УДК 519.872

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СМО С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ

В. В. Катрахов, Д. Е. Рыжков, Н. И. Головко

Тихоокеанский государственный экономический университет

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализу распределения числа заявок в марковских нестационарных систем массового обслуживания (СМО) посвящено достаточно много работ [1—10] и др. Впервые нестационарное распределение числа заявок в марковской нестационарной СМО $M/M/1$ с постоянными интенсивностями входного потока λ и обслуживания μ было получено в работе Кларка [1]. В настоящей работе рассматривается асимптотический анализ нестационарного распределения числа заявок СМО с бесконечным накопителем, простейшим пуассоновским потоком заявок и экспоненциальным обслуживанием. С применением функционально-аналитического метода исследуется стабилизация динамических распределений и их дискретных функций распределения (ДФР) к финальным. Получены неулучшаемые оценки сходимости нестационарного решения к стационарному.

2. ПЕРВАЯ МОДЕЛЬ СМО $M/M/1/\infty$

Рассмотрим классическую СМО $M/M/1/\infty$ с одним обслуживающим прибором с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ, накопителем бесконечной ёмкости. На вход системы поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Если прибор занят обслуживанием заявки, то вновь поступившая заявка попадает сначала в накопитель, а уже потом обслуживается. Обозначим через вектор $p(t)=[p_0(t),p_1(t),p_2(t),...]^\top$ нестационарного распределения вероятностей числа заявок в СМО. Здесь и далее значок $^\top$ обозначает транспонирование.

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Обозначим через A трехдиагональную матрицу, у которой элемент в 1-й строчке и 1-м столбце равен $-\lambda$, остальные диагональные элементы равны $-\lambda-\mu$, поддиагональные элементы равны λ, наддиагональные элементы равны μ, остальные элементы равны 0. Задачу Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Колмогорова-Чепмена относительно распределения вероятностей числа заявок

$$\frac{dp(t)}{dt}=Ap(t),\ \ p(0)=p^0, \qquad (1)$$

с начальным распределение вероятностей количества заявок в системе $p^\circ=[p_\circ^0,p_1^\circ,p_2^\circ,...]^\top$, бесконечной трехдиагональной матрицей A назовем первой математической моделью СМО $M/M/1/\infty$. Для начального распределения предполагается ещё выполнение условия нормировки $\sum_{k=0}^{\infty}p_k^0=1$.

Используем далее банахово пространство $\tilde{\ell}_1$ суммируемых последовательностей $p=[p_0,p_1,p_2,...]^\top$ с нормой $\|p\|_{\tilde{\ell}_1}=\sum_{k=0}^{\infty}|p_k|$ и линейный непрерывный на нем функционал $\varphi(p)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k$. Отметим, что пространство $\tilde{\ell}_1$ отличается от пространства ℓ_1 лишь нумерацией координат векторов: в ℓ_1 нумерация начинается с единицы. Таким образом математическая модель нашей СМО состоит из задачи Коши (1), рассматриваемой в банаховом пространстве $\tilde{\ell}_1$ с линейным ограниченным в этом пространстве матричным оператором A с нормой $\|A\|_{\tilde{\ell}_1\mapsto\tilde{\ell}_1}=\lambda+\mu$, а также из условий

$$0\le p^0\le 1\ (\forall k\ 0\le p_k^0\le 1),\ \ \varphi(p^0)=1,$$

на начальное распределение.

2.2. ОБЩЕЕ СВОЙСТВО МОДЕЛИ

Из общей теории банаховых пространств следует

Теорема 1. *Задача Коши* (1) *имеет единственное решение* $p(t)=e^{tA}p^\circ$, *при этом для любого* $t>0$ *набор из* $p_k(t)$ *суть распределение вероятностей, то есть* $0\le p_k(t)\le 1,\ \forall k\ge 0$, *и выполняется условие нормировки*

$$\varphi(p(t))=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)=1.$$

3. ВТОРАЯ МОДЕЛЬ СМО $M/M/1/\infty$

Предыдущая модель оперирует непосредственно с распределениями вероятностей, но оказывается, что гораздо удобнее работать с их дискретными функциями распределений (определение дискретной функции распределения будет дано чуть ниже) — в этом состоит одна из главных идей нашего подхода к изучению СМО. Для этих целей введем верхнетреугольный матричный оператор S, в матрице которого на главной диагонали и выше стоят единицы, остальные элементы нулевые, и обратный к нему двухдиагональный матричный оператор S^{-1}, у которого единицы стоят на главной диагонали, -1 на первой наддиагонали, остальные элементы нулевые.

Введем пространство $\tilde{\ell}^0$ сходящихся к нулю последовательностей с конечной нормой

$$\left\|[q_\circ, q_1, q_2, \ldots]^\top\right\|_{\tilde{\ell}^0} = \sum_{k=0}^{\infty} |q_k - q_{k+1}|.$$

Оно отличается от пространства ℓ^0 лишь нумерацией компонент векторов: в ℓ^0 нумерация начинается с единицы. Ясно, что оператор S биективно и изометрично отображает банахово пространство ℓ_1 на пространство $\tilde{\ell}^0$, поэтому последнее также банахово. Оператор S^{-1} осуществляет обратную изометрию. Заметим попутно, что пространство $\tilde{\ell}^0$ непрерывно вложено в банахово пространство ℓ_∞^0 сходящихся к нулю последовательностей с нормой максимума. Введем вектор $\tilde{q} = [q_0, q]^\top = [q_0, q_1, q_2, \ldots]^\top = Sp.$

С учетом веденных обозначений задача Коши (1) преобразуется эквивалентным образом к виду

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = SAS^{-1}\tilde{q} \equiv \tilde{Q}\tilde{q}, \quad \tilde{q}(0) \equiv Sp^0. \tag{2}$$

Обозначим через $\xi(t)$ — число заявок в СМО в момент t. Последовательность компонент вектора $\tilde{q}$ по сути представляет собой последовательность значений функции распределения дискретной случайной величины (точнее процесса) $\xi(t)$ в момент времени t: $\tilde{q}_k(t) = P\{\xi(t) \geq k\}$. Поэтому для краткости последовательность $\tilde{q}$ будет называться дискретной функцией распределения (ДФР), а ту же последовательность, но без первого левого элемента $q_0(t) = 1$, то есть последовательность $q(t)$ — усеченной ДФР.

Обозначим $w = (1, 0, 0, \ldots)^\top$, через E — единичную матрицу, через E_{-1}, E_{+1} однодиагональные матричные операторы сдвига: у первого из них единицы стоят на первой наддиагонали, у второго — на первой поддиагонали, а остальные элементы нулевые. Введем матричный оператор

$$Q = -(\lambda + \mu)E + \mu E_{-1} + \lambda E_{+1}.$$

Первая строка матричного оператора $\tilde{Q}$ состоит из нулевых элементов, поэтому задача Коши (1) распадается (это вторая основная идея нашего метода) на задачу Коши

$$\frac{dq_0}{dt} = 0, \, q_0(0) = \varphi(p^0) = 1,$$

имеющую единственное решение $q_0(t) \equiv 1$, и задачу:

$$\frac{dq}{dt} = Qq + \lambda w, \, q(0) = q^0, \tag{3}$$

где координаты начального вектора $q(0)$ определяются формулой

$$q_k^0 = \sum_{j=k}^{\infty} p_k^0, \geq 1.$$

Задачу Коши (2) по построению следует рассматривать в пространстве ℓ^0. Вместе с тем нам понадобится еще пространство $\mathbb{L}_{\infty,\circ}$ определяемое как банахово пространство сходящихся к нулю последовательностей $r = [r_k]$, $r_k \to 0$, с нормой $\|r\| = \max\limits_{k=1,2,\ldots}\{|r_k|\}$ и банахово пространство $\mathbb{L}_\infty$ ограниченных последовательностей с нормой $\|r\| = \sup\limits_{k=1,2,\ldots}\{|r_k|\}$. Положим во всем дальнейшем $\rho = \sqrt{\dfrac{\mu}{\lambda}}.$

Из общей теории банаховых пространств вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. *Матричный оператор Q ограничен в пространствах ℓ^0, $\mathbb{L}_{\infty,\circ}$, $\mathbb{L}_\infty$.*

Теорема 2.

1°. *Задача* (3) *во всех трёх пространствах ℓ^0, $\mathbb{L}_{\infty,\circ}$, $\mathbb{L}_\infty$ имеет единственное решение*

$$q(t) = e^{tQ}q^\circ + \lambda\int_0^t e^{\tau Q} w \, d\tau. \tag{4}$$

2°. *Это решение можно представить также в виде*

$$q(t) = e^{tQ}q^\circ - e^{tQ}q^\infty + q^\infty, \tag{5}$$

где вектор $q^\infty = [q_1^\infty, q_2^\infty, \ldots]^\top$ и

$$q_k^\infty = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \mu, \\ \rho^{-2k}, & \lambda < \mu. \end{cases} \tag{6}$$

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть $\lambda < \mu$ и пусть вектор p^∞ имеет координаты $p_k^\infty = \rho^{-2k-2}(\rho^2 - 1)$. Тогда при начальном распределении $p^\circ = p^\infty$ динамическое распределение совпадает с начальным для любых t.*

З а м е ч а н и е. Ниже показывается, что в соответствующем смысле

$$q^{\infty} = q(\infty) = \lim_{t\to\infty} q(t), \quad p^{\infty} = p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t),$$

то есть q^{∞} является «усеченной» дискретной функцией финального распределения $p(\infty)$.

Введем в пространстве ℓ^0 конус $\mathbb{K}$, состоящий из всех неотрицательных, монотонно невозрастающих и стремящихся к нулю последовательностей. Ясно, что $\mathbb{K}$ лежит и в пространстве $\mathbb{L}_{\infty,\circ}$.

Лемма 2. *Если* $r \in \mathbb{K}$, *то* $\|r\|_{\mathbb{S}} = \|r\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = r_1$.

Так как решение (4) удовлетворяет условию леммы 2, то справедливо

С л е д с т в и е 3.2. *Для любого* $t \ge 0$ *имеет место равенство*

$$\|q(t)\|_{\mathbb{S}} = \|q(t)\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = q_1(t).$$

С л е д с т в и е 3.3. *Для любого* $t \ge 0$ *имеет место равенство*

$$\|e^{tQ}q^{\circ}\|_{\mathbb{S}} = \|e^{tQ}q^{\circ}\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = (e^{tQ}q^{\circ})_1.$$

4. ОПЕРАТОРНЫЕ ЭКСПОНЕНТЫ

Дальнейшее исследование поведения решения $q(t)$ требует знания детальной структуры операторной экспоненты e^{tQ}, изучению которой и посвящен этот раздел. Но предварительно изучается резольвента соответствующего матричного оператора, через которую далее и будет вычислена искомая операторная экспонента.

4.1. СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Обозначим через $R_z, z \in \mathbb{C}$, трехдиагональный матричный оператор, задаваемый трехдиагональной матрицей, у которой диагональные элементы равны $-z$, поддиагональные элементы равны ρ^{-1}, наддиагональные элементы равны ρ, остальные элементы равны 0. Прежде всего отметим, что $e^{tQ} = e^{-(\lambda+\mu)t}e^{\sqrt{\lambda\mu}tR_{\circ}}$, где $Q = -(\lambda+\mu)E + \sqrt{\lambda\mu}R_{\circ}$. Понятно, что $R_{\circ} = \rho^{-1}E_{-1} + \rho E_{+1}$. Оператор R_z^{-1} является резольвентой оператора $R_{\circ}$, которая существует по крайней мере для $|z| > 2\rho^{-1} + \rho$, так как матрица R_z имеет строгое диагональное преобладание. Корректно следующее разложение в ряд Неймана

$$R_z^{-1} = (-zE + R_{\circ})^{-1} =$$
$$= -z\left(E - \frac{1}{z}R_{\circ}\right)^{-1} = -z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}R_{\circ}\right)^n,$$

который сходится в операторной топологии, поскольку $\|R_{\circ}\|_{\mathbb{S}\mapsto\mathbb{S}} \le 2\rho^{-1} + \rho$:

$$\|R_{\circ}q\|_{\mathbb{S}} \le \rho^{-1}(|q_1 - q_2| + |q_3 - q_4| + \ldots) + (\rho^{-1} + \rho)\|q\|_{\mathbb{S}} =$$
$$= (2\rho^{-1} + \rho)\,\|q\|_{\mathbb{S}}.$$

Далее нам будет удобным положить $z = 2x$ и пусть $s = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Введем матричный оператор $R_z^{-1} = [r_{kj}]$, определив его матричные элементы по формуле

$$r_{kj} = r_{kj}(x) = \frac{\rho^{j-k}\left(s^{-(k+j)} - s^{-|k-j|}\right)}{s - s^{-1}} =$$
$$= -\rho^{j-k} \times \begin{cases} s^{-j}U_{k-1}(x), & k \le j, \\ s^{-k}U_{j-1}(x), & k \ge j+1, \end{cases}$$

где через U_l обозначены полиномы Чебышева 2-го рода порядка l [11]:

$$U_l(x) = \frac{s^{l+1} - s^{-(l+1)}}{s - s^{-1}} =$$
$$= \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^{l+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{l+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

или при выборе главной ветви арккосинуса

$$U_l(x) = \frac{\sin((l+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

В дальнейшем будет использоваться следующая лемма, подробное доказательство которой приведено в [12].

Лемма 3. *В пространстве* ℓ^0 *резольвентное множество оператора* $R_{\circ}$ *с резольвентой* R_z^{-1} *в точности совпадает на комплексной плоскости с внешностью эллипса с центром в нуле и с полуосями* a, b, $a = \rho^{-1} + \rho, = |\rho^{-1} - \rho|$, *соответственно, спектр оператора* $R_{\circ}$ *состоит из указанного эллипса и его внутренности.*

4.2. ОПЕРАТОРНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Из применения формулы типа Коши следует

Теорема 3. *Операторная экспонента* $e^{tR_{\circ}}$ *представляет собой матричный оператор с элементами* e_{kj}, *определёнными формулой*

$$e_{kj}(t) = \frac{\rho^{j-k}}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{2\sqrt{\lambda\mu}\,t\cos\varphi}\sin(j\varphi)U_{k-1}(\cos\varphi)\sin(\varphi)d\varphi.$$

Здесь и далее буква e в выражениях вида e_{kj} не является числом Эйлера.

4.3. ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В этом разделе выводятся явные формулы для динамического распределения $p(t)$ и операторной экспоненты $e^{tA}\ \tilde{q}(t)$ при $t \to \infty$, при этом по построению $p(t)$ выражается через ДФР $\tilde{q}(t) = [q_{\circ}(t), q(t)]$ по формуле $p(t) = S^{-1}\tilde{q}(t)$. Базовой для наших целей является формула (5), которую можно представить еще и в виде

$$q(t) = e^{tQ}q^{\circ} - \lambda\int_t^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)\tau}e^{\tau R_{\circ}}w\,d\tau + q^{\infty}.$$

Вычислим теперь $p(t)$, предполагая сначала, что $\lambda \geq \mu$. Начнем с $p_\circ(t)$. По формулам (5), (6), опуская для краткости аргументы бесселевых функций, имеем

$$p_\circ(t) = 1 - q_1(t) =$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^\circ \sum_{n=j+1}^{\infty} \rho^{n-1} (I_{n-1}(2t\sqrt{\lambda\mu}) - I_{n+1}(2t\sqrt{\lambda\mu})). \quad (7)$$

По тем же соображениям для $k > 0$ имеем

$$p_k(t) = q_k(t) - q_{k+1}(t) =$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} p_n^\circ \rho^{-k} \sum\nolimits_{j=n+1}^{\infty} \Big[\rho^{j-1} (I_{j-k-1} - I_{j+k+1}) -$$
$$- \rho^j (I_{j-k} - I_{j+k}) \Big],$$

что после сокращения одинаковых слагаемых с разными знаками и перестройки суммирования дает

$$p_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} p_j^\circ [\rho^{j-k} I_{j-k}(2t\sqrt{\lambda\mu}) +$$
$$+ \rho^{j-k+1} I_{j+k+1}(2t\sqrt{\lambda\mu}) + \quad (8)$$
$$+ (\rho^2 - 1) \sum_{n=j+k+2}^{\infty} \rho^{n-2k-2} I_n(2t\sqrt{\lambda\mu})].$$

Нетрудно заметить, что эта формула совпадает с формулой (7) в случае $k = 0$.

Для вывода аналогичной формулы в случае $\lambda < \mu$ воспользуемся непосредственно следующей из (5) формулой $q(t) - q^\infty = e^{tQ}(q^\circ - q^\infty)$, тогда

$$p_k(t) - p_k^\infty = e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{n=0}^{\infty} (p_n^\circ - p_n^\infty) \rho^{-k} \times$$
$$\times \sum_{j=n+1}^{\infty} \Big[\rho^{j-1} (I_{j-k-1} - I_{j+k+1}) - \rho^j (I_{j-k} - I_{j+k}) \Big], \quad (9)$$

что после перестройки суммирования дает

$$p_k(t) - p_k^\infty =$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} (p_j^\circ - p_j^\infty) [\rho^{j-k} I_{j-k}(2t\sqrt{\lambda\mu}) +$$
$$+ \rho^{j-k+1} I_{j+k+1}(2t\sqrt{\lambda\mu}) - \quad (10)$$
$$- (\rho^2 - 1) \sum_{n=k+2}^{j+k+1} \rho^{n-2k-2} I_n(2t\sqrt{\lambda\mu})],$$

при этом придерживаемся стандартного соглашения: если в символе суммы верхний индекс суммирования меньше нижнего, то вся сумма считается равной нулю.

5. СТАБИЛИЗАЦИЯ И ЭРГОДИЧНОСТЬ

5.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Поведение динамического распределения существенно зависит от взаимоотношения между интенсивностью входного потока и интенсивностью обслуживания. Если в СМО $\lambda \geq \mu$, то есть, если $\rho \leq 1$, то она называется СМО с перегрузками, в противном случае — без перегрузок. Мы последовательно рассмотрим два случая СМО с перегрузками, а затем — СМО без перегрузок.

В СМО с перегрузками распределение, как будет показано, будет стремиться к нулю, но не по норме пространства $\mathbb{L}_1$, так как ранее была установлена справедливость условия нормировки

$$\|p\|_{\mathbb{L}_1} = \sum_{k=0}^{\infty} |p_k(t)| = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1, \ \ \forall t \geq 0.$$

Другими словами вся динамическая траектория распределения в такой СМО расположена на единичной сфере пространства $\mathbb{L}_1$. Однако в более слабых топологиях она все-таки будет сходится к нулю. В качестве таких сходимостей рассмотрим покоординатную сходимость, сходимость по норме пространства $\mathbb{L}_2$, которая определяется по формуле

$$\|p\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |p_k(t)|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (p_k(t))^2},$$

и (равномерную) сходимость по норме пространства $\mathbb{L}_{\infty,\circ}$:

$$\|p\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = \max_{k=0,1,\ldots} |p_k(t)| = \max_{k=0,1,\ldots} p_k(t).$$

Ясно, что для распределений справедливо нижеследующее соотношение между введенными нормами

$$\|p\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} \leq \|p\|_{\mathbb{L}_2} \leq \sqrt{\|p\|_{\mathbb{L}_1}} = 1.$$

Такие же топологии будут полезны и в СМО без перегрузок. Отметим еще, что использование $\mathbb{L}_2$-норм является вполне естественным, поскольку сами функции Бесселя с целыми индексами являются с точностью до постоянного множителя косинус-коэффициентами Фурье, что делает эффективным привлечение средств Фурье-анализа в естественном для него пространстве $\mathbb{L}_2$.

Приведем одно вспомогательное утверждение об асимптотике часто встречающегося ниже интеграла.

Лемма 4. *Пусть функция Φ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1°. *При $\Phi(0) \neq 0$ имеет место асимптотическая формула*

$$\int_{\pi}^{\pi} e^{t\cos\varphi} \Phi(\varphi)\, d\varphi \sim \pi\Phi(0) I_\circ(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}\Phi(0)e^t}{\sqrt{2t}}, \ t \to \infty,$$

2°. *При* $\Phi(0)=0$ *имеет место оценка*

$$\int_{\pi}^{\pi} e^{t\cos\varphi}\Phi(\varphi)\,d\varphi = o\left(\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right),\ t\to\infty.$$

5.2. СТАБИЛИЗАЦИЯ С ПЕРЕГРУЗКАМИ ПРИ $\lambda=\mu$

5.2.1. ОПЕРАТОРНАЯ ЭКСПОНЕНТА e^{tA}

Рассмотрим стабилизацию в СМО с перегрузками в критическом случае $\lambda=\mu$ (или $\rho=1$).

Лемма 5. *Операторная экспонента* e^{tA} *при* $\lambda=\mu$ *имеет элементы вида*

$$\left(e^{tA}\right)_{kj} = e^{-2\lambda t}(I_{k-j}(2\lambda t)+I_{k+1+j}(2\lambda t)),\ k,j=0,1,\dots .$$

Таким образом k-ая координата, $k=0,1,\dots$, вектора $p(t)=e^{tA}p^\circ$ вычисляется по формуле

$$p_k(t) = e^{-2\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}(I_{k-j}(2\lambda t)+I_{k+1+j}(2\lambda t))p_j^\circ. \quad (11)$$

5.2.2. СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть функция χ определена формулой

$$\chi^\circ(\varphi)=\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} p_k^\circ \cos(k+1/2)\varphi,$$

она представляет собой сдвинутую (на 1/2 по k) косинус-характеристическую функцию начального распределения p°. Функция χ° непрерывна, четна и 2π-периодична.

Теорема 4. *Если* $\lambda=\mu>0$, *то*

1°. *Для любого начального распределения* p° *имеет место следующая формула для* $\mathbb{L}_2$*-нормы динамического распределения*

$$\|p(t)\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\frac{2e^{-4\lambda t}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{4\lambda t\cos\varphi}(\chi^\circ(\varphi))^2 d\varphi}. \quad (12)$$

2°. *Для любого начального распределения* p° *имеет место следующая асимптотика* $\mathbb{L}_2$*-нормы динамического распределения*

$$\|p(t)\|_{\mathbb{L}_2} \sim (2\pi\lambda t)^{-1/4},\ t\to\infty. \quad (13)$$

Доказательство.

1°. Формула (11) преобразуется следующим образом:

$$p_k(t) = \frac{2e^{-2\lambda t}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\lambda t\cos\varphi}\cos((k+1/2)\varphi)\chi^\circ(\varphi)d\varphi.$$

Система функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)\right\}$ ортонормирована и полна на отрезке $[0,\pi]$, тогда по равенству Парсеваля

$$\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}\cos((k+1/2)\varphi)f(\varphi)\,d\varphi\right|^2 = \int_0^{\pi}|f(\varphi)|^2\,d\varphi$$

получаем

$$\|p(t)\|_{L_2}^2 = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}|p_k(t)|^2 =$$
$$= \frac{2e^{-4\lambda t}}{\pi}\int_0^{\pi}\left|e^{2\lambda t\cos\varphi}\chi^\circ(\varphi)\right|^2 d\varphi =$$
$$= \frac{2e^{-4\lambda t}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{4\lambda t\cos\varphi}(\chi^\circ(\varphi))^2 d\varphi,$$

что и доказывает формулу (12).

2°. Поскольку функция χ°, а вместе с ней и $(\chi^\circ)^2$, непрерывны и $\chi^\circ(0)=1$, то по лемме 4

$$\sqrt{\frac{2e^{-4\lambda t}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{4\lambda t\cos\varphi}(\chi^\circ(\varphi))^2 d\varphi} \sim (2\pi\lambda t)^{-1/4},$$

что и завершает доказательство справедливости асимптотики (13).

Более быстрая стабилизация имеет место в более слабых топологиях.

Теорема 5. *Если* $\lambda=\mu>0$, *то*

1°. *Для любого начального распределения* p° *справедлива следующая оценка стабилизации динамического распределения к нулю при* $t\to\infty$

$$\|p(t)\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = \max_{k=0,1,\dots} p_k(t) \sim \frac{4}{\sqrt{2\lambda\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \quad (14)$$

2°. *Эта оценка асимптотически неулучшаема, то есть ни для какого начального распределения* p° *оценка*

$$\|p(t)\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

не имеет места.

3°. *Каждая вероятность* $p_k(t)$ *имеет асимптотику*

$$p_k(t)\sim\frac{1}{\sqrt{\lambda\pi t}},\ t\to\infty.$$

Доказательство.

1°. Оценка (14) сразу следует из представления (11).

2°. Справедливость утверждения этого пункта следует из справедливости утверждения следующего пункта.

3°. Ряд

$$\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}\sqrt{t}e^{-2\lambda t}(I_{k-j}(2\lambda t)+I_{k+1+j}(2\lambda t))p_j^\circ$$

сходится равномерно по всем $t\ge 0$, тогда по стандартной теореме анализа о возможности в таком случае почленного перехода к пределу и по асимптотике [12]

$$I_n(t)\sim\frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}$$

приходим к справедливости третьего пункта и теоремы в целом.

5.2.3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДФР

Полученный только что результат может быть использован для оценки ДФР следующим простым образом.

Прежде всего отметим, что выражение $1-q_k(t)$ при $k=0$ оценки не требует, так как оно всегда тождественно равно нулю. Для других $k>0$ имеем формулу

$$1-q_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)-\sum_{n=k}^{\infty}p_n(t)=\sum_{n=0}^{k-1}p_n(t). \quad (15)$$

Отсюда и из теоремы 5 вытекает

С л е д с т в и е 5.4.

1°. *Для любого начального распределения* p° *имеет место следующая покоординатная оценка стабилизации ДФР к единице при* $t\to\infty$

$$1-q_k(t)\sim\frac{4k}{\sqrt{2\lambda\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}},\ k\ge 1.$$

2°. *При фиксированном k полученная оценка асимптотически неулучшаема по* $t\to\infty$, *так как справедлива асимптотическая формула*

$$1-q_k(t)\sim\frac{k}{\sqrt{\lambda\pi t}},\ k\ge 1.$$

5.3. СТАБИЛИЗАЦИЯ С ПЕРЕГРУЗКАМИ ПРИ $\lambda>\mu$

5.3.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим стабилизацию в СМО с перегрузками в некритическом случае $\lambda>\mu$ (или $\rho<1$).

Пусть

$$\zeta^\circ(\varphi)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\rho^n(p_n^\circ-\rho^2p_{n+1}^\circ)\sin((n+1)\varphi).$$

Теорема 6. *Если* $\lambda>\mu>0$, *то для любого начального распределения* p° *имеет место следующая асимптотика* $\mathbb{L}_2$*-нормы динамического распределения*

$$\|p(t)\|_{\mathbb{L}_2}\sim 2(2\pi t(\lambda+\mu))^{-1/4},\quad t\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$p_k(t)=\frac{2e^{-(\lambda+\mu)t}\rho^{-k}}{\pi}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}p_n^\circ\sum\nolimits_{j=n+1}^{\infty}\rho^{j-1}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}e^{2t\sqrt{\lambda\mu}\cos\varphi}\sin(j\varphi)(\sin((k+1)\varphi)-\rho\sin(k\varphi))d\varphi$$

и так как

$$\sum\nolimits_{j=n+1}^{\infty}\rho^{j-1}\sin(j\varphi)=\rho^n\,\frac{\sin((n+1)\varphi)-\rho\sin(n\varphi)}{1-2\rho\cos(\varphi)+\rho^2},$$

то

$$p_k(t)=\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}\rho^{-k}}{\pi i}\times$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{2t\sqrt{\lambda\mu}\cos\varphi}(e^{i(k+1)\varphi}-\rho e^{ik\varphi})\zeta^\circ(\varphi)}{1-2\rho\cos(\varphi)+\rho^2}d\varphi. \quad (16)$$

Переходя теперь к контурному интегралу на комплексной плоскости, что формально осуществляется заменой переменной $z=e^{i\varphi}$, и учитывая то, что, во-первых,

$$1-2\rho\cos(\varphi)+\rho^2=(1-\rho e^{i\varphi})(1-\rho e^{-i\varphi})=$$
$$=(1-\rho z)(1-\rho z^{-1}),$$

и, во-вторых, что функция

$$\zeta^\circ(\varphi)=\frac{1}{2i}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\rho^n(p_n^\circ-\rho^2p_{n+1}^\circ)\times$$
$$\times(z^{n+1}-z^{-n-1})\equiv\overline{\zeta}^\circ(z) \quad (17)$$

аналитична по z в кольце $\rho<|z|<\rho^{-1}$ комплексной плоскости и непрерывна вплоть до его границы, получаем

$$p_k(t)=\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}\rho}{\pi \mathrm{i}}\times$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{t\sqrt{\lambda\mu}[(\rho+\rho^{-1})\cos\varphi+\mathrm{i}((\rho-\rho^{-1})\sin\varphi+\varphi)]}e^{\mathrm{i}k\varphi}\overline{\zeta}^\circ(\rho e^{\mathrm{i}\varphi})}{1-\rho^2e^{\mathrm{i}\varphi}}d\varphi.$$

Отметим, что по мажорантному признаку Вейерштрасса ряд (17) сходится равномерно в замкнутом кольце. Мы будем формально считать, что все предыдущие формулы настоящего пункта определяют p_k для всех целых $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Тогда по равенству Парсеваля для экспоненциальных рядов Фурье имеем

$$\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}|p_k(t)|^2=$$
$$=\frac{4e^{-2(\lambda+\mu)t}\rho^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{2t\sqrt{\lambda\mu}(\rho+\rho^{-1})\cos\varphi}\left|\overline{\zeta}^\circ(\rho e^{\mathrm{i}\varphi})\right|^2}{\left|1-\rho^2e^{\mathrm{i}\varphi}\right|^2}d\varphi\equiv F(t).$$

Асимптотика функции $F(t)$ может быть получена по лемме 4:

$$F(t)\sim\frac{4e^{-2(\lambda+\mu)t}\rho^2\left|\overline{\zeta}^\circ(\rho)\right|^2}{\pi(1-\rho^2)^2}\frac{\sqrt{\pi}e^{2t\sqrt{\lambda\mu}(\rho+\rho^{-1})}}{\sqrt{2t\sqrt{\lambda\mu}(\rho+\rho^{-1})}}=$$
$$=\frac{4\left|\sum_{n=0}^{\infty}p_n^\circ\right|^2}{\sqrt{2\pi t(\lambda+\mu)}}=\frac{4}{\sqrt{2\pi t(\lambda+\mu)}}.$$

Справедлива верхняя оценка

$$\|p(t)\|_{\mathbb{L}_2}^2=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}|p_k(t)|^2\sim\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}|p_k(t)|^2=F(t).$$

Из (16) нетрудно усмотреть, что при $k > 0$

$$\left|p_{-k}\right| \sim \text{const}\, e^{-(\lambda+\mu)t}\rho^k e^{2t\sqrt{\lambda\mu}} = \text{const}\,\rho^k e^{-t(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2},$$

значит,

$$\sum\nolimits_{k=-\infty}^{-1}\left|p_k(t)\right|^2 \sim \text{const}\, e^{-2t(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2}\sum\nolimits_{k=-\infty}^{-1}\rho^{-2k} = \\ = o(F(t)).$$

Таким образом,

$$\left\|p(t)\right\|_{\mathbb{L}_2}^2 \sim F(t)$$

и теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть* $\lambda > \mu > 0$. *Тогда*

1°. *Для любого фиксированного* k *имеет место асимптотическая формула*

$$p_k(t) \sim c_k \frac{\rho^{-k}e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{2\sqrt{\pi}(t\sqrt{\lambda\mu})^{3/2}},\ \ t \to \infty, \qquad (18)$$

в которой

$$c_k = \frac{k(1-\rho)+1}{(1-\rho)^2}\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} p_j^\circ \rho^j (j(1-\rho)+1).$$

2°. *Справедлива равномерная оценка сходимости распределения к нулю*

$$\left\|p\right\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} = \max_{k=0,1,\ldots}\left|p_k(t)\right| \sim \frac{4}{\sqrt{\pi t(\lambda+\mu)}}.$$

Доказательство.

1°. Из абсолютной и равномерной сходимости рядов в представлении (8) (по мажорантному признаку сходимости Вейерштрасса) в последнем возможен почленный переход к пределу, что после простых, но довольно громоздких подсчетов, и доказывает асимптотическую формулу (18).

5.3.2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДФР

По первой части теоремы 7 имеем

Следствие 5.5. *Для ДФР при любом* $k = 0,1,\ldots,$ *справедлива асимптотическая формула*

$$1 - q_k(t) \sim c_k' \frac{\rho^{-k}e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{2\sqrt{\pi}(t\sqrt{\lambda\mu})^{3/2}},\ \ t \to \infty,$$

где

$$c_k' = \frac{1+(k-1)\rho - k\rho^2 - \rho^k + \rho^{k+1}}{\rho^k(1-\rho)^3}\times \\ \times\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} p_j^\circ \rho^j (j(1-\rho)+1).$$

Для доказательства достаточно в соответствии с формулой (15) произвести суммирование в формуле (18).

5.4. ЭРГОДИЧНОСТЬ БЕЗ ПЕРЕГРУЗОК ПРИ $\lambda < \mu$

5.4.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Напомним, что в третьем разделе введено финальное распределение

$$p^\infty = [p_\circ^\infty, p_1^\infty, p_2^\infty, \ldots]^T, {}_{,k}^{\infty} = \rho^{-2k-2}(\rho^2 - 1).$$

Ниже покажем что оно действительно является финальным, то есть при определенных условиях в различных топологиях

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = p^\infty,$$

причем независимо от начального распределения, что и означает эргодичность таких СМО.

В отличие от предыдущих случаев в СМО без перегрузок может иметь место отсутствие стабилизации динамического распределения именно к указанному финальному распределению. Это случается в классе обобщённых распределений, когда в накопителе с ненулевой вероятностью в начальный и, следовательно, и во все последующие моменты времени находится бесконечное число заявок.

Этот факт на наш взгляд является причиной того, что в случае обычных распределений без дополнительных ограничений на начальное распределение не удаётся выявить квалифицированную скорость стабилизации. При этом чем ближе начальное распределение к финитному, то есть чем легче у него хвост, тем с большей скоростью динамическое распределение сходится к финальному и, наоборот, чем ближе начальное распределение к обобщённому, то есть чем тяжелее у него хвост, тем эта скорость медленнее. Сказанное хорошо подтверждается нижеследующими утверждениями.

5.5. СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Начнем с общего случая.

Теорема 8. *При любом начальном распределении* p° *имеет место предельное соотношение*

$$\max_k\left|p(t) - p^\infty\right| = \left\|p_k(t) - p_k^\infty\right\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} \to 0,\ \ t \to \infty.$$

Доказательство. По формуле (9) имеем

$$\left|p_k(t) - p_k^\infty\right| \le \\ \le e^{-(\lambda+\mu)t}\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\left[e_{k+1j}(t) - e_{kj}(t)\right]\left|\sum\nolimits_{n=0}^{j-1}(p_n^\circ - p_n^\infty)\right| = \\ = \Sigma_J' + \Sigma_J'',$$

где J — натуральное число и

$$\Sigma'_J = e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{j=1}^{J}\Big[e_{k+1j}(t)-e_{kj}(t)\Big]\Big|\sum_{n=0}^{j-1}(p_n^\circ - p_n^\infty)\Big|,$$

$$\Sigma'_J =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{j=J+1}^{\infty}\Big[e_{k+1j}(t)-e_{kj}(t)\Big]\Big|\sum_{n=0}^{j-1}(p_n^\circ - p_n^\infty)\Big|.$$

За счет выбора J достаточно большим функцию Σ''_J можно сделать как угодно малой сразу для всех значений времени $t \ge 0$; это следует из оценки ($\tau = 2t\sqrt{\lambda\mu}$)

$$e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{j=J+1}^{\infty}\Big[e_{k+1j}(t)-e_{kj}(t)\Big] \le$$

$$\le 4e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho^n I_n(\tau) = 4e^{-(\lambda+\mu)t}e^{t(\rho+\rho^{-1})\sqrt{\lambda\mu}} = 4$$

и из того, что

$$\Big|\sum_{n=0}^{j-1}(p_n^\circ - p_n^\infty)\Big| \to 0, \quad j \to \infty.$$

При фиксированном конечном J функция $\Sigma''_J = O(t^{-1/2})$ при $t \to \infty$. Все приведенные рассуждения носили равномерный по k характер. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда хвост начального распределения имеет степенной тип.

Теорема 9.

1°. *Пусть при некотором* $\theta, 0 < \theta \le 1$, *начальное распределение удовлетворяет дополнительному условию*

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^\theta p_j^\circ < \infty, \qquad (19)$$

тогда имеет место оценка

$$\left\|p(t)-p^\infty\right\|_{\mathbb{L}_\infty,\circ} = \max_k\left|p_k(t)-p_k^\infty\right| = O(t^{-\theta/2}). \quad (20)$$

2°. *Пусть при некотором* $\theta, \frac{1}{2} < \theta \le 1$, *начальное распределение удовлетворяет условию (19), тогда имеет место оценка*

$$\left\|p(t)-p^\infty\right\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\sum_k (p_k(t)-p_k^\infty)^2} = O(t^{-(\theta-1/2)/2}). \qquad (21)$$

Доказательство.

1°. Ради краткости обозначений введем вектор $a: a_j = p_j^\circ - p_j^\infty$ и положим $\tau = 2t\sqrt{\lambda\mu}$. Тогда из формулы (10) имеем

$$p_k(t) - p_k^\infty = g'_k(t) + g''_k(t) + g'''_k(t),$$

где

$$g'_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\rho^{j-k}I_{j-k}(\tau), g''_k(t) =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\rho^{j-k+1}I_{j+k+1}(\tau),$$

$$g'''_k(t) = -(\rho^2-1)\rho^{-2k-2}e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\sum_{n=k+2}^{j+k+1}\rho^n I_n(\tau),$$

Изучим сначала третью (наиболее сложно устроенную) из этих функций, которую с помощью уже не раз использованной нами техники контурного интегрирования представим в виде

$$g'''_k(t) = \frac{-(\rho^2-1)e^{-(\lambda+\mu)t}}{2\pi\rho^{2k+2}}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}e^{\tau[(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)-\mathrm{i}(\rho-\rho^{-1})\sin(\varphi)]/2}e^{\mathrm{i}(k+2)\varphi}\,\frac{A(\varphi)}{e^{\mathrm{i}\varphi}-1}\,d\varphi,$$

где

$$A(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty}a_j e^{ij\varphi},$$

причем законность последнего перехода следует из 1) вытекающей из условия (19) абсолютной сходимости ряда $\sum j^\theta(p_j^\circ - p_j^\infty)$, 2) следующей отсюда оценки

$$\left|A(\varphi)\right| = \left|\sum_{j=0}^{\infty}a_j(e^{ij\varphi}-1)\right| \le 2^{1-\theta}\left|\varphi\right|^\theta\sum_{j=0}^{\infty}j^\theta\left|a_j\right|,$$

$$(.. \left|\sin x\right| \le \left|x\right|^\theta)$$

обеспечивающей в последнем интеграле суммируемость подынтегральной функции, и 3) соответствующей теоремы анализа о предельных переходах в равномерно сходящихся несобственных интегралах.

Таким образом, с обозначаемыми одинаково разными постоянными, но не зависящими от t и k

$$\left|g''_k(t)\right| \le \mathrm{const}\,\frac{t^{-\theta/2}}{\rho^{2k}}\int_0^\infty e^{-s}s^{\theta/2-1}ds = \mathrm{const}\,\frac{t^{-\theta/2}}{\rho^{2k}}$$

и так как из оценки бесселевых функций сразу следует, что равномерно по k

$$g'_k(t) = O(t^{-1/2}),\ g''_k(t) = O(t^{-1/2}),$$

то оценка (20) доказана.

2°. Воспользуемся уже полученным представлением функции q'''_k:

$$q''_k(t) = \frac{-(\rho^2-1)e^{-(\lambda+\mu)t}}{2\pi\rho^{2k+2}}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}e^{\tau[(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)-\mathrm{i}(\rho-\rho^{-1})\sin(\varphi)]/2}e^{\mathrm{i}(k+2)\varphi}\,\frac{A(\varphi)}{e^{\mathrm{i}\varphi}-1}\,d\varphi$$

и получаемыми аналогично представлениями

$$q''_k(t) =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{2\pi\rho^{2k}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\tau[(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)-i(\rho-\rho^{-1})\sin(\varphi)]/2}e^{i(k+1)\varphi}A(\varphi)d\varphi,$$

$$q'_k(t) =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\tau[(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)-i(\rho-\rho^{-1})\sin(\varphi)]/2}e^{-ik\varphi}A(\varphi)d\varphi.$$

Поэтому, с точностью до ограниченных множителей эти функции являются коэффициентами Фурье соответствующих функций по ортонормированной системе $\{(2\pi)^{-1/2}e^{il\varphi}\}$, а тогда по неравенству Бесселя получаем оценки

$$\|q'\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\sum_k |q_k'(t)|^2} \le$$

$$\le \mathrm{const}\, e^{-(\lambda+\mu)t}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)}\,|A(\varphi)|^2\,d\varphi},$$

$$\|q''\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\sum_k |q_k''(t)|^2} \le$$

$$\le \mathrm{const}\, e^{-(\lambda+\mu)t}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)}\,|A(\varphi)|^2\,d\varphi},$$

$$\|q'''\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\sum_k |q_k'''(t)|^2} \le \mathrm{const}\, e^{-(\lambda+\mu)t} \times$$

$$\times\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\rho+\rho^{-1})\cos(\varphi)}\,\frac{|A(\varphi)|^2}{(\sin(\varphi/2))^2}\,d\varphi}.$$

Оценивая три последних интеграла предыдущим методом, получаем

$$\|q'\|_{\mathbb{L}_2} = o(t^{-1/4}),\ \|q''\|_{\mathbb{L}_2} = o(t^{-1/4}),$$

$$\|q'''\|_{\mathbb{L}_2} = O(t^{-(\theta-1/2)/2}),$$

и так как

$$\|p(t)-p^\infty\|_{\mathbb{L}_2} = \|q'+q''+q'''\|_{\mathbb{L}_2} \le$$

$$\le \|q'\|_{\mathbb{L}_2} + \|q''\|_{\mathbb{L}_2} + \|q'''\|_{\mathbb{L}_2},$$

то неравенство (21) и теорема в целом доказаны.

Рассмотрим, наконец, случай когда хвост начального распределения имеет экспоненциальный тип. Вычисления, аналогичные соответствующим вычислениям предыдущего пункта, приводят к асимптотическим формулам следующей теоремы.

Теорема 10. *Пусть начальное распределение финитно или, более общо, пусть выполнено условие*

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^4\rho^j p_j^\circ < \infty, \qquad (22)$$

тогда для любого $k \ge 0$ справедлива асимптотическая формула

$$p_k(t)-p_k^\infty \sim \frac{-(\rho k-k-1)\rho^{-k}e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}}{2t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^\circ-p_j^\infty)\rho^j(\rho j-j-1), \qquad (23)$$

из которой вытекают еще три другие аналогичные асимптотические формулы

$$\|p(t)-p^\infty\|_{\mathbb{L}_1} \sim \frac{e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^{1/2}}}{2t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}\,|\rho k-k-1|\right)\left|\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^\circ-p_j^\infty)\rho^j(\rho j-j-1)\right|,$$

$$\|p(t)-p^\infty\|_{\mathbb{L}_2} \sim \frac{e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^{1/2}}}{2t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-2k}(\rho k-k-1)^2}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^\circ-p_j^\infty)\rho^j(\rho j-j-1)\right|,$$

$$\|p(t)-p^\infty\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} \sim \frac{e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^{1/2}}}{2t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$

$$\times\left(\max_{k\ge0}\{\rho^{-k}\,|\rho k-k-1|\}\right)\left|\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^\circ-p_j^\infty)\rho^j(\rho j-j-1)\right|,$$

5.5.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДФР

Теорема 11. *При любом начальном распределении p° имеет место предельное соотношение*

$$\max_k |q_k(t)-q_k^\infty| = \|q(t)-q^\infty\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}} \to 0 \quad t\to\infty.$$

Доказательство. По теореме 2

$$q(t)-q^\infty = e^{tQ}(q^\circ-q^\infty),$$

то есть

$$q_k(t)-q_k^\infty =$$

$$= e^{-t(\lambda+\mu)}\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-k}(I_{j-k}(2t\sqrt{\lambda\mu})-I_{j+k}(2t\sqrt{\lambda\mu}))\sum_{n=j}^{\infty}a_n.$$

Поскольку

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{n=j}^{\infty}a_j = 0,$$

то повторением соответствующей части доказательства теоремы 8 и завершается доказательство теоремы 11.

Теорема 12

1°. *Пусть при некотором $\theta, 0<\theta\le1$, начальное рапределение удовлетворяет условию* (19), *тогда имеет место оценка*

$$\|q(t)-q^\infty\|_{\mathbb{L}_\infty,\circ} = O(t^{-\theta/2}). \qquad (24)$$

2°. *Пусть при некотором $\theta, \dfrac{1}{2}<\theta\le1$, начальное рапределение удовлетворяет условию (12), тогда имеет место оценка*

$$\left\|q(t)-q^{\infty}\right\|_{L_2}=\sqrt{\sum_k (q_k(t)-q_k^{\infty})^2}=O(t^{-(\theta-1/2)/2}). \quad (25)$$

Доказательство.

1°. Меняя порядок суммирования, получаем еще одно представление

$$q_k(t)-q_k^{\infty}=$$
$$=e^{-t(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{j=0}^{n}\rho^{j-k}(I_{j-k}(2t\sqrt{\lambda\mu})-I_{j+k}(2t\sqrt{\lambda\mu})).$$

Отсюда по схеме рассуждений в доказательстве теоремы 9 имеем

$$q_k(t)-q_k^{\infty}=$$
$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\tau[(\rho+\rho^{-1})\cos\varphi-i(\rho-\rho^{-1})\sin\varphi]/2}e^{i(1-k)\varphi}\,\frac{A(\varphi)}{e^{i\varphi}-1}\,d\varphi-$$
$$-\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{2\pi\rho^{2k}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\tau[(\rho+\rho^{-1})\cos\varphi-i(\rho-\rho^{-1})\sin\varphi]/2}e^{i(1+k)\varphi}\,\frac{A(\varphi)}{e^{i\varphi}-1}\,d\varphi.$$

Как и ранее отсюда вытекает оценка (24).

2°. Справа в последней формуле с точностью до ограниченных множителей стоят два коэффициента Фурье, что как и ранее обеспечивает справедливость оценки (25). Теорема доказана.

Теорема 13. *Пусть начальное распределение удовлетворяет условию* (22), *тогда для любого* $k \ge 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$q_k(t)-q_k^{\infty}\sim\frac{(k\rho^2-k\rho+1)e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}}{2\rho^k(1-\rho)t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^{\circ}-p_j^{\infty})\rho^j(\rho j-j-1), \quad (26)$$

из которой вытекают еще три другие асимптотические формулы

$$\left\|q(t)-q^{\infty}\right\|_{\mathbb{L}_1}\sim\frac{e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^{1/2}}}{2(\rho-1)t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}(k\rho^2-k\rho+1)\right)\left|\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^{\circ}-p_j^{\infty})\rho^j(\rho j-j-1)\right|,$$

$$\left\|q(t)-q^{\infty}\right\|_{\mathbb{L}_2}\sim\frac{e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^{1/2}}}{2(\rho-1)t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$
$$\times\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-2k}(k\rho^2-k\rho+1)^2}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^{\circ}-p_j^{\infty})\rho^j(\rho j-j-1)\right|,$$

$$\left\|q(t)-q^{\infty}\right\|_{\mathbb{L}_{\infty,\circ}}\sim\frac{e^{-t(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^{1/2}}}{2(\rho-1)t\sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\pi t\sqrt{\lambda\mu}}}\times$$
$$\times\left(\max_{k\ge 0}\{\rho^{-k}(k\rho^2-k\rho+1)\}\right)\left|\sum_{j=0}^{\infty}(p_j^{\circ}-p_j^{\infty})\rho^j(\rho j-j-1)\right|.$$

Доказательство. Опуская простые детали, отметим только, что формула (26) получается суммированием по индексу k в асимптотической формуле (23). Три следующие являются прямым следствием (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clark A.B.* A Waiting line process of Markov type // Annals of Mathematical Statistics. — 1965. — Vol. 27, №2, — P. 452—459.

2. *Rolski T.* Approximation of periodic queues // Adv. Appl. Probab. — 1987. — 17. №3. — P. 691—707.

3.. *Abate J., Whitt W.* Simple spectral representations for the M/M/1 queue // Queueing Syst. — 1988. — 3, №4. — P. 321-345.

4. *Syski R.* Further comments on the solution of the M/M/1 queue // Adv. Appl. Probab. — 1988. — 20. № 3. — P. 693.

5. *Svoronos A., Green L.* A convexity result for single-server exponention loss systems with non-stationary arrivals // J. Appl. Probab. — 1988. — 25. № 1. — P. 224—227.

6. *Rosenberg C., Marumdar R., Kleinrock L.* On the analysis of exponential queuing systems with randomly changing arrival rates: Stability conditions and finite buffer scheme with a resume level // Rerform. Eval. — 1990. — 11. №4. — P. 273—293.

7. *Головко Н.Н., Коротаев И.А.* Расчет характеристик нестационарных систем массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 2. — С. 97—102.

8. *Rolski T.* Queues with non-stationary input stream: Ross's conjecture // Adv. Appl. Probab. — 1991. — Vol. 13, №3. — P. 603—618.

9. *Стрик Я.* Предельные результаты для переключаемых марковских систем обслуживания с конечным числом источников // Кибернетика и систем. анализ. — 1994. №1. — С. 79—84.

10. *Таташев А.Г.* Система массового обслуживания с переменной интенсивностью входного потока // Автоматика и телемеханика. — 1995. №12. — С. 78—84.

11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. I. М.: Наука, 1974, 296 с.

12. *Катрахов В.В., Головко Н.И., Рыжков Д.Е.* Введение в теорию марковских дважды стохастических систем массового обслуживания. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 2005, 212 с.