

# МОДЕЛИРОВАНИЕ АППЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. Г. Попов, А. А. Сирота

Воронежский государственный университет

Предложена модель аппликативных помех на изображениях в виде пуассоновского потока пятен с регулируемыми параметрами периодичности, размеров и конфигурации формируемых локальных областей закрытия. Приводится методика для расчета вида корреляционной функции аппликативной помехи. Показано соответствие этой оценки с оценкой корреляционной функции, полученной методом имитационного статистического моделирования.

## ВВЕДЕНИЕ

Апликативные помехи на изображениях связаны с ситуацией появления различного рода неоднородностей, локальных областей аномальных значений, областей закрытия и пораженных участков. Таким образом, в отличие от аддитивного, аппликативный шум характеризуется воздействием лишь в отдельных случайных пикселях и окружающих их областях исходного изображения и приводит к «замещению» его элементов неинформативными фрагментами другой природы. Такие помехи характерны как для цифровых так и для аналоговых систем обработки изображений, при этом физическая природа их возникновения имеет самый разнообразный характер. При проведении синтеза оптимальных алгоритмов обработки изображений в данном случае используют специальные модели, которые в литературе известны как модели с  $\varepsilon$ -загрязнением [1]. В этой модели расположение точек, пораженных аппликативной помехой, определяются значениями реализации случайного бинарного поля (есть помеха – нет помехи), а значения интенсивности (яркости) определяются реализацией случайного поля с существенно отличающимися от основного изображения характеристиками. Таким образом, наблюдаемое на двумерной дискретной сетке случайное поле имеет вид

$$f(x, y) = \eta(x, y)[s(x, y) + v(x, y)] + [1 - \eta(x, y)][w(x, y) + v(x, y)],$$

$$x = \overline{1, p}, y = \overline{1, q},$$

где  $s(x, y)$  — исходное случайное поле;  $\eta(x, y)$  — бинарное случайное поле, определяющее расположение локальных областей закрытия с любыми параметрами периодичности, площади и формы

© Попов В. Г., Сирота А. А., 2007

( $\eta(x, y) \in \{0, 1\}$ ,  $x = \overline{1, p}$ ,  $y = \overline{1, q}$ );  $v(x, y)$  — случайное поле аддитивного шума ( $E\{v(x, y)\} = 0$ ,  $E\{v(x, y)v(x', y')\} = R_v(x - x', y - y')$ );  $w(x, y)$  — случайное поле, характеризующее значение яркостных характеристик элементов областей закрытия (апликативной помехи). Считается, что все элементы случайного поля  $w(x, y)$  имеют одинаковый закон распределения и статистически независимы между собой ( $E\{w(x, y)\} = M_w$ ,  $E\{w(x, y)w(x', y')\} = \delta_{(x, y)(x', y')}D_w$ , где  $\delta_{(x, y)(x', y')}$  — символ Кронекера).

В задачах фильтрации изображений, пораженных аппликативными помехами, с помощью статистических или нейросетевых алгоритмов предполагается задание их моделей [2] и соответствующих параметров. При этом желательно использовать такие модели, которые позволили бы путем несложной перестройки их параметров изменять периодичность расположения, размеры и конфигурацию формируемых локальных областей закрытия (пораженных участков) исходного изображения, и соответствующим образом проводить согласование этих параметров с параметрами реально действующих помех.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АППЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ

С учетом этих требований предлагается обобщенная модель аппликативной помехи в виде потока пятен — областей закрытия, имеющих случайную площадь, подчиняющуюся заданному закону распределения, и случайную конфигурацию расположения связанных заданной топологией элементов изображения. Частота появления пятен определяется заданной интенсивностью потока. Процесс появления областей будем описывать пуассоновским потоком *порождающих точек* — условных центров локаль-

ных закрывающих образований с заданной интенсивностью  $\Lambda$ . В соответствии с этим количество таких точек в общей двумерной области определения изображения площадью  $V$  подчиняется распределению

$$P(N) = \frac{(\Lambda V)^N}{N!} e^{-\Lambda V}, \quad V = (p\Delta x) \times (q\Delta y),$$

где  $\Delta x, \Delta y$  — дискреты задания координатной сетки наблюдаемого цифрового изображения;  $p, q$  — число отсчетов по осям  $OX$  и  $OY$  соответственно. При этом вероятность появления порождающей точки в элементе изображения с учетом свойства ординарности потока определяется выражением [3]

$$P_\Lambda \cong \Lambda \Delta x \Delta y + O(\Delta x \Delta y), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{O(\Delta x \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = 0.$$

Для каждой порождающей точки введем случайную целочисленную величину  $n$ , значения которой определяют площади локальных областей закрытия, образующихся в окрестности порождающих точек. В принципе, для определения  $n$  может использоваться любой закон распределения. Далее для описания статистики величины  $n$  предлагается использовать пуассоновский закон распределения с заданной интенсивностью  $\lambda$ . При этом с учетом обязательного присутствия порождающей точки,

$$P(n) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}, \quad n \geq 1,$$

$$E[n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda + 1 = \frac{S_m}{\Delta x \Delta y},$$

где  $S_m$  — имеет смысл средней площади локальных образований. С учетом этого результирующий процесс образования аппликативной помехи может рассматриваться как маркированный, или сложный пуассоновский процесс [3], где с каждой точкой простого потока связана случайная величина, определяющая площадь локальной области закрытия.

Конфигурацию областей закрытия можно задавать как детерминированным, так и случайным образом. В последнем случае при заданном значении  $n$  предлагается реализовать два способа окружения порождающей точки.

При первом способе реализуется алгоритм, в соответствии с которым случайным образом выбирается один из окружающих порождающую точку единичный элемент (рис. 1а). В результате образуется пятно, состоящее из двух

связанных в случайной конфигурации точек. На следующем шаге также случайным образом выбирается точка из окружения уже двух ранее отобранных точек (рис. 1б). Процедура «окружения» и случайного выбора продолжается до тех пор, пока не будут заполнены все  $n$  точек данной области закрытия. Можно показать, что подобный алгоритм реализует формирование изотропных в статистическом смысле локальных областей закрытия с заданным распределением площади.

В соответствии со вторым способом топология расположения наращиваемых точек определяется заранее заданной маской. При этом, наоборот, сначала случайным образом выбирается точка, которая будет наращиваться, потом определяются координаты местоположения точек ее границы, попадающих в заданную топологию наращивания. Далее случайным образом выбирается одна из этих граничных точек, и уже относительно нее определяются координаты новых граничных точек, попадающих в заданную маску. Процедура продолжается, пока не будут получены все  $n$  точек данного аппликативного пятна. На рис. 1в, г приведена иллюстрация такого процесса при использовании маски с диагональными элементами (наращивание порождающей точки может производиться только в диагональных направлениях), а на рис. 1д, е — с топологией наращивания «вверх и направо».

Таким образом, разница двух алгоритмов состоит в реализуемом порядке выбора новой точки пятна: либо из числа «новых» граничных точек, окружающих полученное на предыдущем шаге образование, как в первом алгоритме; либо из числа точек маски с заданной топологией наращивания, расположенной относительно «старой» случайно выбранной граничной точки ранее полученного образования, как во втором алгоритме.

Отметим, что для решения задачи требуется определить вид корреляционной функции аппликативной помехи  $R_\eta(x', y', x'', y'')$ . Ее оценка может быть сделана двумя методами: путем численного расчета на основе представления процесса пошагового формирования точек в виде марковской цепи смены состояний и методом имитационного статистического моделирования.

Запишем функцию пространственной корреляции помехи в виде

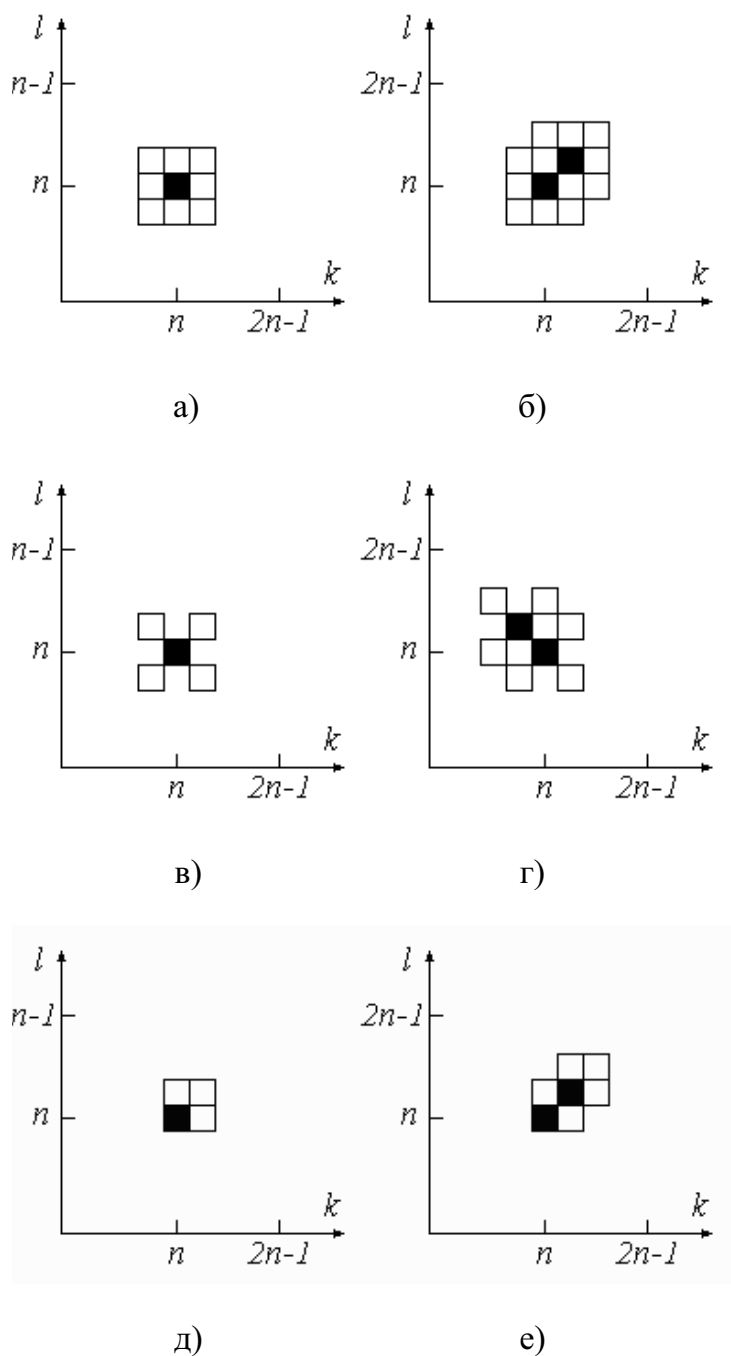


Рис. 1. Способы формирования пятна аппликативной помехи

$$R_{\eta}(i, j, k, l) = E \{ \eta(i, j) \eta(k, l) \} - E \{ \eta(i, j) \} E \{ \eta(k, l) \}. \quad (1)$$

Предположим, что случайное поле  $\eta(x, y)$  — однородно и вероятность взаимного наложения пятен близка нулю, тогда если точки принадлежат разным пятнам  $\pi_*$ ,  $\pi_{**}$ , то  $R_{\eta}(i, j, k, l) = 0$ ,  $(i, j) \in \pi_*$ ,  $(k, l) \in \pi_{**}$ . При достаточно малых  $\Lambda$  и  $\lambda$  влиянием взаимного пере-

сечения областей в рассматриваемой статистической модели можно пренебречь. Тогда нетрудно видеть, что для однородного поля при выполнении последнего допущения

$$E \{ \eta(i, j) \} \cong \Lambda S_m.$$

Далее вычислим ковариационную функцию для точек, находящихся в пределах одного пятна  $(i, j) \in \pi_*$ ,  $(k, l) \in \pi_*$ .

$$\begin{aligned}
 K(i, j; k, l) &= E \{ \eta(i, j) \eta(k, l) \} = \\
 &= K(i - k, j - l) = K(i_0 - k, j_0 - l) =, \\
 &= E \{ \eta(i_0, j_0) \eta(k, l) \}
 \end{aligned}$$

где  $(i_0, j_0)$  — координаты начальной точки при формировании пятна. При фиксированной площади  $S = n$  пятно располагается в пределах квадрата  $\Omega_n$  со значениями номеров пикселей  $1 \leq k \leq 2n - 1, 1 \leq l \leq 2n - 1$ , при этом  $i_0 = n, j_0 = n$ . С учетом этого получим ковариационную функцию пятна

$$\begin{aligned}
 K_n(i_0 - k, j_0 - l) &= \\
 &= E \{ \eta(i_0, j_0) = 1 \} E \{ \eta(k, l) = 1 \mid \eta(i_0, j_0) = 1, S = n \}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Оценим функцию условного математического ожидания в (2). Ее можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 E \{ \eta(k, l) = 1 \mid \eta(i_0, j_0) = 1; S = n \} &= \\
 &= \sum_{\omega_n} P(\chi_n) A(\chi_n) \quad , \quad (3)
 \end{aligned}$$

где  $\omega_n = \{ \chi_n \}$  — множество возможных конфигураций  $\chi_n$  формы пятна в кадре  $\Omega_n$  с центром в точке  $(i_0, j_0)$ ;  $P(\chi_n)$  — вероятность каждой отдельной конфигурации;  $A(\chi_n)$  — матрица размера  $(2n - 1) \times (2n - 1)$ , элементами которой являются нули и единицы, которые располагаются в соответствии с данной конфигурацией формы пятна:

$$A(\chi_n) = \begin{pmatrix} \eta(1, 1) & \dots & \eta(1, 2n - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(2n - 1, 1) & \dots & \eta(2n - 1, 2n - 1) \end{pmatrix}.$$

Процесс формирования пятна в соответствии с любым из рассмотренных алгоритмов можно представить как процесс изменения состояний марковской цепи с растущим на каждом шаге числом состояний. Начальное состояние соответствует образованию начальной точки  $\omega_1 = \{ \chi_1 \}$ , где  $\chi_1$  — соответствует матрице  $A(\chi_1)$  со всеми  $\eta(k, l) = 0$ , кроме  $\eta(i_0, j_0) = 1$ . При этом  $P(\chi_1) = 1$ . Формирование пятна на каждом шаге сводится к присоединению одного единичного элемента к ранее полученной конфигурации (рис. 1), т.е.

$$A(\chi_n) = A(\chi_{n-1}) + B(\eta_{\chi_n}),$$

$$B(\eta_{\chi_n}) = \| b_{re} \|, \quad b_{re} = \begin{cases} 1, & r = k_n, e = l_n, \\ 0, & r = k_n, e = l_n, \end{cases}$$

где  $(k_n, l_n)$  — координаты пиксела в кадре, добавляемые при формировании комбинации  $\chi_n$  из  $\chi_{n-1}$ . Отсюда можно записать следующие

рекуррентные соотношения для вероятностей в (3):

$$P(\chi_n) = P(\chi_{n-1}) P(\eta_{\chi_n}),$$

где  $P(\eta_{\chi_n})$  — вероятность присоединения элемента в данной точке.

Соответственно, для первого алгоритма формирования пятен можно записать

$$P(\eta_{\chi_n}) = \frac{n(\chi_n)}{N_{\chi_{n-1}}}, \quad \chi_{n-1} \in \omega_{n-1}, \quad 1 \leq n(\chi_n) \leq 8,$$

где  $N_{\chi_{n-1}}$  — количество граничных точек пятна в конфигурации  $\chi_{n-1}$ ;  $n(\chi_n)$  — количество вариантов заполнения данного пиксела из всех возможных точек.

Для второго алгоритма формирования пятен выполняется

$$P(\eta_{\chi_n}) = \frac{1}{N_{\chi_n}}, \quad \chi_n \in \omega_n,$$

где  $N_{\chi_n}$  — количество допустимых присоединяемых точек в комбинации  $\chi_n$ .

В результате расчетное соотношение искомой функции (3) для обоих алгоритмов получим в виде

$$\begin{aligned}
 E \{ \eta(k, l) = 1 \mid \eta(i_0, j_0) = 1; S = n \} &= \\
 &= \sum_{\{ \chi_n, \eta_{\chi_n} \}} P(\chi_{n-1}) P(\eta_{\chi_n}) [A(\chi_{n-1}) + B(\eta_{\chi_n})] = \\
 &= \sum_{\{ \chi_{n-1} \}} P(\chi_{n-1}) A(\chi_{n-1}) + \\
 &+ \sum_{\{ \chi_{n-1} \}} P(\chi_{n-1}) \sum_{\{ \eta_{\chi_n} \}} P(\eta_{\chi_n}) B(\eta_{\chi_n}) \quad . \quad (4)
 \end{aligned}$$

Отсюда окончательное выражение для функции пространственной корреляции (1) получим в виде

$$R_\eta(i, j, k, l) = \Lambda S_m \sum_{n=1}^{\infty} P(n) K_n(i - k, j - l) - (\Lambda S_m)^2. \quad (5)$$

При статистическом моделировании корреляционных характеристик аппликативной помехи в среде Matlab использовались стандартные соотношения [3]

$$\begin{aligned}
 R_\eta(m, n) &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [\eta_{i,j} - \bar{\eta}] \cdot [\eta_{i-m, j-n} - \bar{\eta}]}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [\eta_{i,j} - \bar{\eta}]^2}, \\
 m &= \overline{0, T_x}, \quad n = \overline{1, T_y}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где  $\eta_{i,j}$  — значения используемого для проведения оценки случайного поля в точках  $(i, j)$ ,  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ ;  $\bar{\eta}$  — выборочное среднее по

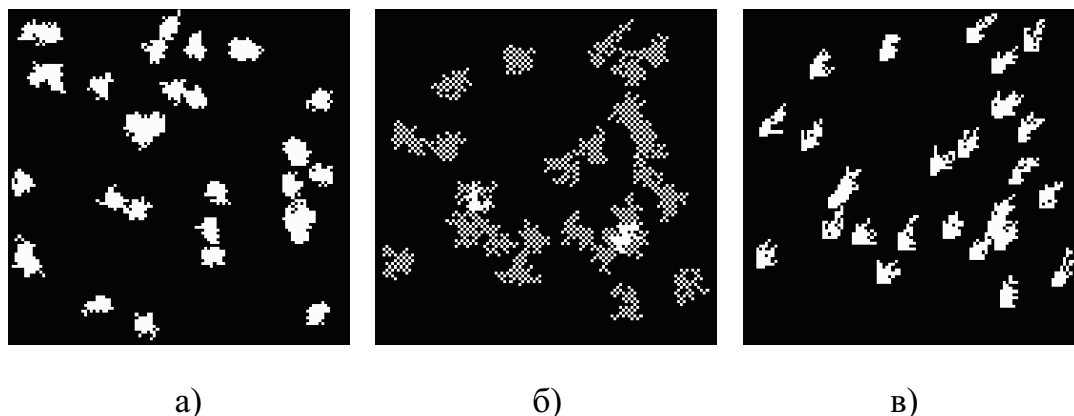


Рис. 2. Пример формирования случайного поля  $\eta(x, y)$

участку размером  $N \times M$  элементов;  $T_x, T_y$  — размеры области в центральной части изображения, для которой вычисляется корреляционная матрица. При моделировании процесса обработки эта задача решалась с помощью стандартной функции *xcorr2*, реализованной в системе Matlab [5].

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, в результате моделирования аппликативной помехи подобным образом появляется возможность получения бинарного случайного поля  $\eta(x, y) \in \{0, 1\}$ ,  $x = 1, p, y = 1, q$ , определяющего расположение локальных областей закрытия с любыми параметрами периодичности, площади и формы. На рис. 2 представлены примеры формирования случайного поля  $\eta(x, y)$  при  $\Lambda = 0,003$ ,  $n = 40$ ,  $\Delta x = \Delta y = 1$ ,  $p = q = 100$ .

На рис. 2а — пятна сформированы при помощи первого алгоритма, а на рис. 2б — при помощи второго алгоритма с маской имеющей топологию наращивания в соответствии с маской рис. 1в, г (диагональная), а на рис. 2в — в соответствии с маской рис. 1д, е (наращивание в направлении «вверх и направо»). Отметим, что наглядности на этом рисунке представлены негативные изображения одной из реализаций  $\eta(x, y)$ , т.е., в реальности, пятнам соответствуют пиксели с яркостью равной 0 (черный цвет).

Трехмерные изображения функции корреляции пятна  $K_n(i_0 - k, j_0 - l)$ , рассчитанные аналитически с использованием предложенной методики (соотношения (1)-(5)) при детерминированной площади локальной области закрытия с  $n = 6$  для значений параметров, аналогичных заданным при получении реализации

$\eta(x, y)$  рис. 2, представлены на рис. 3а, в.

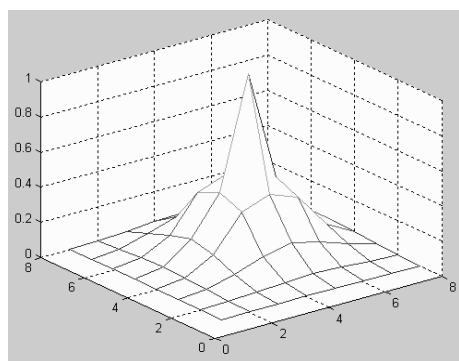
Соответствующие оценки корреляционных функций аппликативной помехи  $R_\eta(i, j, k, l)$ , полученные методом имитационного моделирования на основе соотношения (6), представлены на рис. 3б, г. Верхний ряд рис. 3 соответствует первому способу формирования пятна, средний — второму (использовалась диагональная маска, показанная на рис. 1в, г). Из рисунков видно, что рассчитанный аналитически вид корреляционной функции локальной области закрытия (пятна) совпадает с видом корреляционной функции, полученной по реализациям случайного поля всей аппликативной помехи.

Поверхности корреляционных функций аппликативной помехи при случайном количестве точек с равномерным законом распределения в пятне ( $n_{\max} = 6$ ) представлены на рис. 3д, е. Первому способу формирования локальной области закрытия соответствует рис. 3д, второму — рис. 3е.

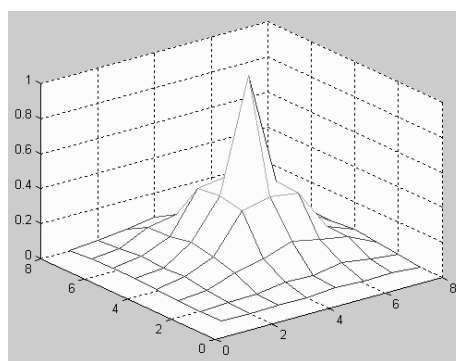
Таким образом, в работе представлена модель аппликативной помехи в виде пуассоновского потока пятен, которая позволяет варьировать периодичность расположения, размеры и форму локальных областей закрытия. Предложена методика расчета и был определен вид корреляционной функции аппликативной помехи  $R_\eta$  для конкретных случаев. Показано соответствие этих результатов этих расчетов с оценками, полученными методом имитационного статистического моделирования.

### ЛИТЕРАТУРА

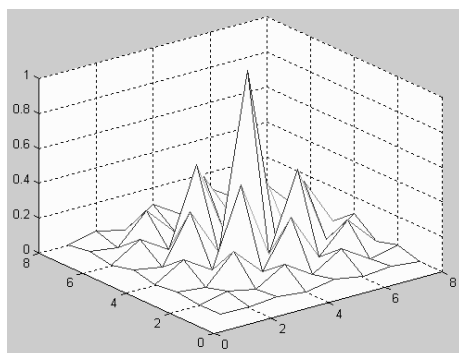
1. Тихонов В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.



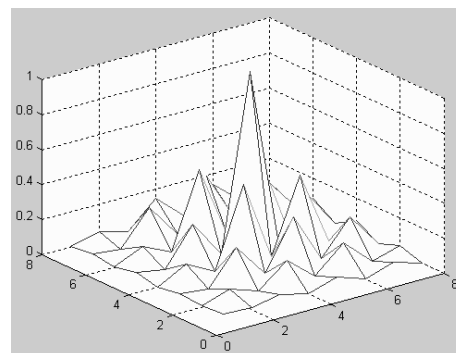
а)



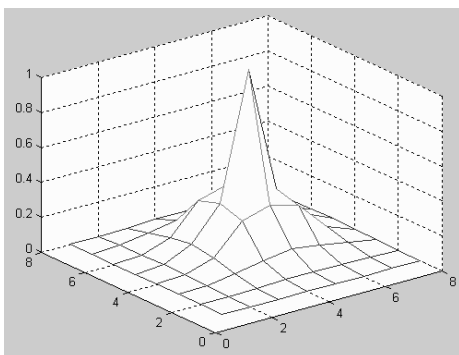
б)



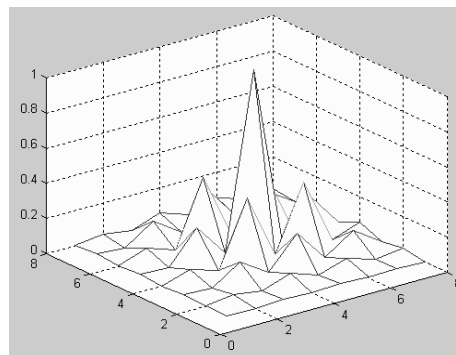
в)



г)



д)



е)

Рис. 3. Вид корреляционных функций пятен и случайного поля  $\eta(x, y)$  в целом

2. Попов В.Г. Алгоритмы восстановления изображений с аппликативными и аддитивными помехами / В.Г. Попов, А.А. Сирота // Мат. VII Международ. науч.-техн. конф. «Кибернетика и высокие технологии XXI века». — Воронеж, 2006.

3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов — М.: Радиосвязь, 1982. — 624с.

4. Претт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х кн. / У. Претт — М.: Мир, 1982.

5. Дьяконов В. Matlab 6: учебный курс / В. Дьяконов — Спб.: Питер, 2001. — 592с.

Статья принята к опубликованию  
25 октября 2007 г.