УДК 519.816

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НЕЧЕТКИХ КРИТЕРИЯХ

Б. А. Семенов, Т. М. Леденева

Воронежский государственный университет

Статья содержит описание подхода к решению задач многокритериальной оптимизации при нечетких критериях.

ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальность является особенностью реальных систем, при этом, критерии, которые необходимо оптимизировать, зачастую противоречат друг другу. Например, оптимальный проект для атомной станции должен быть и максимально безопасен, и максимально дешев. Если просто сформулировать эти два максимизируемых критерия в четких терминах, они будут противоречивы, потому что проект, который является 100 %-но безопасным, будет делать станцию в сотни раз более дорогой, а самый дешевый проект, очевидно, не безопасен.

Универсальным способом борьбы с многокритериальностью является переход к обобщенному критерию, который и оптимизируется. В основе такого перехода лежит использование различных функций агрегирования, причем результат не всегда поддается интерпретации, поэтому возникает вопрос об адекватности полученного оптимального решения. Часто цели разрабатываемой системы, а значит и критерии трудно сформулировать в четких терминах, т.е. имеет место неопределенность. Ее природа может быть различной, поэтому при моделировании необходимо учитывать тип информации (вероятностная, интервальная, нечеткая информация), которая доступна при принятии решений. Этот факт оказывает существенное влияние на тип модели и способы обработки информации. В настоящее время нечеткая логика предлагает естественный подход к решению задачи многокритериальной оптимизации, когда мы не можем оптимизировать все противоречивые критерии на 100 %, а только каждый из них до некоторой степени. Для решения задач многокритериальной оптимизации на основе нечеткой логики был предложен ряд методов [см.: 5, 6], которые отражают особенности человеческих рассуждений. В этой статье будет показано, что некоторые подходы к многоцелевой оптимизации могут быть основаны только на нечеткой логике и не требуют никаких дополнительных специальных инструментов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача многокритериальной оптимизации может быть сформулирована следующим образом: пусть заданы n критериев $f_1, f_2, ..., f_n$, таких, что $\forall i \left(f_i : X \to R\right)$. Необходимо определить такой элемент $x^* \in C$, где $C \subseteq X$, который оптимизирует заданные критерии. В дальнейшем под оптимизацией будем понимать именно максимизацию критериев. Подмножество C определяется ограничениями конкретной задачи на множество решений, при этом $x \in C$ — допустимое решение, C — множество допустимых решений.

Под *задачей многокритериальной оптимизации с нечеткими критериями* будем подразумевать набор $\left(f_1, ..., f_n; C\right)$, где $f_1, f_2, ..., f_n$ являются нечеткими функциями на множестве X, а C — обычное (четкое) подмножество X. Формально задача может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} &f_1(x) \to \max \\ &\vdots \\ &f_n(x) \to \max \\ &x \in C \end{aligned}$$

Заметим, что даже для единственной целевой функции существуют трудности в нахождении оптимального решения x^*. Поступим следующим образом: сначала сформулируем многоцелевую задачу оптимизации для случая четких ограничений и четких критериев, а затем, используя нечеткие обобщения элементов задачи, расширим ее формулировку для случая нечетких критериев. В основу подхода положим следующие модели представления знаний: в терминах логики предикатов первого порядка (или одной из ее модификаций) и с помощью продукционной модели — в форме *если-то*-правил.

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ТЕРМИНАХ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — четкие критерии. Представим формально предикат $S(x)$ = «функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ достигают максимальных значений в точке $x \in C$ ». Смысл данного предложения следующий:

- $x \in C$ и
- если y принадлежит C , то $f_i(y) \le f_j(x)$ для всех $i = \overrightarrow{1,n}$.

Иначе формально:

$$S(x) \leftrightarrow (x \in C \wedge \forall y(y \in C \rightarrow \forall i(f_i(y) \le f_i(x)))) \quad (1)$$

Заметим, что при различных значениях x данный предикат превращается в истинное или ложное высказывание, т.е. $S(x) \in \{0,1\}$ для $x \in C$. Для обобщения на нечеткий случай для всех элементарных предикатов введем функцию истинности $t \in [0,1]$, которая в отличие от истинностных значений 1 и 0 определяет степень истинность соответствующего высказывания при конкретных значениях предикатных переменных. В нашем случае элементарными предикатами являются « $x \in C$ » и « $f_i(y) \le f_j(x)$ ». Поскольку в нашей задаче множество допустимых решений C - обычное, т.е. четкое, то

$$t[x \in C] = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in C \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Так как нами рассматривается оптимизационная задача с нечеткими критериями, то $t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right] \in [0,1]$ и степень истинности для конкретных значений x и y определяется путем сравнения соответствующих нечетких множеств. Некоторые подходы к решению этой проблемы представлены в исследованиях [см.: 1].

В формулу (1) также входит квантор всеобщности и логические операции $\wedge$ и $\rightarrow$, поэтому возникает вопрос об их формальном представлении в нечеткой логике. Обозначим нечеткие логические связки через F_θ , где $\theta \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$. В настоящее время существуют различные подходы к представлению нечетких логических связок $\neg, \wedge, \vee$, которые либо обобщают специальным образом соответствующие булевы операции, либо являются оригинальными и не имеют аналогов в обычной булевой логике. Для нечеткого представления кванторов $\forall$ и $\exists$ используется тот факт, что квантор $\forall$ обобщает конъюнкцию, а $\exists$ — дизъюнкцию для бесконечного числа предикатных переменных. Таким образом, выражение (1) примет вид:

$$\mu_S(x) = \\ = F_\wedge\left(t[x \in C], F_{\forall y}\left(F_\rightarrow\left(t[y \in C], F_{\forall i}\left(t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right]\right)\right)\right)\right) \quad (2)$$

и позволяет для каждого значения x вычислить степень принадлежности $\mu_S(x)$.

2. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ЯЗЫКЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Основной вопрос теории нечетких множеств и нечеткой логики связан с определением основных нечетких операций. Для семантических связок *и* и *или*, как и для их теоретико-множественного эквивалента — операций объединения и пересечения — Л. Заде предложил использовать операторы взятия максимума и минимума [см.: 11]. Необходимо заметить, что и в современных разработках они играют значительную роль по той причине, что их физический смысл вполне очевиден.

Целенаправленный подход к формированию различных математических операторов, использующихся для представления семантических связок, стал возможным благодаря введению треугольных норм — Т-норм и S-конорм [см.: 6, 9].

Треугольной нормой (Т-нормой) называется операция $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $T(x, y) = T(y, x)$ — коммутативность;

b) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ — ассоциативность;

c) $T(0,0) = 0, T(x,1) = T(1, x) = x$ — ограниченность;

d) $(x \le t) \wedge (y \le z) \Rightarrow T(x, y) \le T(t, z)$ — монотонность.

Треугольные нормы используются для моделирования конъюнкции или пересечения нечетких множеств. Двойственным понятием к Т-норме является треугольная *S-конорма*, которая моделирует дизъюнкцию или объединение нечетких множеств. S-конорма также является коммутативной, ассоциативной, монотонной, но ограниченность задается в виде

$$S(1,1) = 1, S(x,0) = S(0, x) = x .$$

Пара <T,S> — называется парой двойственных операций, если $n(T(x,y)) = S(n(x),n(y))$, где $n(x)$ — операция отрицания на $[0,1]$, определенная ниже. Треугольные нормы и конормы допускают обобщение на n мерный случай.

Т-норма называется архимедовой, если $\forall x \in [0,1]$ $(T(x,x) < x)$, и строгой, если является строго возрастающей функцией по каждой из переменных.

Справедливо следующее утверждение [см.: 4]: если $T(x_1,...,x_n)$ — строгая или архимедова норма, то для любого $x = a$ $(a \in [0,1])$

$$\lim_{n\to\infty} T(a,...,a) = 0 .$$

Из данного утверждения следует, что разумно выбрать в качестве $\wedge$ не строгую или архимедову норму, а $\wedge = \min$ и, соответственно, $\forall = \inf$.

Операция отрицания $n(x)$ в нечеткой логике также может быть определена неоднозначно, но в соответствии с общим определением а) $n(x)$ — строго убывающая функция, б) $n(0) = 1, n(1) = 0$, в) $n(n(x)) = x$. Общей для всех пар двойственных операций (относительно закона де Моргана) является стандартное отрицание $n(x) = 1 - x$.

Определение нечеткой импликации является одной из важнейших проблем нечеткого моделирования. Часто нечеткую импликацию определяют из ряда предположений и гипотез, которые должны выполняться в рамках данной модели. Наряду с интуитивным подходом определения импликации, который часто используется в приложениях, существует и аксиоматический подход. В исследованиях [см.: 6, 9, 10] рассматриваются различные классы функций импликации. В нашем случае ограничимся обобщением булевой импликации на нечеткий случай. В булевой логике $x \to y = \bar{x} \vee y$. Если обозначить через $n(x)$ операцию отрицания на $[0,1]$, $S(x,y)$ — дизъюнкцию в виде S-конормы, то нечеткую импликацию $I(x,y)$ можно записать в виде

$$I(x,y) = S(n(x),y).$$

Например, используя классическую дизъюнкцию $T(x,y) = \max(x,y)$ и операцию отрицания $n(x) = 1 - x$, получим *импликацию Diene*

$$I_{Diene}(x,y) = \max(1-x,y).$$

Таким образом, учитывая определения нечетких логических операций и рассуждения по поводу выбора подходящего функционального представления, получим, что задача нечеткой многокритериальной оптимизации, может быть записана в следующем виде

$$\mu_S(x) = \\ = \min\left(t[x \in C], \inf_y I\left(t[y \in C], \inf_i\left(t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right]\right)\right)\right) \quad (3)$$

или, принимая во внимание определение $I(x,y) = I_{Diene}(x,y)$

$$\mu_S(x) = \\ = \min\left(t[x \in C], \inf_y \max\left(1 - t[y \in C], \inf_i\left(t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right]\right)\right)\right). \quad (4)$$

Пусть $(f_1,...,f_n;C)$ — задача многокритериальной оптимизации при нечетких критериях. Нечеткое множество FL будем называть решением задачи, основанным на нечеткой логике, если ее функция принадлежности $\mu_{FL}(x)$ определяется правилом (3), т.е. $\mu_{FL}(x) = \mu_S(x)$.

3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ТЕРМИНАХ ЕСЛИ-ТО-ПРАВИЛ

Опишем задачу многокритериальной оптимизации с четкими критериями в терминах *если-то*-правил. Пусть $C(x) \Leftrightarrow x \in C$, $S(x) \Leftrightarrow$ «x - оптимальное решение многокритериальной задачи при нечетких ограничениях». Заметим, что легко описать правила, по которым будут исключаться все варианты, кроме оптимального решения:

- если x не удовлетворяет ограничениям C, то x — нежелательное решение;
- если для некоторого x и для некоторого i существует элемент y, который удовлетворяет ограничениям C и для которого $f_i(y) > f_i(x)$, то x — нежелательное решение.

Формально эти правила можно представить в следующем виде:

$$\neg C(x) \to \neg S(x),$$

$$C(y) \wedge (f_i(y) > f_i(x)) \to \neg S(x).$$

Чтобы перейти к нечетким продукционным правилам можно использовать нечеткую технику моделирования Mamdani [4, 7, 8], согласно которой если имеется набор правил, то для того, чтобы некоторое заключение было верным, необходимо и достаточно, чтобы для одного из правил, которое сводится к этому заключению, все условия были выполнены. В нашем случае

$$\neg S(x) \leftrightarrow \neg C(x) \vee \left(C(y_1) \wedge \left(f_1(y_1) > f_1(x)\right)\right) \vee \ldots \vee$$
$$\left(C(y_1) \wedge \left(f_n(y_1) > f_n(x)\right)\right) \vee$$
$$\left(C(y_2) \wedge \left(f_1(y_2) > f_1(x)\right)\right) \vee \ldots \vee$$
$$\left(C(y_2) \wedge \left(f_n(y_2) > f_n(x)\right)\right) \vee \ldots$$

Здесь дизъюнкция $\vee$ применена к отдельным высказываниям, которые соответствуют всем возможным значениям y. Затем, как и предыдущем случае, к степеням истинности отдельных высказываний. Как результат, получим следующую формулу:

$$\precsim_{\neg S}(x) =$$
$$= F_{\vee}\Big[t[x \in C], F_{\wedge}\left(t[y_1 \in C], t\left[f_1(y_1) > f_1(x)\right]\right), \ldots,$$
$$F_{\wedge}\left(t[y_1 \in C], t\left[f_n(y_1) > f_n(x)\right]\right),$$
$$F_{\wedge}\left(t[y_2 \in C], t\left[f_1(y_2) > f_1(x)\right]\right), \ldots,$$
$$F_{\wedge}\left(t[y_2 \in C], t\left[f_n(y_2) > f_n(x)\right]\right), \ldots\Big].$$

Здесь, $\vee$-оператор объединяет бесконечно много высказываний, следовательно (подобно тому, как показано выше), можно заключить, что единственный способ избежать бессмысленной ситуации, в которой $j_{\neg S}(x) = 1$ для всех x, использовать $F_{\vee} = \max$. Таким образом, получаем следующее определение.

Пусть $(f_1, \ldots, f_n; C)$ — задача многокритериальной оптимизации при нечетких критериях. Нечеткое множество RB будем называть решением задачи, основанным на *если-то*-правилах, если ее функция принадлежности $\mu_{RB}(x)$ определяется правилом

$$\mu_{RB}(x) = F\neg\left(\mu_S(x)\right) =$$
$$= \max\left\{t[x \notin C], \sup_y \sup_i F_{\wedge}\left(t[y \in C], t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]\right)\right\} \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение: для задачи многокритериальной оптимизации при нечетких критериях $(f_1, \ldots, f_n; C)$ решения $\mu_{RB}(x)$ и $\mu_{FL}(x)$ совпадают.

<u>Доказательство.</u> Предикат $y \in C$ является четким, следовательно, его истинность $t[y \in C] \in \{0,1\}$. По определению конъюнкции $T(0,x) = T(x,0) = 0$, $T(1,x) = T(x,1) = 1$, поэтому

а) если $y \in C$, то $t[y \in C] = 1$ и

$F_{\wedge}\left(1, t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]\right) = t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]$;

б) если $y \notin C$, тогда $t[y \in C] = 0$, и $F_{\wedge}\left(0, t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]\right) = 0$.

При вычислении супремума множества неотрицательных чисел, можно пренебречь 0, и рассматривать только $y \in C$. Таким образом, получаем

$$\mu_{RB}(x) = F\neg\left(\mu_S(x)\right) =$$
$$= \max\left\{t[x \notin C], \sup_y \sup_i t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]\right\}.$$

Учитывая свойства отрицания $\neg$, имеем $\mu_S(x) = F\neg F\neg\left(\mu_S(x)\right)$. Следовательно,

$$\mu_S(x) = F_{\neg}\left(\mu_{RB}(x)\right) =$$
$$= F_{\neg}\left(\max\left\{t[x \notin C], \sup_y \sup_i t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]\right\}\right).$$

В соответствии с законом де Моргана

$$F_{\neg}\left(\max\{a,b\}\right) = \min\left\{F_{\neg}(a), F_{\neg}(b)\right\},$$

откуда

$$\mu_S(x) =$$
$$= \min\left\{t[x \in C], F_{\neg}\left(\sup_y \sup_i t\left[f_i(y) > f_i(x)\right]\right)\right\} =$$
$$\min\left\{t[x \in C], \inf_y \inf_i t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right]\right\}.$$

Полученное выражение совпадает с определением $\mu_{FL}(x)$ по (4) при $y \in C$.

Заметим, что нечеткое решение $\mu_S(x)$ задачи многокритериальной оптимизации при нечетких критериях предоставляет пользователю список из допустимых решений со степенями принадлежности к оптимальному решению. Тем самым вновь возникает ситуация неопределенности. Но в этом случае неопределенность является структурированной, поскольку каждому x ставится в соответствие степень «удовлетворения всех критериев». Разумный подход к выбору «четкого» решения - выбрать x^* с наибольшей степенью $\mu_S(x)$. Другие подходы к выбору заключаются в использовании подходящего метода дефазификации [12].

Пусть $(f_1, \ldots, f_n; C)$ — задача многокритериальной оптимизации при нечетких критериях, пусть $\mu_S(x)$ — ее нечеткое решение, тогда элемент x^* из X есть «четкое» решение этой задачи, если

$$j_S\left(x^*\right) = \max_{x \in X} j_S(x).$$

Алгоритм решения задачи может быть сформулирован следующим образом:

S1. Формализация задачи в виде $(f_1, \ldots, f_n; C)$.

S2. Начало оптимизации по x:

S3. Для конкретного x выполнить:

S3.1. Сформировать нечеткое подмножество для всех y с функцией принадлежности $t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right]$;

S3.2. Определить $y' = \inf_y t\left[f_i(y) \le f_i(x)\right]$.

S4. Определить

$x' = \min\left\{t\left[x' \in C\right], t\left[f_i(y') \le f_i(x')\right]\right\}$.

S5. Анализ нечеткого решения значения $\mu_S(x')$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача многокритериальной оптимизации при нечетких критериях, и предложены подходы к ее решению, основанные на нечеткой логике. Показано, что соответствующие нечеткие решения совпадают. Основная проблема заключается в формализации основных нечетких логических связок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леденева Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. — Воронеж : ВГУ, 2006. — 235 с.

2. Нечеткие гибридные системы : теория и практика / под. ред. Н. Г. Ярушкиной. — М. : Физматлит, 2007. — 208 с.

3. *Семенов Б. А.* Гибридные системы на примере нечеткой многокритериальной задачи о назначениях / Семенов Б. А. // Современные проблемы механики и прикладной математики : сб. тр. междунар. шк.-сем. Воронеж, 17-19 сент. 2007 г. — Воронеж : Науч. кн., 2007. — С. 317—320.

4. *Bouchon-Meunier B.* On the formulation of optimization under elastic constraints (with control in mind) / B. Bouchon-Meunier, V. Kreinovich, A. Lokshin, H. T. Nguyen // Fuzzy Sets and Systems. — 1996. — Vol. 81, №. 1. — P. 5—29.

5. *Chen S. J.* Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications / S. J. Chen, C. L. Hwang. — N.Y. : Springer-Verlag, 1992.

6. *Klir G.* Fuzzy sets and fuzzy logic : theory and applications / G. Klir, B. Yuan. — NJ : Prentice Hall : Upper Saddle River, 1995.

7. *Kreinovich V.* What non-linearity to choose? Mathematical foundations of fuzzy control / V. Kreinovich, C. Quintana, R. Lea, O. Fuentes, A. Lokshin, S. Kumar, I. Boricheva, L. Reznik // Proceedings of the 1992 International Con-ference on Fuzzy Systems and Intelligent Control. — KY : Louisville, 1992. — P. 349—412.

8. *Mamdani E. H.* Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems / E. H. Mamdani // IEEE Transactions on Computing. — 1977. — Vol. 26. — P. 1182—1191.

9. *Nguyen H. T.* Multi-criteria optimization : An important foundation of fuzzy system design / Hung T. Nguyen, V. Kreinovich // Fuzzy Systems Design. — 1998. — Vol. 59. — P. 24—35.

10. *Ruan P.* Fuzzy implication operators and generalized fuzzy method of cases / P. Ruan, E. E. Kerre // Fuzzy Sets and Systems. — 1993. — Vol. 54. — P. 23—37.

11. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets / L.A. Zadeh // Information and Control. — 1965. — V. 8. — P. 338—353. —.

12. *Zimmermann H. J.* Fuzzy set theory and its applications / H. J. Zimmermann. — Boston : Kluwer, 1991.

Статья принята к опубликованию
25 октября 2007 г.