

ФОРМИРОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ ПРАВИЛ ТИПА TAKAGI-SUGENO ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕЧЕТКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

А. В. Алтухов

Воронежский государственный университет

В работе исследуется вопрос выбора наилучшей формы функций принадлежности, построенных по результатам нечеткой кластеризации, и их использование для формирования нечетких правил типа Takagi-Sugeno. Приводится сравнительный анализ двух алгоритмов построения функций принадлежности: на основе проекции матрицы разбиения на координатные оси и на основе проекции эллипсов на координатные оси. Предлагается два подхода для решения задачи выделения точек, принадлежащих кластерам.

НЕЧЕТКИЕ ПРАВИЛА TAKAGI-SUGENO

Нечеткая система (НС) — это система, особенностью описания которой является [1]:

- нечеткая спецификация параметров;
- нечеткое описание входных и выходных переменных системы;
- нечеткое описание функционирования системы на основе продукционных «если—то» правил.

Важнейшим классом нечетких систем являются нечеткие системы управления (НСУ). Структура нечеткой системы представлена на рис. 1.

Одним из важнейших компонентов НСУ является база знаний, которая представляет собой совокупность нечетких правил «если—то», определяющих взаимосвязь между входами и выходами исследуемой системы. Существуют различные типы нечетких правил: лингвистическая, реляционная, модель Takagi-Sugeno.

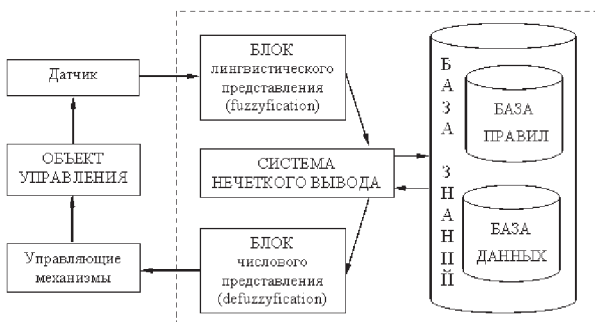


Рис. 1. Структура нечеткой системы управления

© Алтухов А. В., 2008

Лингвистическая модель базы правил представляет собой множество нечетких условных высказываний вида:

$$R_i : \text{если } x \text{ есть } A_i, \text{ то } y \text{ есть } B_i, \quad (1)$$

$$i = \overline{1, r}$$

где x, y — входная и выходная лингвистические переменные; A_i, B_i — лингвистические термы (им соответствуют нечеткие переменные с определенными функциями принадлежности).

В данной работе, исследуется вопрос построения функций принадлежности, используемых для формирования нечетких правил типа Takagi-Sugeno и минимизирующих среднеквадратичную ошибку аппроксимации. Модель Takagi-Sugeno (TS-модель) можно рассматривать как комбинацию лингвистической и регрессионной моделей [2]. Она задается в следующем виде

$$R_i : \text{если } x \text{ есть } A_i, \text{ то } y = f_i(x), \quad (2)$$

$$i = \overline{1, N},$$

В данной модели посылка представляет собой нечеткое высказывание, а заключение — четкую функцию. Функции f_i обычно имеют одинаковую структуру, только параметры для каждого правила различны. Наиболее простой для приложений является линейная функция, так что правила будут иметь вид

$$R_i : \text{если } x \text{ есть } A_i, \text{ то } y = a_i x + b_i, \quad (3)$$

$$i = \overline{1, N},$$

На рис. 2 представлена нечеткая TS-модель, которую можно рассматривать как кусочно-линейную аппроксимацию нелинейной функции.

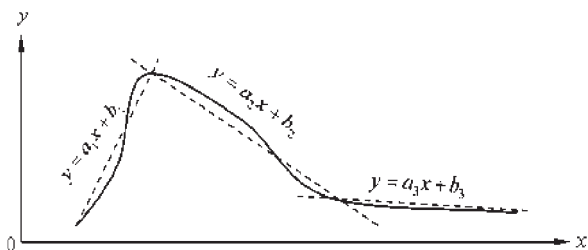


Рис. 2. Аппроксимации нелинейной функции с помощью TS-модели

НЕЧЕТКАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ

Кластеризация — это объединение объектов в группы (кластеры) на основе схожести признаков для объектов одной группы и отличий между группами. Исходной информацией для кластеризации является матрица наблюдений:

$$X = \{x_{ij}\}_{M \times N}, \quad (i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}), \quad (4)$$

каждая строка которой представляет собой значения N признаков одного из M объектов кластеризации. В метрическом пространстве «схожесть» обычно определяют через расстояние. Расстояние может рассчитываться как между исходными объектами (строками матрицы X), так и от этих объектов к прототипу кластеров. Обычно координаты прототипов заранее неизвестны, т.к. они находятся одновременно с разбиением данных на кластеры. Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более «естественна», чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров. Методы кластеризации также классифицируются по тому, определено ли количество кластеров заранее или нет.

В данной работе рассматриваются методы нечеткой кластеризации с заранее известным количеством кластеров. Описание нечетких кластеров представлено следующей матрицей нечеткого разбиения:

$$F = \{\mu_{ij}\}_{M \times K}, \quad (i = \overline{1, M}, j = \overline{1, K}), \quad (5)$$

где $\mu_{ij} \in [0, 1]$ степень принадлежности объекта $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ к кластеру C_j . Матрица F должна обладать следующими свойствами:

$$\forall i = \overline{1, M} \left(\sum_{j=1, K} \mu_{ij} = 1 \right), \quad (6)$$

$$\forall j = \overline{1, K} \left(0 < \sum_{i=1, M} \mu_{ij} < N \right) \quad (7)$$

Алгоритм нечетких s -средних состоит в итеративном изменении матриц F и вектора центров кластеров с целью V минимизации критерия разброса [3]:

$$\mu_{ij} = \left[\sum_{l=1}^K (D_{ij}/D_{il})^{2/(m-1)} \right]^{-1}, \quad (i = \overline{1, K}), \quad (8)$$

$$v_i = \sum_{j=1}^M (\mu_{ij})^m x_j / \sum_{j=1}^M (\mu_{ij})^m, \quad (9)$$

$$\lambda = \sum_{j=1, K} \sum_{i=1, M} (\mu_{ij})^m \cdot \|v_j - x_i\|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где v_j — центры нечетких кластеров; $m \in [1, \infty)$ — экспоненциальный вес, определяющий нечеткость (размытость) кластеров. В качестве нормы $\|\cdot\|$ применяется норма Евклида. Главным недостатком данного алгоритма кластеризации является тот факт, что все кластеры имеют одинаковую форму (в данной реализации форму окружности), которая может не соответствовать действительности и даже приводить к некорректному разбиению исходных данных на кластеры.

Алгоритм Густавсона—Кесселя позволяет найти кластеры различной геометрической формы, используя адаптивную норму для каждого кластера [4]. Каждый кластер C_i имеет свою собственную матрицу A_i , которая позволяет определить норму в виде

$$D_{ijA_i}^2 = \|x_j - v_i\|^2 = (x_j - v_i)^T A_i (x_j - v_i). \quad (11)$$

Таким образом, для решения задачи кластеризации с помощью алгоритма Густавсона—Кесселя необходимо минимизировать функцию

$$J_m(F, V, A, X) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^K (\mu_{ij})^m D_{ijA_i}^2, \quad (12)$$

где $A = (A_1, \dots, A_K)$ — вектор из K норм-порождающих матриц; F — матрица разбиения (5); удовлетворяющая условиям (6) и (7); $m \in [1, \infty)$ — экспоненциальный вес (как в алгоритме нечетких s -средних).

Для существования минимума функции J_m необходимо выполнение ограничений для норм-порождающих матриц A_i :

$$\forall i = \overline{1, K} (\det(A_i) = p_i, p_i > 0). \quad (13)$$

Причем матрица A_i может быть выражена следующим образом:

$$A_i = [p_i \det(R_i)]^{1/N} R_i^{-1}, \quad (i = \overline{1, K}), \quad (14)$$

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^M (\mu_{ij})^m (x_j - v_i)(x_j - v_i)^T}{\sum_{j=1}^M (\mu_{ij})^m}, \quad (15)$$

$(i = \overline{1, K})$

матрица ковариации c_i кластера. Нет общего правила задания параметров p_i , наиболее часто используют $p_i = 1$.

ВЫДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК КЛАСТЕРОВ

Выделение точек кластеров является следующим важным этапом, после того как были найдены центры кластеров. Способ выделения точек кластера, к которому они принадлежат, напрямую влияет на вычисление ковариационной матрицы кластера, а ковариационная матрица влияет на формирование базы знаний типа Takagi-Sugeno. В данной работе предлагаются две новые схемы выделения точек кластеров. Главным ограничением, которое должно выполняться при создании алгоритмов выделения точек кластеров, является обеспечение принадлежности каждой точки исходных данных хотя бы одному кластеру.

Схема 1. Устанавливается параметр $\alpha > 1/K$, где K — количество кластеров. Просматривается столбец матрицы F . Если значение соответствующего элемента столбца больше установленного параметра α , то по номеру строки матрицы F (этот номер совпадает с номером строки матрицы X), определяется принадлежность точки данному кластеру. Такая процедура выполняется для всех столбцов матрицы F .

Схема 2. Для каждой точки x_i , ($i = \overline{1, N}$) определяется максимальное значение $z = \max_j \mu_{ij}$, ($j = \overline{1, M}$) в соответствующей строке матрицы F . По номеру столбца, в котором было найдено значение z , определяется номер кластера, которому присваивается точка x_i . Такая процедура выполняется для всех строк матрицы F .

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕЧЕТКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Функции принадлежности для входной переменной можно получить двумя способами: либо через матрицу разбиения, путем проецирования столбца матрицы разбиения F на

ось x ; либо, определив координаты вершин прямоугольника, описывающего эллипс соответствующего кластера, спроецировать их на ось x и, зная длину проекции и координаты центра кластера, задать функцию принадлежности аналитически (рис. 3). Функции принадлежности, построенные с помощью этих двух подходов методов, имеют различную форму, что влияет на точность аппроксимации функции с помощью нечеткого вывода Takagi-Sugeno. Одной из главных задач данной работы является исследование вопроса выбора формы функции принадлежности для минимизации среднеквадратичной ошибки, полученной нечеткой системой.

Матрица K_k^{-1} , обратная к матрице ковариации, полученная по результатам кластерного анализа, определяет эллипсоид в пространстве вход-выход в виде

$$\alpha_k^2 = (x - c_k)^T K_k^{-1} (x - c_k), \quad (16)$$

где c_k центр k -го кластера; $q = n + p$, n — количество входов нечеткой системы, а p — количество выходов.

Для упрощения вычислений эллипсоиды вписываются в гиперпрямоугольники [5]. Затем проецируются гиперпрямоугольники на оси пространства состояний в форме нечетких правил. k -й гиперпрямоугольник имеет 2^q вершин $(\pm\alpha_k / \sqrt{\lambda_{k1}}, \dots, \pm\alpha_k / \sqrt{\lambda_{kq}})$ в повернутой плоскости координат. Проекция k -го гиперпрямоугольника на i -ю ось имеет длину:

$$p_{ki} = 2\alpha_k \sum_{j=1}^q \frac{|\cos \gamma_{kij}|}{\sqrt{\lambda_{kj}}}. \quad (17)$$

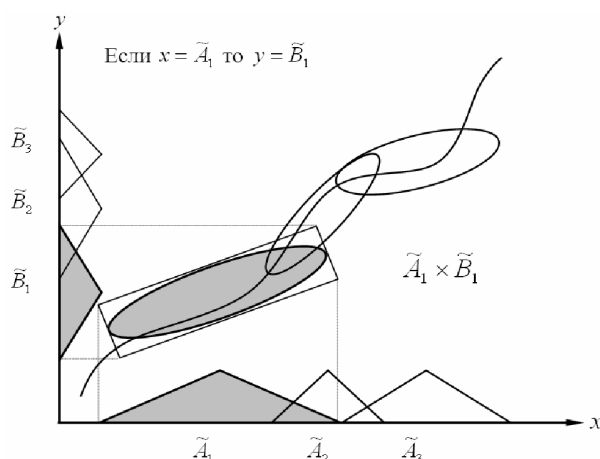


Рис. 3. Функции принадлежности на основе проекции прямоугольника, описанного около эллипса, на оси координат

p_{ki} определяет основание для функции принадлежности на i -й оси для k -го эллипсоида.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для исследования вопроса наилучшей формы функции принадлежности с точки зрения наибольшей точности аппроксимации точечно-заданной функции с помощью базы правил типа Takagi-Sugeno был разработан программный комплекс в среде Delphi 7.0. В данном программном комплексе реализована следующая функциональность:

- алгоритмы кластеризации нечетких средних и Густавсона—Кесселя;
- два алгоритма выделения точек кластеров (предложенных в данной статье);
- два алгоритма построения функций принадлежности (описанных в данной статье).

Схема взаимодействия данных для формирования базы правил в рамках разработанного комплекса представлена на рис. 4.

Для определения влияния формы функции принадлежности на точность аппроксимации с помощью базы правил Takagi-Sugeno и выбора наилучшей рассмотрен целый ряд функ-

ций принадлежности (см. табл. 1). При реализации нечеткого вывода в качестве заключений нечетких правил используются большие оси эллипсов. При построении эллипсоида для k -го кластера параметр α_k определялся следующим образом:

$$\alpha_k^2 = \max_i ((x_i - c_k)^T K_k^{-1} (x_i - c_k)), \quad (18)$$

где i -й номер точки, принадлежащей кластеру с центром c_k .

Для определения наиболее предпочтительной формы функции принадлежности с точки зрения точности аппроксимации был проведен ряд вычислительных экспериментов с различными видами исходных функций. Для анализа точности аппроксимации используется оценка величины среднеквадратичной ошибки

$$E(x) = \left((y(x) - \tilde{y}(x))^2 / M \right)^{1/2}, \quad (26)$$

где $y(x)$ — точное значение исходной функции; $\tilde{y}(x)$ — приближенное значение, полученное на основе нечеткого вывода по базе знаний типа Takagi-Sugeno; M — количество точек, в которых вычисляется среднеквадратичная ошибка. Для выбора наилучшей функции принадлежности был проведен ряд экспериментов. В каждом из



Рис. 4. Общая схема формирования базы правил

Виды функций принадлежности

Функция принадлежности	Формула	График функции
Треугольное число	$a_j(x) = \begin{cases} 1 - \left \frac{x - c_j}{p_j} \right , & \text{если } x - c_j < p_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	
Квадратичная	$a_j(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x - c_j}{p_j} \right)^2, & \text{если } \left(\frac{x - c_j}{p_j} \right)^2 < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	
Гаусса	$a_j(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - c_j}{p_j}\right)^2\right)$	
Коши	$a_j(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - c_j}{p_j}\right)^2}$	
Лапласа	$a_j(x) = \exp\left(-\frac{ x - c_j }{p_j}\right)$	
Сигмоидальная	$a_j(x) = \frac{2}{1 + \exp\left(\left(\frac{x - c_j}{p_j}\right)^2\right)}$	
Гиперболический секанс	$a_j(x) = \operatorname{sech}\left(\frac{x - c_j}{p_j}\right)$	

экспериментов использовалось 100 точек, сгенерированных с помощью тестовых функций (см. рис. 5), которые были сгруппированы в классы:

1) полиномиальные функции:

a) $f_1(x) = 3x(x-1)(x-1,9)(x-0,7)(x+1,8)$, $x \in [-2, 2]$;

b) $f_2(x) = \frac{100(x+0,95)(x+0,6)(x+0,4)}{(x+1,7)(x-2)^2} \times \frac{(x-0,1)(x-0,4)(x-0,8)(x-0,9)}{(x+1,7)(x-2)^2}$, $x \in [-2, 2]$;

2) экспоненциальные функции:

a) $f_3(x) = 10 \exp\left(-\left(\frac{x-0,1}{0,25}\right)^2\right) - 8 \exp\left(-\left(\frac{x-0,75}{0,15}\right)^2\right) - 4 \exp\left(-\left(\frac{x-0,8}{0,1}\right)^2\right)$, $x \in [-1, 1]$;

b) $f_4(x) = 10 \left(\exp\left(-\frac{|x|}{0,2}\right) + \exp\left(-\frac{|x-0,8|}{0,3}\right) + \exp\left(-\frac{|x+0,6|}{0,1}\right) \right)$, $x \in [-1, 1]$;

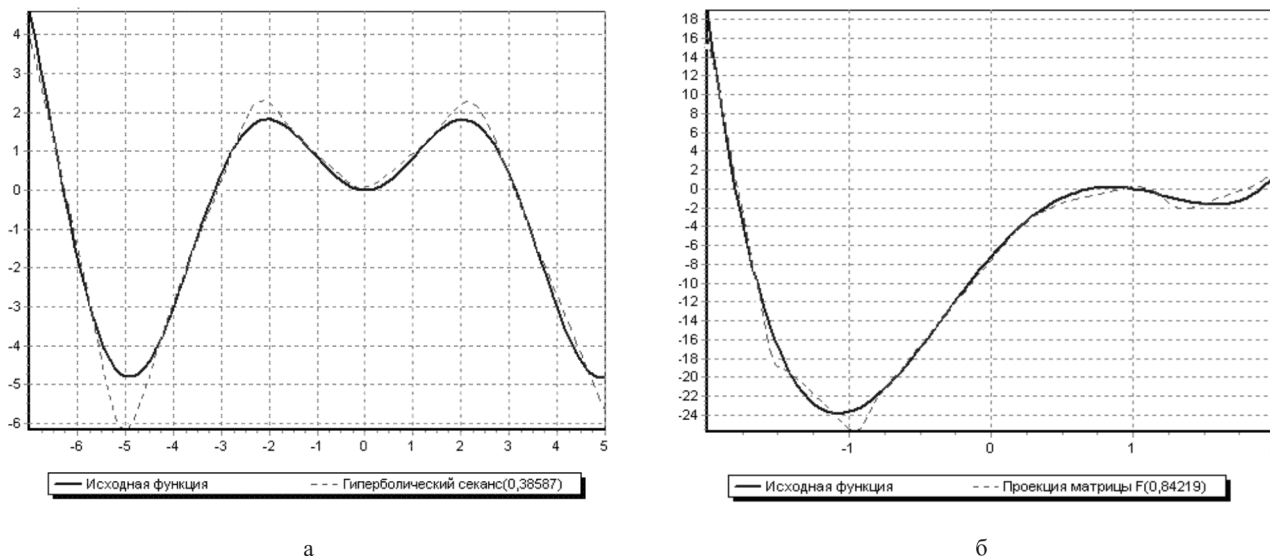


Рис. 5. Пример аппроксимации: а) функций $f_1(x)$; б) функции $f_3(x)$

Таблица 2

Оценка величины среднеквадратичной ошибки $E(x)$

Исходная функция	Алгоритмы кластеризации	Методы выделения кластеров	Проекция матрицы разбиения	Треугольное число	Функция Гаусса	Квадратичная функция	Гиперболический секанс	Функция Лапласа	Функция Гоши	Сигмоидальная функция
$f_1(x)$	с-средних	Схема1	2,57	4,00	2,33	4,85	2,13	2,33	3,14	2,52
		Схема2	2,31	1,76	1,50	1,97	1,53	1,59	2,51	1,51
	Густавсона—Кесселя	Схема1	0,90	2,76	1,57	3,42	1,44	1,66	2,51	1,72
		Схема2	0,85	1,09	0,93	1,23	1,06	1,17	2,75	0,93
$f_2(x)$	с-средних	Схема1	0,17	0,29	0,23	0,34	0,20	0,21	0,19	0,25
		Схема2	0,19	0,26	0,23	0,29	0,23	0,23	0,22	0,24
	Густавсона—Кесселя	Схема1	0,05	0,18	0,15	0,19	0,14	0,14	0,15	0,16
		Схема2	0,05	0,07	0,06	0,07	0,06	0,06	0,06	0,08
$f_3(x)$	с-средних	Схема1	0,53	0,80	0,50	1,03	0,46	0,48	0,61	0,55
		Схема2	0,40	0,55	0,40	0,64	0,39	0,40	0,44	0,41
	Густавсона—Кесселя	Схема1	0,26	0,63	0,41	0,79	0,40	0,42	0,41	0,43
		Схема2	0,27	0,60	0,40	0,75	0,38	0,41	0,42	0,41
$f_4(x)$	с-средних	Схема1	0,52	1,08	0,72	1,31	0,55	0,55	0,58	0,82
		Схема2	0,44	0,59	0,46	0,67	0,45	0,45	0,43	0,47
	Густавсона—Кесселя	Схема1	0,37	0,99	0,69	1,16	0,57	0,60	0,62	0,75
		Схема2	0,27	0,44	0,32	0,51	0,33	0,34	0,51	0,33
$f_5(x)$	с-средних	Схема1	0,68	1,52	1,10	1,81	0,96	0,97	0,97	1,20
		Схема2	0,95	1,24	1,19	1,31	1,17	1,16	1,20	1,20
	Густавсона—Кесселя	Схема1	0,36	2,43	1,69	2,79	1,31	1,37	1,47	1,88
		Схема2	0,21	0,37	0,33	0,40	0,32	0,32	0,37	0,33
$f_6(x)$	с-средних	Схема1	2,57	4,48	3,88	5,08	3,38	3,25	2,85	4,15
		Схема2	3,24	4,55	4,18	4,83	4,08	4,05	3,38	4,21
	Густавсона—Кесселя	Схема1	0,59	2,20	1,31	2,75	0,87	0,88	1,21	1,56
		Схема2	0,60	1,05	0,75	1,25	0,72	0,72	0,98	0,75
$f_7(x)$	с-средних	Схема1	5,05	7,22	5,66	8,92	4,88	4,81	5,07	6,10
		Схема2	4,63	6,52	5,64	7,09	5,53	5,52	4,72	5,67
	Густавсона—Кесселя	Схема1	2,05	5,47	4,42	6,31	3,46	3,41	3,87	4,87
		Схема2	1,60	3,00	2,27	3,52	2,20	2,25	2,50	2,30

3) тригонометрические функции:

a) $f_5(x) = x \sin(x)$, $x \in [-7, 5]$;

b) $f_6(x) = 8 \sin(10x^2 + 5x + 1)$, $x \in [-1, 1]$;

c) $f_7(x) = 10(\sin(4x + 0,1) + \sin(14x) + \sin(11x - 0,2) + \sin(17x + 0,3))$, $x \in [-1, 1]$.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе данных, приведенных в табл. 2, можно сделать следующие выводы об используемых алгоритмах кластеризации, о выделении точек кластеров и алгоритмах построения функций принадлежности различной формы:

1) среди алгоритмов кластеризации, используемых в экспериментах, наилучшие показатели у алгоритма Густавсона—Кесселя с адаптивными норм-порождающими матрицами;

2) вторая схема выделения точек кластеров позволяет получить более точные результаты, чем первая;

3) нечеткие правила типа Takagi-Sugeno, построенные с использованием функций принадлежности на основе матрицы разбиения, превосходят с точки зрения точности аппроксимации нечеткие правила с функциями принадлежностями на основе проекции эллипсов.

4) среди функций принадлежности на основе проекции эллипсов на координатные оси, наиболее предпочтительными являются функция принадлежности Лапласа и функция принадлежности на основе гиперболического синуса. Кроме того, т. к. данные функции заданы аналитически, то можно осуществить их настройку, например, с помощью нейронных сетей или генетических алгоритмов, путей настройки таких параметров, как модальное значение функции принадлежности c_k (в на-

шем случае это центр кластера) и длины проекции эллипса d_k .

Следует отметить, что данные результаты справедливы для случая, когда нечеткие правила содержат одну входную и одну выходную переменную (так называемые SISO правила). Например, функции принадлежности, полученные при проекции матрицы разбиения или эллипсов на ось y для исходных функций, рассмотренных в экспериментах, сильно перекрывают друг друга, что сильно сказывается на точности аппроксимации. Это главным образом связано с тем, что исходные функции являются многозначными относительно оси y .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы нечеткого моделирования в среде MatLab : учеб. пособие / Т. М. Леденева, Д. С. Таркин, А. С. Тарасова. — Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006. — 51 с.

2. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети : учеб. пособие / В. В. Круглов, М. И. Дли, Р. Ю. Голунов. — М. : Изд-во Физ-мат. литературы, 2001. — 224 с.

3. Штовба С.Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткой логики / С. Д. Штовба. — (<http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php>).

4. Detecting clusters of different geometrical shapes in microarray gene expression data / Dae-Won Kim, Kwang H. Lee and Doheon Lee // Bioinformatics vol. 21. — 2005. — № 9. — P. 1927—1934.

5. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules / Julie A. Dickerson and Bart Kosko // IEEE Transaction on fuzzy systems vol. 26. — August 2004. — № 4. — P. 542—560.

6. The Shape of Fussy Sets in Adaptive Function Approximation / Sanya Mitani, Bart Kosko // IEEE Transaction on fuzzy systems vol. 9. — August 2004. — № 4. — P. 637—657.