \le n$. Введем величину μ_k — оценку качества k-го ресурса, задаваемую в полуинтервале $0 < \mu_k \le 1$. Например, в качестве μ_k можно принять отношение $\frac{p_k}{\overline{p}_k}$, где p_k — величина некоторого его основного свойства, а $\overline{p}_k$ — наилучший возможный его показатель.

С точки зрения достижения целей системы не все значения качеств ресурсов являются достижимыми. Поэтому можно ввести понятие требования к качеству k-го ресурса — ε_k, удовлетворяющее условиям: $0 \le \varepsilon_k < 1$, $\varepsilon_k \le \mu_k$. Эти требования к качеству снизу ограничивают набор приемлемых значений качеств ресурсов. Совершенно аналогично можно ввести понятие качества комплексного ресурса μ ($0 < \mu \le 1$) и требований к нему $\varepsilon(0 \le \varepsilon < 1, \varepsilon \le \mu)$. По совокупности μ_k и ε_k для k-го ресурса строится величина d_k — трудность достижения цели по этому ресурсу, имеющая вид

$$d_k = \frac{\varepsilon_k\left(1-\mu_k\right)}{\mu_k\left(1-\varepsilon_k\right)} \qquad (*)$$

и удовлетворяющая естественным условиям — $0 \le d_k\left(\varepsilon_k, \mu_k\right) \le 1$, $d_k\left(0, \mu_k\right) = 0$, $d_k\left(\varepsilon_k, 1\right) = 0$ и, наконец, $d_k = 1$ при $\mu_k = \varepsilon_k$. Обоснование вида d_k и вероятностный смысл величин d_k, ε_k и μ_k подробно рассмотрен в [1, 12], в этих работах d_k называется парциальной трудностью и, наряду с ними, вводится трудность $d(\varepsilon, \mu)$ для комплексного ресурса по всему набору ресурсов системы на входе.

В общем случае d характеризует оценку несоответствия ресурса (парциального или комплексного) целям функционирования системы.

Предположим, что мы располагаем объектом, который может быть охарактеризован двумя свойствами, или комплексным ресурсом, состоящим из двух компонент. Положим также, что их оценки имеют значения d_1 и d_2. Обобщенная оценка будет иметь вид $d = f\left(d_1, d_2\right) = d_1 * d_2$ как бинарная операция $*$ над d_1 и d_2. Введем ее следующим образом

$$d = d_1 + d_2 - d_1 d_2,$$

отметим, что итоговая трудность также оказывается в отрезке от нуля до единицы, и результат не меньше каждого из «слагаемых».

Далее сформулируем задачу контроля, смысл которой сводится к следующему: *найти такую точку контроля, чтобы не допустить перехода экономического объекта в состояния из которых уже даже при достаточно больших затратах достижение поставленной цели в срок будет невозможно, и чтобы проведение контрольных мероприятий в найденной точке характеризовалось минимумом затрат.*

Укажем величины, которые будут использованы для реализации задачи второго уровня. Пусть известна траектория, по которой экономический объект движется к цели (найдена из задачи первого уровня). Заданы плановый срок $t_{пл}$ и плановый результат $A_{пл} = F(t_{пл})$, достижение которого является целью функционирования объекта. Зададим область возможных отклонений от $A_{пл}$ и $t_{пл}$:

$$\underline{A_{пл}} \le A_{пл} \le \overline{A_{пл}},$$

$$\underline{t_{пл}} \le t_{пл} \le \overline{t_{пл}}.$$

На рис. 1 эта область изображена в виде прямоугольника. Предположим, что из предыстории функционирования объекта и теоретического анализа его экономических показателей могут быть найдены *максимальная* $V_{\max}$ *и минимальная* $V_{\min}$ *скорости его движения, которые понимаются как соответственно максимальный и минимальный объем продукции выпущенный экономическим объектом в единицу времени*. На рис. 1 максимальная и минимальная скорости движения обозначены лучами *OB* и *OD*, соответственно.

Для построения оптимальной области из точки *C* проводят прямые параллельные *OB* и *OD*, получая таким образом параллелограмм *OBCD*, в котором система может находиться в процессе своего движения к цели. Точки вне полученного параллелограмма считаются недопустимыми (запретными): область, лежащая ниже прямой *DC*, является запретной, поскольку в случае попадания в нее объекта, достижение цели даже при движении с максимальной скоростью в поставленной срок, вообще говоря, невозможно при любых допустимых затратах.

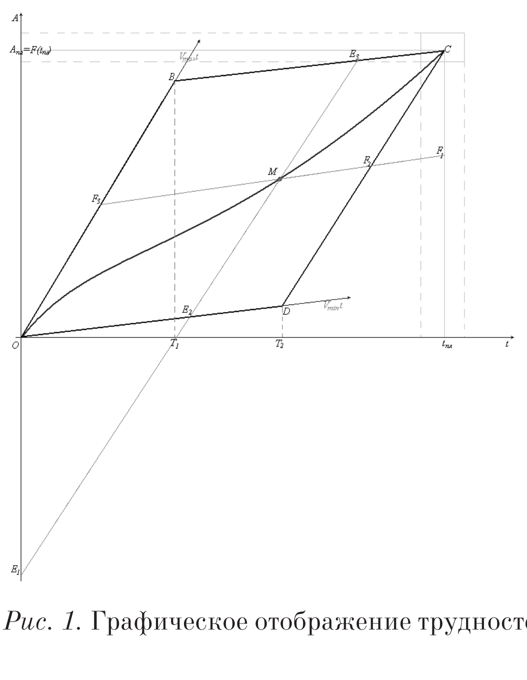

Рис. 1. Графическое отображение трудностей

Напомним, что цель контроля есть управление объектом для достижения им планового результат **в срок**. Попадание в области ниже *OD*, вообще говоря, маловероятно с учетом смысла, заложенного в понятие минимальной скорости, но допущение этого факта как раз и делает данную область запретной, потому что в случае попадания объекта в нее потребуются значительные перестроения системы контроля и, как следствие, непредвиденные затраты. Область выше прямых *OB* и *BC* не представляет интереса, поскольку при попадании в нее, двигаясь даже с минимальной скоростью, мы можем превысить плановый результат.

При построении задачи контроля будем исходить из того, что приближение к прямым *OD* и *DC* будет нежелательным явлением, чем ближе объект к данным прямым, тем выше вероятность попадания его в запретную область, назовем эту величину трудностью достижения цели. Действительно, чем ближе объект к запретной области, тем больше средств необходимо затратить на «выправление» ситуации, тем дороже обойдется контроль, тем выше трудность достижения цели. Поэтому наша задача, найти такую точку контроля на траектории движения системы, чтобы трудность достижения цели была минимальна.

Исходя из вышесказанного, введем в формулу трудности d_1, характеризующий приближение к прямой *OD*, оценку качества ресурса и нижнюю границу требований к нему как отношения $\mu_1 = \dfrac{E_1M}{E_1E_3}$ и $\varepsilon_1 = \dfrac{E_1E_2}{E_1E_3}$, а для d_2, характеризующей приближение к прямой CD, соответственно, $\mu_2 = \dfrac{F_1M}{F_1F_3}$ и $\varepsilon_2 = \dfrac{F_1F_2}{F_1F_3}$. Подставляя ε_k и μ_k в формулу трудности (*), где k=1, 2, получим, соответственно

$$d_1 = \frac{E_1E_2(E_1E_3 - E_1M)}{E_1M(E_1E_3 - E_1E_2)},$$

$$d_2 = \frac{F_1F_2(F_1F_3 - F_1M)}{F_1M(F_1F_3 - F_1F_2)}.$$

Используя введенные ранее параметры $\{A_{\text{пл}}, t_{\text{пл}}, V_{\max}, V_{\min}\}$, выразим с их помощью координаты точек на рис. 1 и выведем формулы для нахождения каждой из трудностей

$$d_1 = \frac{(V_{\max}t_0 - F(t_0))(A_{\text{пл}} + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{\text{пл}} - F(t_0))}{t_0(A_{\text{пл}} - V_{\min}t_{\text{пл}})(V_{\max} - V_{\min})};$$

$$d_2 = \frac{(V_{\max}t - F(t_0))(A_{\text{пл}} + V_{\min}t - V_{\min}t_{\text{пл}} - F(t_0))}{(t_{\text{пл}} - t_0)(V_{\max}t_{\text{пл}} - A_{\text{пл}})(V_{\max} - V_{\min})}.$$

Здесь t_0 — неизвестный момент времени контроля. Точку t_0 следует искать не на всем промежутке функционирования объекта, а на $T_1 \le t_0 \le T_2$, где $T_2 = \dfrac{V_{\max}t_{\text{пл}} - A_{\text{пл}}}{V_{\max} - V_{\min}}$, а $T_1 = \dfrac{A_{\text{пл}} - V_{\min}t_{\text{пл}}}{V_{\max} - V_{\min}}$. Если окажется, что $T_1 > T_2$, то T_1 полагают равным нулю. Точка T_2 при этом, является граничной точкой, после которой объект теоретически может попасть в запретную область, поэтому T_2 является правой граничной точкой отрезка для поиска точки контроля.

Теперь, используя указанное выше выражение для объединения двух трудностей, выпишем модель нахождения оптимального момента контроля:

$$d = d_1 + d_2 - d_1d_2 \to \min_{t_0} \tag{6}$$

$$d_1 = \frac{(V_{\max}t_0 - F(t_0))(A_{\text{пл}} + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{\text{пл}} - F(t_0))}{t_0(A_{\text{пл}} - V_{\min}t_{\text{пл}})(V_{\max} - V_{\min})}; \tag{7}$$

$$d_2 = \frac{(V_{\max}t - F(t_0))(A_{\text{пл}} + V_{\min}t - V_{\min}t_{\text{пл}} - F(t_0))}{(t_{\text{пл}} - t_0)(V_{\max}t_{\text{пл}} - A_{\text{пл}})(V_{\max} - V_{\min})}; \tag{8}$$

$$T_2 = \frac{V_{\max}t_{\text{пл}} - A_{\text{пл}}}{V_{\max} - V_{\min}}; \tag{9}$$

$$T_1 = \begin{cases} \dfrac{A_{\text{пл}} - V_{\min}t_{\text{пл}}}{V_{\max} - V_{\min}}, \text{ если } \dfrac{A_{\text{пл}} - V_{\min}t_{\text{пл}}}{V_{\max} - V_{\min}} < T_2; \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \tag{10}$$

$$T_1 \le t_0 \le T_2, \tag{11}$$

$$A_{\text{пл}} = F_{\text{опт}}(t_{\text{пл}}) - A_0. \tag{12}$$

Таким образом, получили двухуровневую модель (1)—(12). В результате решения задачи первого уровня мы получаем траекторию движения и, как следствие, можем вычислить величину $A_{\text{пл}}$, которые на каждой итерации передаются на второй уровень. В результате решения задачи второго уровня находится точка t_0, являющаяся оптимальным моментом контроля. Предположим, что в момент t_0 вычислено фактическое значение A_0 и определено отклонение $\Delta = A_0 - F(t_0)$. Если отклонение существенное, то необходимо производить перерасчет траектории, для чего значение t_0 передается задаче первого уровня, в качестве начальной точки для дальнейшего построения новой оптимальной траектории развития. Если отклонение допустимое, то траектория не пересчитывается. Ниже приведена схема сопряжения задач двух уровней (рис. 2).

Приведем алгоритм реализации двухуровневой модели оптимального управления экономическим объектом. Величины $\Delta\overline{X}^j(t)$, $j = 1,2,...,m$, $t = t_0,...,t_{пл}$ считаются, как отмечалось выше, заданными, значения скоростей движения объекта V_{max} и V_{min} берутся на основе производственных возможностей объекта и его предыстории функционирования и на момент формирования модели также считаются известными, $t_{пл}$ — задано, A_0 либо равно нулю, либо величине произведенного продукта (объему работ), которая имеется в начальный момент времени и которая может быть включена в итоговый результат. Производственные функции каждого подразделения считаются определенными. Последнее было сделано нами на основе работы Г. Б. Клейнера [9].

Шаг 1. Полагаем $t_0 = 0$, $A_{пл} = A_0$.

Шаг 2. Задание объемов начальных ресурсов $X_i^j(t_0) = X_{0i}^j$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$.

Шаг 3. Расчет оптимальной траектории движения на основе решения задачи (1)-(5).

Шаг 4. Полагаем $A_0 = A_{пл}$, где A_0 — результат, достигнутый на предыдущем этапе контроля.

Шаг 5. Задаем в задаче (6)-(12) $t_{пл} = t_{пл} - t_0$, $A_{пл} = F_{опт}(t_{пл}) - A_0$, где $F_{опт}$ есть оптимальная траектория движения, полученная на предыдущем шаге, t_0 — текущий момент времени.

Шаг 6. Расчет очередного момента контроля t_0 на основе решения задачи (6)—(12).

Шаг 7. «Свободное» функционирование системы до момента t_0.

Шаг 8. Оценка состояния экономического объекта в момент времени t_0: определение реального положения — величины достигнутого результата A_0. Если объект попал в целевой прямоугольник, то переход к шагу 10, иначе — к шагу 9.

Шаг 9. Вычисление величины отклонения от запланированной траектории $\Delta = A_0 - F(t_0)$. Если величина отклонения критическая (например, Δ больше некоторого заданного ε), то необходимо произвести пересчет траектории, для этого переход к шагу 2, иначе — к шагу 4.

Шаг 10. Целевой результат достигнут. При необходимости восстанавливаем реальную траекторию движения по контрольным точкам, то есть восстанавливаем трассу движения экономического объекта.

Для того чтобы приведенный алгоритм был реальным, необходимо привести решение задачи первого уровня — это будет рассмотрено в пункте 2 настоящей статьи, а также обосновать выбор точки t_0, найденной по задаче второго уровня, в качестве оптимальной точки контроля.

Учитывая сказанное выше, введем следующее важное **определение**:

Точка t_0 называется *оптимальной точкой контроля*, если она находится в области, из которой объект может достигнуть цели в поставленный срок и проведение контрольных

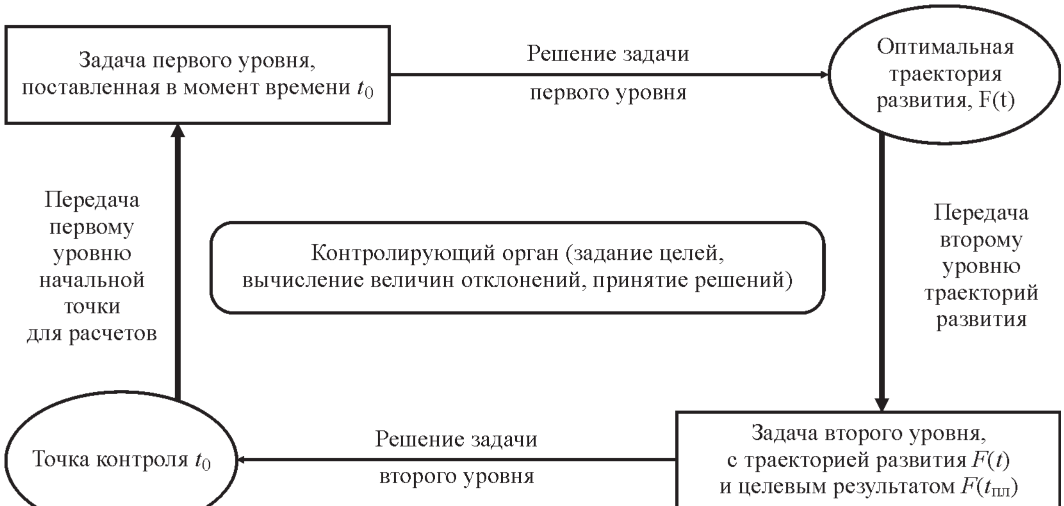

Рис. 2. Схема сопряжения задач двух уровней

мероприятий в ней характеризуется минимумом затрат.

Опираясь на данное определение, докажем, что найденная с помощью модели второго уровня точка является оптимальной точкой контроля.

Теорема: Пусть задано $A_{пл}$ и $t_{пл}$, определены V_{max} и V_{min} и рассчитана оптимальная траектория развития, тогда оптимальная точка контроля находится на основе решения задачи (6)—(11).

Доказательство

Пусть задача (6)—(11) решена, в результате решения получена точка $\hat{t}_0$, по утверждению теоремы она должна быть оптимальной точкой контроля. Предположим противное: $\hat{t}_0$ не является оптимальной точкой контроля, в этом случае возможны два варианта:

а) $\hat{t}_0$ находится в запретной области;

б) в допустимой области существует другая точка t_0' в которой затраты на проведение контрольных мероприятий меньше чем в $\hat{t}_0$.

Так как областью, из которой нельзя достигнуть цели в плановый срок, являются точки, лежащие ниже прямой (CD) (рис. 1), то в случае а) $\hat{t}_0$ находится правее точки T_2, но отсюда следует, что не выполняется ограничение (11). Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что $\hat{t}_0$ — решение задачи (6)—(11).

Поскольку в нашей задаче затраты на контроль обусловлены близостью к запретной области, а степень близости к ней однозначно характеризуется величиной трудности d, то в случае б), в силу того что в точке t_0' затраты меньше, то и величина трудности соответсвенно будет меньше. Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что $\hat{t}_0$ — решение задачи (6)—(11), где $\hat{t}_0$ точка, дающая минимум функции $d(\hat{t}_0)$.

Теорема доказана.

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Выше была введена задача первого уровня, которая представляет собой задачу оптимального управления. Для получения алгоритма ее решения, применим принцип максимума Понтрягина [3, 10, 11]. Для чего введем обобщенную функцию в виде

$$w(t) = w(t-1) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(X_i(t)), \qquad (13)$$

где $w(t)$ — суммарный валовой выпуск системы, выпущенный за t периодов. Введенная функция обеспечивает сведение рассматриваемой задачи к виду

$$\max_{X,\beta} F(t) = \max_{X,\beta} w(T). \qquad (14)$$

Введем для задачи (1)—(6) функцию Гамильтона

$$H(t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_i^j(t)(X_i^j(t-1) + \beta_i^j(t)\Delta X^j(t)) + \\ + c(t)\left(w(t-1) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(X_i(t)) \right)$$

и построим на ее основе сопряженную систему Эйлера

$$z_i^j(t-1) = \frac{\partial H(t)}{\partial X_i^j(t-1)} =$$

$$= z_i^j(t) + c(t)\lambda_i \frac{\partial f_i(X_i(t-1) + \beta_i(t)\Delta X(t))}{\partial X_i^j(t-1)} =$$

$$= z_i^j(t) + c(t)\lambda_i \frac{\partial f_i(X_i(t))}{\partial X_i^j(t)},$$

$$c(t-1) = \frac{\partial H(t)}{\partial w(t-1)} = c(t) = const$$

$$i = 1, 2, \ldots, n;\ t = T, T-1, \ldots, t_0.$$

Граничные условия при этом следующие:

$$z_i^j(T) = \frac{\partial H(T)}{\partial X_i^j(T)} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

$$c(T) = \frac{\partial H(T)}{\partial w(T)} = 1.$$

Откуда Гамильтониан и сопряженная система Эйлера принимают вид

$$H(t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_i^j(t)(X_i^j(t-1) + \beta_i^j(t)\Delta X^j(t)) + \\ + w(t-1) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(X_i(t)), \qquad (15)$$

$$z_i^j(t-1) = z_i^j(t) + \lambda_i \frac{\partial f_i(X_i(t))}{\partial X_i^j(t)}.$$

Для того, чтобы управление $(\beta_i^j(t))$, $t = t_0$, $t_0 + 1, \ldots, T$ было оптимальным, необходимо, в соответствии с принципом максимума Понтрягина, чтобы функция Гамильтона (15) на этом управлении достигала максимального значения.

Опираясь на это, для решения исходной задачи, может быть предложен следующий алгоритм:

Шаг 1. Задаем значения первого приближения управления $\tau = 0$, $(\beta_i^j(t))$:

$$\beta_i^j(t) = \frac{X_i^j(t_0)}{\sum_{k=1}^{n} X_k^j(t_0)};$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \ t = t_0, t_0 + 1, \ldots, T, j = 1, .., m.$$

Шаг 2. С помощью решения системы

$$\begin{cases} X_i^j(t) = X_i^j(t-1) + \beta_i^j(t)\Delta \overline{X}^j(t) \\ i = 1, 2, \ldots, n, t = t_0, t_0 + 1, \ldots, T, j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

находим значение τ-приближения $(X_i^j(t))$, *i=1,2,…,n, t=t_0,t_0+1,…,T, j = 1,…,m.*

Шаг 3. Определение значения целевой функции $w(T)$

$$w(t) = w(t-1) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i(t)).$$

Шаг 4. Решение сопряженной системы $(z_i^j(t))$, $i = 1,2,\ldots,n$, $t = t_0$, $t_0+1,\ldots,T$, $j = 1,2,\ldots,m$, по формулам

$$z_i^j(t-1) = z_i^j(t) + \Delta z_i^j(t),$$
$$t = t_0, t+1, \ldots, T,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\Delta z_i^j(t) = \lambda_i \dfrac{\partial f_i(X_i(t))}{\partial X_i^j(t)}$.

Шаг 5. Определение составляющих градиента $(r_i^j(t))$, i=1,2,...,n, t=t_0,t_0+1,...,T, j=1,2,...,m приращения целевой функции

$$\nabla w^\tau(T) = \sum_{t=t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i^j(t)\beta_i^j(t) \to \max,$$

$$0 \le \underline{\beta_i^j}(t) \le \beta_i^j(t) \le \overline{\beta_i^j}(t) \le 1,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m, \ t = 1, 2, \ldots, T,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_i^j(t) = 1, \forall i = 1, .., n, \ t = 1, 2, \ldots, T,$$

где $r_i^j(t) = z_i^j(t-1)\Delta \overline{X}^j(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = t_0$, $t_0 + 1, \ldots, T$, $j = 1, \ldots, m$.

На основе решения задачи симплекс методом находим (τ+1)-приближения управления $(\beta_i^j(t)^{\tau+1})$, $t = t_0, t_0 + 1, \ldots, T$.

Шаг 6. Если $|\beta_i^j(t)^\tau - \beta_i^j(t)^{\tau+1}| \le \varepsilon$, i=1,2,...,n, $t = t_0$, t_0+1,...,T, j = 1, 2,..., m, где ε — оценка точности определения значения целевой функции, то задача считается решенной, в этом случае полагаем $\beta_i^j(t)^\tau = \beta_i^j(t)^{\text{опт}}$, иначе $\tau = \tau + 1$, переход к шагу 2.

Конец.

Описанный выше алгоритм положен в основу специально разработанного программного комплекса, на его основе проведены экспериментальные расчеты, которые будут приведены ниже.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ И КОНТРОЛЯ НАД ОБЪЕКТОМ

Рассмотрим процесс производства силикатного кирпича, начиная от добычи извести и заканчивая выходом готовой продукции. В производстве участвует три подразделения: по добыче извести, перевозке и непосредственно производству кирпича. Исходные данные (в том числе, дополнительное выделение ресурсов по периодам) представлены в таблице.

По приведенным данным восстанавливается вид производственной функции каждого подразделения

$$y_3 = 0.0833 y_2^{0.3502} x_3^{0.4252},$$
$$y_2 = (0.6089 y_1^{1.0526} + 0.0581 x_2^{0.8623})^{0.9098},$$
$$y_1 = 0.0757 x_1^{0.8694}.$$

и на их основе общий вид производственной функции предприятия в целом

$$y = 0.0833(0.0402 x_1^{0.9151} + 0.0581 x_2^{0.8623})^{0.3186} x_3^{0.4252}.$$

В данном случае ресурс один — капитал. Для упрощения расчетов положим $\underline{\beta^j} = 0$, $\overline{\beta^j} = 1$, то есть не будем ограничивать доли распределения дополнительных выделений ресурсов между отраслями. Поскольку в рассматриваемом примере выход одного подразделения является входом следующего, то выпуск объединения в целом определяется выпуском последнего подразделения, производящего конечный продукт. Целевая функция в данном примере будет иметь вид производственной функции всего объединения (а не взвешенной суммы выпусков подотраслей):

$$F(X(t)) = 0.0833(0.0402 X^1(t)^{0.915} +$$
$$+0.0581 X^2(t)^{0.862})^{0.3186} X^3(t)^{0.4252};$$
$$X^j(t) = X^j(t-1) + \beta^j(t)\Delta \overline{X}(t);$$
$$j = 1, 2, 3, \quad t = 1, 2, \ldots, 24;$$
$$0 \le \beta^j(t) \le 1, j = 1, 2, 3;$$
$$\sum_{j=1}^{3} \beta^j(t) = 1, t = 1, 2, \ldots, 24;$$

$$X^1(0) = 928.8, \quad X^2(0) = 1058.8, \quad X^3(0) = 5413.$$

Решив данную систему по указанному выше алгоритму, получим результат, приведенный в таблице коэффициентов управления (см. табл.). Значение целевой функции или что тоже сум-

Таблица

Исходные данные для исследования

Год	Период	Расходы на известь, тыс. р., $X1$	Выход извести, тыс. т., $Y1$	Транспортные затраты, тыс. руб, $X2$	Сырье известь, тыс. т., $Y2$	Расходы на кирпич, тыс. р., $X3$	Выпуск кирпича, млн. шт. Y3	Доп. выделение ресурсов, тыс. руб.	Коэффициенты управления на финальном шаге		
									$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$
1996	январь	928,8	28,9	1058,8	31,7	5413	10,8	1110,1	0,995077	0,004923	0
1996	февраль	725,4	23,4	1086	29,2	4952,4	9,9	1014,6	0,599723	0,099061	0,301216
1996	март	1290,6	37,9	1479,8	41,4	5757,2	12,4	1279,1	0,317778	0,112968	0,569254
1996	апрель	1642,3	47,5	1475,5	46,5	5644,7	12,7	1314,4	0,305165	0,089766	0,605069
1996	май	1892	54	1511,2	49,6	5329	12,6	1309,8	0,32374	0,07746	0,598799
1996	июнь	1905,6	54,8	1804,4	53,4	5509,4	13,3	1382,9	0,334633	0,072204	0,593164
1996	июль	2065	57,3	1404,7	49,8	5741,4	12,9	1381,7	0,332192	0,072622	0,595186
1996	август	2079,2	57,7	1622,3	52,2	5875,6	13,3	1436,6	0,333876	0,070934	0,59519
1996	сен-тябрь	2044,3	56,9	1499,1	50,6	5727,5	13	1390,6	0,331579	0,070674	0,597747
1996	октябрь	1885,6	53,8	1576,8	50,4	5785	13,2	1387,1	0,337924	0,06707	0,595006
1996	ноябрь	1587,9	46	1471,3	45,1	5654,5	12,6	1307,1	0,342741	0,064557	0,592702
1996	декабрь	1065	32	1189,9	34,8	5445,7	11,3	1155,1	0,337327	0,066373	0,5963
1997	январь	875,8	27,4	855,9	28	5751,1	10,7	1122,4	0,338474	0,065316	0,59621
1997	февраль	1067	32,1	1021,5	32,8	5463,4	10,9	1132,8	0,33516	0,06556	0,59928
1997	март	1325,2	38,9	1563,1	42,9	6036	12,8	1338,6	0,351824	0,057637	0,590539
1997	апрель	1503,6	43,8	1483,6	44,2	5818,8	12,5	1321	0,339607	0,061383	0,599011
1997	май	1752	50,2	1646,6	48,8	5863,9	12,9	1389,4	0,339625	0,060339	0,600035
1997	июнь	2112,7	58,5	1711,1	53,7	6047,2	13,7	1481	0,344371	0,057536	0,598092
1997	июль	1942,4	55,4	1848,1	54	6087	13,5	1481,6	0,345779	0,056647	0,597574
1997	август	2123,8	58,8	1635,3	53,1	5861,5	13,2	1443,1	0,347483	0,056269	0,596248
1997	сен-тябрь	2212,6	60,5	1571	52,8	6046,9	13,4	1474,6	0,357332	0,053186	0,589482
1997	октябрь	2027,6	56,2	1895,7	54,7	6583,8	14,2	1576,07	0,372034	0,048878	0,579088
1997	ноябрь	1672	48,4	1664,9	46,3	6946,8	13,8	1542,56	0,353967	0,057845	0,588188
1997	декабрь	1083,4	32,6	1132,3	34,4	6028,5	11,5	1236,6	0,242397	0,09436	0,663243

марный выпуск за все периоды составляет 598,44 млн штук. Отметим, что использование модели выбора оптимальной траектории развития позволило увеличить выпуск продукции (силикатного кирпича) за счет более разумного распределение ресурсов на 3,5 % по сравнению с начальным распределением при тех же финансовых затратах. На рис. 3 приведен графический вид траектории развития.

Имея траекторию развития, переходим к задаче второго уровня. Укажем параметры, необходимые для определения модели.

По данным из предыстории делаем вывод, что минимальная скорость движения объекта 10,10 млн штук кирпичей в месяц, а максимальная — 36,61 млн штук. Плановый период $t_{пл} = 24$ месяца, $A_0 = 0$, $A_{пл} = 598,44$. Допустимые отклонения от целевого результата в обе стороны $\Delta A = 10$, $\Delta t = 1$ — задают целевой прямоугольник. Ниже приведено графическое представление модели нахождения точки контроля (рис. 3).

После задания всех величин, входящих в модель второго уровня, можем вычислить первый момент контроля. Решая задачу (6)—(11)

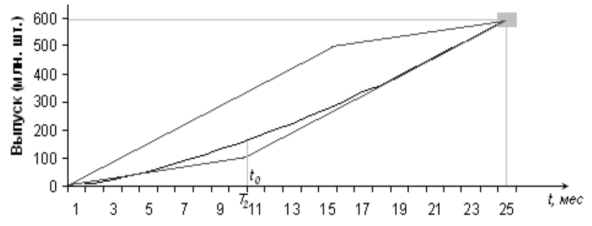

Рис. 3. Графическое представление момента контроля

(с помощью специально разработанных программ), получаем $t_0 = 10$ — это момент, в который необходимо будет произвести оценку состояния нашего объекта.

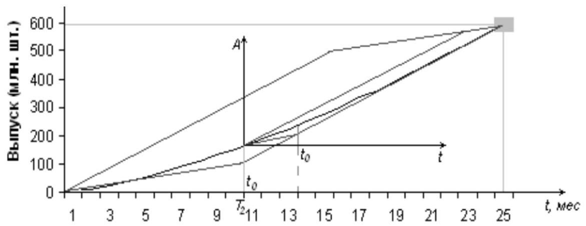

Рис. 4. Расчет следующей точки контроля

Рассмотрим два возможных варианта, в которых может оказаться объект по прошествии времени t_0 и поскольку алгоритм управления в целом организован циклически, то таким образом мы опишем на примере все возможные варианты исхода:

1. Контрольные мероприятия показали, что объект не отклонился от запланированный траектории, тогда согласно алгоритму, необходимо просто найти следующую точку контроля.

Следующей точкой контроля в нашем примере является $t_0 = 13$.

2. Контрольные мероприятия показали, что величина отклонения от запланированной траектории развития является критической, поэтому согласно алгоритму необходимо произвести перерасчет траектории, учитывая положение в котором оказался исследуемый экономический объект. Без ограничения общности, можно считать, что мы оказались выше оптимальной траектории, и объем произведенной продукции составил 200 млн штук вместо планируемого 131 млн штук (рис. 5).

В этой ситуации обращаемся к модели первого уровня для перестроения оптимальной траектории развития, а затем с помощью второй модели определяем очередной момент контроля $t_0 = 14$.

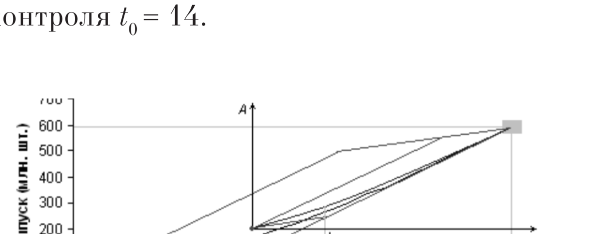

Рис. 5. Перерасчет траектории развития

Описанный процесс повторяется циклически до тех пор, пока экономический объект не достигнет цели: не попадет в целевой прямоугольник.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что для удержания экономического объекта в режиме сбалансированного роста может быть успешно использован прикладной инструментарий (модели, методы, алгоритмы и программы), основанный на предложенной двухуровневой модели и алгоритме получения ее решения.

Проведенный иллюстрирующий пример убедительно показывает, что, во-первых, исходные данные, необходимые для расчетов, имеются в распоряжении экономических объектов, во-вторых, должна быть активизирована работа на экономических объектах по оценке их реального состояния в любой момент времени и способах измерения набора показателей для этого.

Таким образом, сформулированы минимальные требования, выполнение которых позволит удерживать экономический объект в процессе его функционирования в режиме сбалансированного роста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабунашвили М.К.* Контроль и управление в организационных системах / М. К. Бабунашвили, М. А. Бермант, И. Б. Руссман // Экономика и математические методы. — 1969. — Т. 5, № 2. — С. 272—284.

2. *Бабунашвили М.К.* Оперативное управление в организационных системах / М. К. Бабунашвили, М. А. Бермант, И. Б. Руссман // Экономика и математические методы. — 1971. — Т. 7, № 3. — С. 480—492.

3. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория): учебник / В. И. Благодатских; [под ред. В. А. Садовничего]. — М. : Высш. Шк., 2001 — 239 с.

4. *Бурков В.Н.* Как управлять организациями / В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. — М. : Синтег, 2004. — 389 с.

5. *Дементьев В.Т.* Трехуровневая модель выбора номенклатуры изделий / В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин // Дискретный анализ и исследование операций, Январь—Июнь, 2001. Серия 2. — Т. 8, № 1. — С. 40—46.

6. *Жданов С.А.* Экономические модели и методы управления / С. А. Жданов — М.: Дело, 1998. — 302 с.

7. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ.

Г. И. Жуковой, Ф. Я. Кельмана. — М.: Айрис-пресс, 2002. — 576 с.

8. *Каплинский А.И.* Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем / А. И. Каплинский, И. Б. Руссман, В. М. Умывакин. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1991. — 167 с.

9. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 240 с.

10. *Лисичкин В.А.* Принятие решений на основе прогнозирования в условиях АСУ / В. А. Лисичкин, Е. И. Голынкер. — М. : Финансы и статистика, 1981. — 50 с.

11. Методы оптимизации в теории управления: Учебное пособие / И. Г. Черноруцкий. — СПб. : Питер, 2004. — 256 с.

12. *Руссман И.Б.* Трассологический контроль функционирования активных организационных систем / И. Б. Руссман, Е. В. Куркин // Экономическое прогнозирование: модели и методы. — 2006. — Ч. 2. — С. 287—293.