УДК 62.501

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ

И. Б. Крыжко, Т. Н. Глушакова

Воронежский государственный университет

Рассмотрен подход к проблеме исследования разрешимости обратных траекторных задач в условиях конечной точности измерений и вычислений.

1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе и решении обратных траекторных задач (ОТЗ), т.е. задач, связанных с оцениванием параметров траектории движущихся объектов по измерениям, в силу их сложности аналитическая проверка разрешимости весьма затруднена. В результате появляется достаточно широкий класс задач, к числу которых можно отнести многие задачи инерциальной и спутниковой навигации, для которых не существует общего аналитического доказательства существования и единственности решения. Кроме того, для анализа качества получаемого решения ответ о принципиальной разрешимости задачи необходимо дополнить оценками устойчивости решения в условиях конечной точности измерений, модельных представлений и вычислений.

В настоящей работе описывается методика численного исследования разрешимости ОТЗ, ориентированная на использование современных вычислительных алгоритмов и применимая для достаточно широкого круга задач.

При постановке задач, относящихся к этому классу, объект обычно отождествляют с некоторой принадлежащей ему точкой (как правило, центром масс), имеющей ту же массу и находящейся под действием тех же, что и он, сил. Такое отождествление вполне оправдано, если геометрические размеры объекта незначительны по сравнению с расстояниями, на которые он перемещается.

Учитывая изложенное, модель ОТЗ в достаточно общем виде может быть представлена следующим образом:

$$\begin{gathered} \ddot{R} = -G(R) - 2\omega \times \dot{R} - \omega \times \omega \times R + F, \\ R(t_0) = R_0, \quad \dot{R}(t_0) = \dot{R}_0, \\ \dot{\Omega} = \hat{\omega}\,\Omega, \quad \Omega(t_0) = \Omega_0, \\ J = \Psi(R, \dot{R}, p) + \eta, \end{gathered} \tag{1}$$

где R — вектор положения объекта во вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$ правой ортогональной системе отсчета, ориентация которой относительно некоторой инерциальной системы отсчета определена матрицей направляющих косинусов Ω; $\hat{\omega}$ — кососимметрическая матрица, образованная из компонент вектора ω так, что $\hat{\omega}R = \omega \times R$; $G(R)$ — вектор удельных сил гравитационной природы; F — вектор всех прочих удельных сил; J и η — векторы измерений и их инструментальных погрешностей соответственно; Ψ — измеряемая вектор-функция параметров траектории $(R, \dot{R})$ и совокупности параметров p, характеризующих траекторию или способ измерения.

Целью решения задачи (1) является определение параметров траектории R и $\dot{R}$, а в общем случае и ориентации системы отсчета (т.е. матрицы Ω), в которой рассматривается траектория.

2. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Методологически общим при решении различных ОТЗ является, как правило, их линеаризация около некоторых опорных траекторий, характеризующих априорные представления о конкретных движениях объектов. Это допущение ограничивает область применимости полученных результатов, но позволяет получить, кроме общего ответа о разрешимости задачи, оценки качества решений на заданном (исследуемом) множестве траекторий.

В результате линеаризации задача (1) приводится к следующей достаточно общей форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bq, & x(t_1) &= x_1, \\ z &= Hx + r, & t &\in [t_1, t_F], \end{aligned} \tag{2}$$

где вектор x — малое возмущение относительно опорной (модельной) траектории; z — соответствующий ему вектор невязок измерений;

q — вектор параметров, не учитываемых при моделировании траектории; r — вектор инструментальных погрешностей измерений; A, B, H — матричные коэффициенты, вид которых определяется конкретной ОТЗ.

Аналитическая проверка известных условий наблюдаемости пары (A, H) обычно бывает затруднена в силу большой размерности и сложности структуры матрицы наблюдаемости и ее зависимости от времени, как это, например, имеет место при определении орбит космических аппаратов и для задач инерциальной навигации.

Кроме того, следует отметить, что сам по себе факт подтверждения принципиальной разрешимости задачи на некотором классе траекторий имеет конструктивное значение только вместе с такими характеристиками, которые позволяют оценивать реализуемость решения на вычислительных средствах ограниченной точности и при наличии погрешностей измерений.

Для реализации алгоритма численного исследования ОТЗ представим исходную обобщенную модель задачи (2) в виде:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{\Phi}}(t,t_s) = A\mathbf{\Phi}(t,t_s), \quad \mathbf{\Phi}(t_s,t_s) = I,\\ z(t_i) = H(t_i)\mathbf{\Phi}(t_i,t_s)x_s + \\ +H(t_s)\int_{t_s}^{t_i}\mathbf{\Phi}(t_i,\tau)B(\tau)q(\tau)d\tau + r(t_i),\end{gathered} \tag{3}$$

где I — единичная матрица, t_i $(i = \overline{1,n})$ — времена измерений, $x_s = x(t_s)$, t_s — произвольный момент времени.

Введем систему обозначений:

$$\tilde{q}_i = \int_{ts}^{t_i}\mathbf{\Phi}(t_i,\tau)B(\tau)q(\tau)d\tau,\ \tilde{q} = (\tilde{q}_1^\top, \tilde{q}_2^\top, \ldots, \tilde{q}_n^\top)^\top;$$

$$H_i = H(t_i);\ \mathbf{\Phi}_i = \mathbf{\Phi}(t_i,t_1);$$

$$\tilde{H} = (\mathbf{\Phi}_1^\top H_1^\top \vdots \mathbf{\Phi}_2^\top H_2^\top \vdots \ldots \vdots \mathbf{\Phi}_n^\top H_n^\top)^\top;$$

$$C = \begin{bmatrix} H_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_n \end{bmatrix};\quad \begin{gathered}\tilde{r} = (r^\top(t_1), \ldots, r^\top(t_n))^\top;\\ Z = (z^\top(t_1), \ldots, z^\top(t_n))^\top.\end{gathered}$$

Тогда

$$Z = \tilde{H}x_s + C\tilde{q} + \tilde{r}. \tag{4}$$

Система (4) является системой линейных алгебраических уравнений с неизвестным вектором $x_s = x(t_s)$. Полагая, что число измерений не меньше числа неизвестных, мы можем получить ее решение, например, по методу наименьших квадратов:

$$\hat{x}_s = \left[\tilde{H}^\top W^{-1}\tilde{H}\right]^{-1}\tilde{H}^\top W^{-1}Z,$$

где $W = M\left[(C\tilde{q}+\tilde{r}),(C\tilde{q}+\tilde{r})^T\right]$, $M[\cdot]$ — символ операции математического ожидания.

В частном случае, когда процесс $r(t)$ являются чисто случайным с нулевым средним и матрицей интенсивностей $R(t)$, а погрешности в модели (2) отсутствуют ($q \equiv 0$), матрица W является блочно-диагональной и имеет вид:

$$W = \begin{bmatrix} R(t_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R(t_n) \end{bmatrix}.$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Предложенная модельная интерпретация задачи в виде (4) позволяет достаточно просто получать численные оценки ее разрешимости путем сингулярного анализа матрицы $\tilde{H}_p = W^{-1/2}\tilde{H}$ и определения числа обусловленности $\mu(\tilde{H}_P)$. Значения последнего оказывают непосредственное влияние и на качество решения ОТЗ.

Действительно, как показано в [1, 2] невырожденность матрицы $\tilde{H}_P$ и, как следствие, разрешимость задачи (4) гарантируется выполнением равенства $\mu(\tilde{H}_P) < \mu^*$, где μ^* — константа, зависящая от размерности задачи и относительной точности представления чисел в ЭВМ.

Возмущение решения задачи, обусловленное погрешностями измерений, можно оценить как ([1])

$$\left\|\Delta x^{(1)}\right\| \le \mu(\tilde{H})\frac{\|C\tilde{q}+\tilde{r}\|}{\|Z\|}\|x\|. \tag{5}$$

Для ряда численных алгоритмов линейной алгебры [1, 2] можно показать, что погрешность решения задачи, обусловленная конечной точностью представлений чисел в ЭВМ, ограничена и оценивается как

$$\left\|\Delta x^{(2)}\right\| \le \varepsilon\|x\|, \tag{6}$$

где ε — константа, зависящая от используемого алгоритма, числа обусловленности $\mu(\tilde{H}_p)$, размерности матрицы $\tilde{H}_p$, относительной точности представления чисел в ЭВМ.

В работе [2] проведен полный анализ вычислительных погрешностей для алгоритма решения систем линейных уравнений и вычисления числа обусловленности с использованием ортогональных преобразований отражения

Хаусхолдера, при этом получены следующие значения μ^* и ε:

$$\mu^* = \frac{1}{(K+11)\varepsilon_1},$$

$$\varepsilon = \frac{(K+8n+58)\varepsilon_1\mu(\tilde{H})}{1-(K+4n+30)\varepsilon_1\mu(\tilde{H})},$$

где $K = \sqrt{m}(2m-3)(4n+27)$, $m = \dim x$, ε_1 — относительная точность представления чисел в ЭВМ (например, при использовании удвоенной точности при работе на персональном компьютере $\varepsilon_1 \approx 2,2\times 10^{-16}$). Для данного алгоритма гарантирующее свойство оценки (5) выполняется, очевидно, при условии, что $\mu(\tilde{H}) < 1/(K+4n+30)\varepsilon_1$.

Следует отметить, что оценки (5) и (6) характеризуют не только задачу, но и способ ее решения, в частности, выбор системы переменных для описания траектории и измерений. Улучшить обусловленность задачи можно, например, с помощью процедуры масштабирования переменных, перейдя от системы (4) к системе

$$Z = \tilde{H}_L y_s + C\tilde{q} + \tilde{r},$$

где $H_L = HD^{-1}$, $y_s = Dx_s$, $D = \mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$ — диагональная матрица.

Такая процедура масштабирования переменных в некоторых случаях позволяет значительно улучшить обусловленность задачи в смысле оценок (5) и (6), значения d_i можно выбирать равными нормам соответствующих столбцов матрицы $\tilde{H}_p$.

Проведенное исследование можно дополнить анализом сингулярных чисел матрицы $\mu(\tilde{H}_p)$, что позволяет изучить устойчивость решения задачи по отношению к различным компонентам ошибок измерений. Как число обусловленности, так и сингулярные числа матрицы являются устойчивыми характеристиками по отношению к возмущениям, что позволяет использовать их в численном анализе.

Элементы представленного подхода использовались при исследовании ряда задач, связанных с определением орбит искусственных спутников Земли по наземным измерениям [3, 4], а также при исследовании двухкомпонентной инерциальной навигационной системы (ИНС) с горизонтируемой платформой [5]. В последнем случае, в частности, доказана разрешимость задачи коррекции ИНС при информации о скорости движения объекта для достаточно широкого класса реально осуществимых траекторий.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные положения изложенного здесь подхода к исследованию разрешимости решению ОТЗ:

• выделение опорного решения и линеаризация исходной задачи — приведение ее к задаче "в малом";

• выбор вида конечномерного оператора, представляющего линейную модель;

• сингулярный анализ выбранного конечномерного оператора и, если такой анализ выполнен численно, проверка достоверности его результатов в условиях конечной точности вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры / С. К. Годунов. — Новосибирск: Научная книга, 1997. — 390+xxvi с.

2. *Малышев А.Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру (с приложением алгоритмов на ФОРТРАНе) / А. Н. Малышев. — Новосибирск: Наука, 1991. — 228 с.

3. *Девятисильный А.С.* Исследование обусловленности задачи численного определения квазистационарной орбиты ИСЗ по наземным изметениям / А. С. Девятисильный, И. Б. Крыжко //Космические исследования. — 1997. — Т. 35, № 1. — С. 99—101.

4. *Крыжко И.Б.* К задаче определения квазистационарной орбиты ИСЗ по наземным измерениям / И. Б. Крыжко // Космические исследования. — 1999. — Т. 37, № 1. — С. 110—112.

5. *Девятисильный А.С.* Исследование устойчивости задачи коррекции инерциальной навигационной системы на неподвижном основании / А. С. Девятисильный, И. Б. Крыжко //Изв. АН. Теория и системы управления. — 2000. — № 3. — С. 125—130.

Статья принята к опубликованию 25 декабря 2006 г.