УДК 517.9

АСИНХРОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ДВУХКОНТУРНОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ

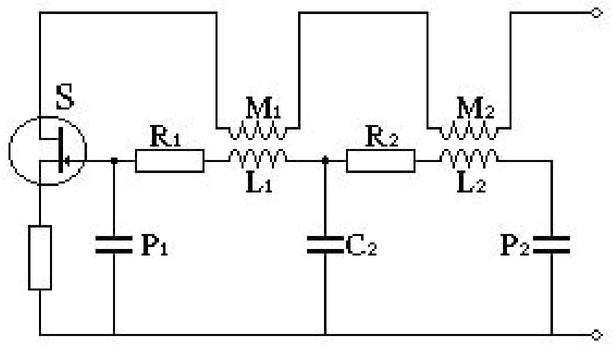
В. Г. Задорожний, В. И. Непринцев, А. А. Кузнецов

Воронежский государственный университет

Изучаются возможные типы установившихся автоколебаний в двухконтурном автогенераторе. Хорошо изучены условия, при которых устанавливаются одночастотные колебания [1, 2]. Обнаружено явление затягивания [1, 2], состоящее в том, что частота одночастотных колебаний зависит от того, каким образом система переведена в данное состояние.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим известную схему автогенератора на двух связанных контурах с емкостной связью [1, 2].



Обозначим через x_1 напряжение на емкости P_1 и x_3 напряжение на емкости P_2. Уравнения, описывающие изменение со временем x_1, x_3 имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = -B_1x_1 - A_1x_2 + C_1x_3 + \left(k_{10} + \tilde{k}_{12}x_1^2\right)x_2,\\
&\dot{x}_3 = x_4,\\
&\dot{x}_4 = C_3x_1 - B_2x_3 - A_2x_4 + \left(k_{20} - \tilde{k}_{22}x_1^2\right)x_2,
\end{aligned}$$

где точка обозначает дифференцирование по переменной $\tau = \dfrac{t}{\sqrt{L_1P_1}}$, t — время,

$$\alpha = \frac{L_2P_2}{L_1P_1},\ A_1 = R_1\sqrt{\frac{P_1}{L_1}},\ A_2 = R_2\sqrt{\frac{P_2}{\alpha L_2}},$$

$$B_1 = 1 + \frac{P_1}{C_2},\ B_2 = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{P_2}{C_2}\right),$$

$$k_{10} = \frac{M_1S_1}{\sqrt{L_1P_1}},\ k_{20} = \frac{M_2S_1}{\alpha\sqrt{L_1P_1}},\ \tilde{k}_{12} = \frac{3M_1S_3}{\sqrt{L_1P_1}},$$

$$\tilde{k}_{22} = \frac{3M_2S_3}{\alpha\sqrt{L_1P_1}},\ C_1 = \frac{P_2}{C_2},\ C_3 = \frac{P_1}{\alpha C_2},$$

$i = S_1x_1 - S_3x_1^3$ — вольтамперная характеристика усилителя, M_1, M_2 — коэффициенты взаимоиндукции.

Требуется:

1) выяснить, возможны ли в системе устойчивые двухчастотные автоколебания;

2) найти условия на параметры схемы, при которых возникают устойчивые одночастотные и двухчастотные автоколебания.

Для решения задачи мы будем использовать метод усреднения [3]. При этом нужно выделить малый параметр. Введем обозначения ε_1 - приращение к S_1,

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1M_1}{\sqrt{L_1P_1}},\ \beta = \frac{M_2}{\alpha M_1},\ k_{12} = \frac{\tilde{k}_{12}}{\varepsilon},\ k_{22} = \frac{\tilde{k}_{22}}{\varepsilon}.$$

При этом уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = -B_1x_1 + \left(k_{10} - A_1\right)x_2 + C_1x_3 + \varepsilon\left(1 - k_{12}x_1^2\right)x_2,\\
&\dot{x}_3 = x_4,\\
&\dot{x}_4 = C_3x_1 + k_{20}x_2 - B_2x_3 - A_2x_4 + \varepsilon\left(\beta - k_{22}x_1^2\right)x_2.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Основным инструментом решения задачи будет метод усреднения [3]. Запишем систему уравнений (1.1) в векторном виде

$$\dot{u} = Au + \varepsilon f(u), \tag{2.1}$$

где $u(\tau)$ — четырехмерная векторная функция,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B_1 & k_{10} - A_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_3 & k_{20} & -B_2 & -A_2 \end{pmatrix},$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - k_{12}u_1^2)u_2 \\ 0 \\ (\beta - k_{22}u_1^2)u_2 \end{pmatrix}.$$

Для применения метода усреднения уравнение (2.1) нужно привести к стандартному виду $\dot{u} = \varepsilon g(\tau, u)$ и затем построить усредненные уравнения.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + \left(A_1 + A_2 - k_{10}\right)\lambda^3 + \\ + \left(B_1 + B_2 + A_1A_2 - A_2k_{10}\right)\lambda^2 + \\ + \left(A_1B_2 + A_2B_1 - B_2k_{10} - C_1k_{20}\right)\lambda + B_1B_2 - C_1C_3.$$

Отметим, что если многочлен $p(\lambda)$ четвертой степени, коэффициент которого при λ^4 равен единице, имеет корни $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, то он имеет вид

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2.$$

Мы будем считать, что корни характеристического многочлена матрицы A лежат на мнимой оси и различны, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, причем выполняются условия

$$\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_2 > \omega_1. \qquad (2.2)$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} &1.\ A_1 + A_2 - k_{10} = 0, \\ &2.\ B_1 + B_2 + A_1A_2 - A_2k_{10} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \\ &3.\ A_1B_2 + A_2B_1 - B_2k_{10} - C_1k_{20} = 0, \\ &4.\ B_1B_2 - C_1C_3 = \omega_1^2\omega_2^2. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

При выполнении условий (2.3) находим вещественную фундаментальную матрицу $\Phi(\tau)$ для линейной однородной системы $\dot{u} = Au$. Она имеет размерность 4×4 и ее векторы-столбцы имеют вид:

первый столбец

$$\begin{pmatrix} -C_1 \cos\omega_1\tau \\ C_1\omega_1 \sin\omega_1\tau \\ \left(\omega_1^2 - B_1\right)\cos\omega_1\tau + \omega_1\left(A_1 - k_{10}\right)\sin\omega_1\tau \\ \omega_1^2\left(A_1 - k_{10}\right)\cos\omega_1\tau - \omega_1\left(\omega_1^2 - B_1\right)\sin\omega_1\tau \end{pmatrix},$$

второй столбец

$$\begin{pmatrix} -C_1 \sin\omega_1\tau \\ -C_1\omega_1 \cos\omega_1\tau \\ \left(\omega_1^2 - B_1\right)\sin\omega_1\tau - \omega_1\left(A_1 - k_{10}\right)\cos\omega_1\tau \\ \omega_1^2\left(A_1 - k_{10}\right)\sin\omega_1\tau + \omega_1\left(\omega_1^2 - B_1\right)\cos\omega_1\tau \end{pmatrix},$$

третий столбец

$$\begin{pmatrix} -C_1 \cos\omega_2\tau \\ C_1\omega_2 \sin\omega_2\tau \\ \left(\omega_2^2 - B_1\right)\cos\omega_2\tau + \omega_2\left(A_1 - k_{10}\right)\sin\omega_2\tau \\ \omega_2^2\left(A_1 - k_{10}\right)\cos\omega_2\tau - \omega_2\left(\omega_2^2 - B_1\right)\sin\omega_2\tau \end{pmatrix},$$

четвертый столбец

$$\begin{pmatrix} -C_1 \sin\omega_2\tau \\ -C_1\omega_2 \cos\omega_2\tau \\ \left(\omega_2^2 - B_1\right)\sin\omega_2\tau - \omega_2\left(A_1 - k_{10}\right)\cos\omega_2\tau \\ \omega_2^2\left(A_1 - k_{10}\right)\sin\omega_2\tau + \omega_2\left(\omega_2^2 - B_1\right)\cos\omega_2\tau \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену переменных в уравнении (2.1)

$$u = \Phi(\tau)\gamma(\tau), \qquad (2.4)$$

где $\gamma(\tau)$ — четырехмерная векторная функция с координатами $\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau), \gamma_3(\tau), \gamma_4(\tau)$.

Подставим (2.4) в (2.1), получим

$$\dot{\Phi}(\tau)\gamma(\tau) + \Phi(\tau)\dot{\gamma}(\tau) = \\ = A\Phi(\tau)\gamma(\tau) + \varepsilon f\left(\Phi(\tau)\gamma(\tau)\right).$$

Так как $\dot{\Phi}(\tau) = A(\tau)\Phi(\tau)$, то отсюда получаем уравнение в стандартной форме [3] для $\gamma(\tau)$

$$\dot{\gamma}(\tau) = \varepsilon\Phi^{-1}(\tau) f\left(\Phi(\tau)\gamma(\tau)\right). \qquad (2.5)$$

Несмотря на технические трудности, матрицу $\Phi^{-1}(\tau)$ можно вычислить и система (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \varepsilon\frac{-\omega_1A_2\cos\omega_1\tau - (\omega_1^2 - B_2)\sin\omega_1\tau}{C_1\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_2 + \\ &\quad + \varepsilon\frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_4, \\ \dot{\gamma}_2 &= \varepsilon\frac{\omega_1A_2\sin\omega_1\tau - (\omega_1^2 - B_2)\cos\omega_1\tau}{-C_1\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_2 + \\ &\quad + \varepsilon\frac{\cos\omega_1\tau}{-\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_4, \\ \dot{\gamma}_3 &= \varepsilon\frac{-\beta_2A_2\cos\omega_2\tau - (\omega_2^2 - B_2)\sin\omega_2\tau}{-C_1\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_2 + \\ &\quad + \varepsilon\frac{\sin\omega_2\tau}{-\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_4, \\ \dot{\gamma}_4 &= \varepsilon\frac{\omega_2A_2\sin\omega_2\tau - (\omega_2^2 - B_2)\cos\omega_2\tau}{C_1\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_2 + \\ &\quad + \varepsilon\frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}f_4, \end{aligned} \qquad (2.6)$$

где $f_2 = \left(1 - k_{12}x_1^2\right)x_2$, $f_4 = \left(\beta - k_{22}x_1^2\right)x_2$, в которых сделана подстановка (2.4). Система (2.6) имеет стандартный вид и ее можно исследовать методом усреднения, однако несложный подсчет подсказывает, что для построения усредненных уравнений придется подсчитать около тысячи интегралов. Все же положение оказывается не столь пессимистичным. Перейдем к полярной системе координат с помощью замены переменных

$$D_1 = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2},\ D_2 = \sqrt{\gamma_3^2 + \gamma_4^2}\ ,$$
$$\mathrm{tg}\delta_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1},\ \mathrm{tg}\delta_2 = \frac{\gamma_4}{\gamma_3}\ , \tag{2.7}$$

где D_1, D_2, δ_1, δ_2 новые неизвестные функции. После подстановки (2.6) в (2.7) и элементарных преобразований приходим к системе уравнений

$$\dot{D}_1 = \varepsilon\left[\frac{-\omega_1 A_2\cos(\omega_1\tau - \delta_1) - (\omega_1^2 - B_2)\sin(\omega_1\tau - \delta_1)}{C_1\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_2 + \frac{\sin(\omega_1\tau - \delta_1)}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_4\right],$$
$$\dot{D}_2 = \varepsilon\left[\frac{\omega_2 A_2\cos(\omega_2\tau - \delta_2) + (\omega_2^2 - B_2)\sin(\omega_2\tau - \delta_2)}{C_1\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_2 - \frac{\sin(\omega_2\tau - \delta_2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_4\right], \tag{2.8}$$
$$\dot{\delta}_1 = \varepsilon\left[\frac{(\omega_1^2 - B_2)\cos(\omega_1\tau - \delta_1) - \omega_1 A_2\sin(\omega_1\tau - \delta_1)}{C_1\omega_1 D_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_2 - \frac{\cos(\omega_1\tau - \delta_1)}{\omega_1 D_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_4\right],$$
$$\dot{\delta}_2 = \varepsilon\left[\frac{-(\omega_2^2 - B_2)\cos(\omega_2\tau - \delta_2) + \omega_2 A_2\sin(\omega_2\tau - \delta_2)}{C_1\omega_2 D_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_2 + \frac{\cos(\omega_2\tau - \delta_2)}{\omega_2 D_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} f_4\right],$$

где

$$\begin{aligned}
f_2 = {} & C_1\omega_1 D_1\sin(\omega_1\tau - \delta_1) + C_1\omega_2 D_2\sin(\omega_2\tau - \delta_2) - \\
& -C_1^3 k_{12}[\tfrac{1}{2}\omega_1 D_1(D_1^2 + D_2^2)\sin(\omega_1\tau - \delta_1) + \\
& +\tfrac{1}{2}\omega_2 D_2(D_1^2 + D_2^2)\sin(\omega_2\tau - \delta_2) + \\
& +\tfrac{1}{4}(\omega_1 D_1^3\sin(3\omega_1\tau - 3\delta_1) - \omega_1 D_1^3\sin(\omega_1\tau - \delta_1) + \\
& +\omega_2 D_2^3\sin(3\omega_2\tau - 3\delta_2) - \omega_2 D_2^3\sin(\omega_2\tau - \delta_2) + \\
& +D_1^2 D_2(\omega_2 + 2\omega_1)\sin[(\omega_2 + 2\omega_1)\ \tau - (\delta_2 + 2\delta_1)] + \\
& +D_1^2 D_2(\omega_2 - 2\omega_1)\sin[(\omega_2 - 2\omega_1)\ \tau - (\delta_2 - 2\delta_1)] + \\
& +D_1 D_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)\sin[(\omega_1 + 2\omega_2)\ \tau - (\delta_1 + 2\delta_2)] + \\
& +D_1 D_2^2(\omega_1 - 2\omega_2)\sin[(\omega_1 - 2\omega_2)\ \tau - (\delta_1 - 2\delta_2)])]\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = {} & \beta C_1\omega_1 D_1\sin(\omega_1\tau - \delta_1) + \beta C_1\omega_2 D_2\sin(\omega_2\tau - \delta_2) - \\
& -C_1^3 k_{22}[\tfrac{1}{2}\omega_1 D_1(D_1^2 + D_2^2)\sin(\omega_1\tau - \delta_1) + \\
& +\tfrac{1}{2}\omega_2 D_2(D_1^2 + D_2^2)\sin(\omega_2\tau - \delta_2) + \\
& +\tfrac{1}{4}(\omega_1 D_1^3\sin(3\omega_1\tau - 3\delta_1) - \omega_1 D_1^3\sin(\omega_1\tau - \delta_1) + \\
& +\omega_2 D_2^3\sin(3\omega_2\tau - 3\delta_2) - \omega_2 D_2^3\sin(\omega_2\tau - \delta_2) + \\
& +D_1^2 D_2(\omega_2 + 2\omega_1)\sin[(\omega_2 + 2\omega_1)\ \tau - (\delta_2 + 2\delta_1)] + \\
& +D_1^2 D_2(\omega_2 - 2\omega_1)\sin[(\omega_2 - 2\omega_1)\ \tau - (\delta_2 - 2\delta_1)] + \\
& +D_1 D_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)\sin[(\omega_1 + 2\omega_2)\ \tau - (\delta_1 + 2\delta_2)] + \\
& +D_1 D_2^2(\omega_1 - 2\omega_2)\sin[(\omega_1 - 2\omega_2)\ \tau - (\delta_1 - 2\delta_2)])].
\end{aligned}$$

Напомним, что средним значением функции $f(\tau, x)$ по переменной τ является $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1}\int\limits_0^T f(\tau, x)\,dt$.

Находя среднее значение от правых частей уравнений (2.8) по переменной τ получим усредненную систему

$$\dot{D}_1 = \frac{\varepsilon D_1}{8(\omega_2^2 - \omega_1^2)}[4(\beta C_1 - \omega_1^2 + B_2) + 2C_1^2(D_1^2 + D_2^2)\times$$
$$\times(k_{12}(\omega_1^2 - B_2) - k_{22}C_1) + C_1^2 D_1^2(k_{22}C_1 - k_{12}(\omega_1^2 - B_2))],$$
$$\dot{D}_2 = \frac{\varepsilon D_2}{8(\omega_2^2 - \omega_1^2)}[-4(\beta C_1 - \omega_2^2 + B_2) - 2C_1^2(D_1^2 + D_2^2)\times$$
$$\times(k_{12}(\omega_2^2 - B_2) - k_{22}C_1) - C_1^2 D_2^2(k_{22}C_1 - k_{12}(\omega_2^2 - B_2))],$$
$$\dot{\delta}_1 = -\frac{\varepsilon A_2}{8(\omega_2^2 - \omega_1^2)}[4 + C_1^2 k_{12} D_1^2 - 2C_1^2 k_{12}(D_1^2 + D_2^2)]\omega_1,$$
$$\dot{\delta}_2 = \frac{\varepsilon A_2}{8(\omega_2^2 - \omega_1^2)}[4 + C_1^2 k_{12} D_2^2 - 2C_1^2 k_{12}(D_1^2 + D_2^2)]\omega_2.$$

Упростим полученную систему $\frac{k_{22}}{k_{12}} = \frac{\tilde{k}_{22}}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\tilde{k}_{12}} = \frac{3M_2 S_3}{\alpha\sqrt{L_1 P_1}}\frac{\sqrt{L_1 P_1}}{3M_1 S_3} = \frac{M_2}{\alpha M_1} = \beta$. Тогда $k_{22}C_1 - (k_{12}\omega_i^2 - B_2) = k_{12}(B_2 + \beta C_1 - \omega_i^2)$. Перепишем усредненную систему, вынося общие множители.

$$\dot{D}_1 = \frac{\varepsilon D_1}{8(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\times$$
$$\times\left(4 - C_1^2 k_{12}(D_1^2 + 2D_2^2)\right)\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right), \tag{2.9}$$

$$\dot{D}_2 = -\frac{\varepsilon D_2}{8(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\times$$
$$\times\left(4 - C_1^2 k_{12}(2D_1^2 + D_2^2)\right)\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right), \tag{2.10}$$

$$\dot{\delta}_1 = -\frac{\varepsilon\omega_1 A_2}{8(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(D_1^2 + 2D_2^2\right)\right),$$

$$\dot{\delta}_2 = \frac{\varepsilon\omega_2 A_2}{8(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(2D_1^2 + D_2^2\right)\right).$$

§ 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Согласно методу усреднения [3] теперь следует приравнять нулю правые части уравнений (2.9), (2.10) и найти решения полученной системы уравнений. Обозначая через $\varepsilon P_1, \varepsilon P_2$ правые части уравнений (2.9), (2.10) получаем систему уравнений

$$P_1 = \frac{D_1}{8(\omega_2^2-\omega_1^2)}\times \\ \times\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(D_1^2 + 2D_2^2\right)\right)\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right) = 0, \quad (3.1)$$

$$P_2 = -\frac{D_2}{8(\omega_2^2-\omega_1^2)}\times \\ \times\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(2D_1^2 + D_2^2\right)\right)\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right) = 0. \quad (3.2)$$

Выпишем решения этой системы.

1. $D_1 = 0,\ D_2 = 0;$

2. $D_1 = 0,\ D_2^2 = \dfrac{4}{C_1^2 k_{12}};$

3. $D_1^2 = \dfrac{4}{C_1^2 k_{12}},\ D_2 = 0;$

4. $D_1^2 = \dfrac{4}{3C_1^2 k_{12}},\ D_2^2 = \dfrac{4}{3C_1^2 k_{12}}.$

Учитывая замены переменных (2.4), (2.7) можно выписать приближенное решение системы (2.1). Мы выпишем приближенное решение для первой и третьей координат

$$x_1(t) = -C_1 D_1 \cos\left(\omega_1\tau - \delta_1\right) - C_1 D_2 \cos\left(\omega_2\tau - \delta_2\right),$$

$$x_3(t) = \left(\omega_1^2 - B_1\right) D_1 \cos\left(\omega_1\tau - \delta_1\right) - \\ -\omega_1 D_1\left(A_1 - k_{10}\right)\sin\left(\omega_1\tau - \delta_1\right) + \\ +\left(\omega_2^2 - B_1\right) D_2 \cos\left(\omega_2\tau - \delta_2\right) + \\ +\omega_2 D_2\left(A_1 - k_{10}\right)\sin\left(\omega_2\tau - \delta_2\right).$$

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Асимптотическая устойчивость решений определяется (см. [3]) спектром матрицы из производных левой части системы (3.1), (3.2), вычисляемой в соответствующей точке, т.е. матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial D_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial D_2} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial D_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial D_2} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

При этом

$$\frac{\partial P_1}{\partial D_1} = \frac{\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right)}{8\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(3D_1^2 + 2D_2^2\right)\right),$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial D_2} = -\frac{4C_1^2 k_{12} D_1 D_2}{8\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right),$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial D_1} = \frac{4C_1^2 k_{12} D_1 D_2}{8\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right),$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial D_2} = -\frac{\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right)}{8\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(2D_1^2 + 3D_2^2\right)\right).$$

Если все характеристические числа матрицы (4.1) имеют отрицательные вещественные части, то соответствующее решение асимптотически устойчиво. Если есть характеристическое число матрицы (4.1) с положительной вещественной частью, то решение неустойчиво.

Умножение матрицы на положительное число $8\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)$ приводит к умножению характеристических чисел на это же число, поэтому при исследовании на устойчивость решений делитель $8\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)$ можно отбросить.

Характеристическое уравнение, полученной матрицы имеет вид

$$\lambda^2 + \Big[-\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right)\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(3D_1^2 + 2D_2^2\right)\right) + \\ +\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right)\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(2D_1^2 + 3D_2^2\right)\right)\Big]\lambda - \\ -\Big[\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right)\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(3D_1^2 + 2D_2^2\right)\right)\Big]\times \\ \times\Big[\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right)\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(2D_1^2 + 3D_2^2\right)\right)\Big] + \\ +16C_1^4 k_{12}^2 D_1^2 D_2^2\left[B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right]\left[B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right].$$

Введем обозначения

$$E\left(D_1^2, D_2^2\right) = -\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right)\times \\ \times\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(3D_1^2 + 2D_2^2\right)\right),$$

$$F\left(D_1^2, D_2^2\right) = \left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right)\times \\ \times\left(4 - C_1^2 k_{12}\left(2D_1^2 + 3D_2^2\right)\right),$$

$$G\left(D_1^2, D_2^2\right) = 16C_1^4 k_{12}^2 D_1^2 D_2^2\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_1^2\right)\times \\ \times\left(B_2 + \beta C_1 - \omega_2^2\right).$$

При этом характеристическое уравнение полученной матрицы, имеет вид

$$\lambda^2 + (E + F)\lambda + EF + G = 0.$$

Хорошо известно, что условие положительности коэффициентов приведенного многочлена второго порядка необходимо и достаточно для того чтобы его корни имели отрицательные вещественные части.

Исследуем на устойчивость нулевое решение, соответствующее точке $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. При этом $E + F = -4\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) < 0$, следовательно, нулевое решение неустойчиво. Аналогично исследуются другие случаи.

§ 5. СВОДКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для удобства пользования приведем сводку полученных результатов.

1. Если выполняются условия (2.2), (2.3), то нулевое решение неустойчиво.

2. Если выполняются условия (2.2), (2.3), а также

$$D_2^2 = \frac{4}{C_1^2 k_{12}}, \qquad (5.1)$$

$$E\left(0, D_2^2\right) + F\left(0, D_2^2\right) > 0, \qquad (5.2)$$

то при малых $\varepsilon > 0$ система имеет асимптотически устойчивое одночастотное колебание близкое к

$$x_1(t) = -C_1 D_2 \cos\left(\omega_2 \tau - \delta_2\right),$$
$$x_3(t) = \left(\omega_2^2 - B_1\right) D_2 \cos\left(\omega_2 \tau - \delta_2\right) +$$
$$+\omega_2\left(A_1 - k_{10}\right) D_2 \sin\left(\omega_2 \tau - \delta_2\right).$$

Если при этом хотя бы одно из условий (5.1), (5.2) не выполняется, то это колебание неустойчиво.

3. Если выполняются условия (2.2), (2.3),

$$D_1^2 = \frac{4}{C_1^2 k_{12}},$$

$$E\left(D_1^2, 0\right) + F\left(D_1^2, 0\right) > 0,$$

то при малых $\varepsilon > 0$ система имеет асимптотически устойчивое одночастотное колебание близкое к

$$x_1(t) = -C_1 D_1 \cos\left(\omega_1 \tau - \delta_1\right),$$
$$x_3(t) = \left(\omega_1^2 - B_1\right) D_1 \cos\left(\omega_1 \tau - \delta_1\right) +$$
$$+\omega_1\left(A_1 - k_{10}\right) D_1 \sin\left(\omega_1 \tau - \delta_1\right).$$

4. Если выполняются условия (2.2), (2.3),

$$D_1^2 = \frac{4}{3C_1^2 k_{12}}, \; D_2^2 = \frac{4}{3C_1^2 k_{22}},$$

$$E\left(D_1^2, D_2^2\right) + F\left(D_1^2, D_2^2\right) > 0$$

то при малых $\varepsilon > 0$ система имеет асимптотически устойчивое двухчастотное (при несоизмеримых ω_1, ω_2) колебание близкое к

$$x_1(t) = -C_1 D_1 \cos\left(\omega_1 \tau - \delta_1\right) - C_1 D_2 \cos\left(\omega_2 \tau - \delta_2\right),$$
$$x_3(t) = \left(\omega_1^2 - B_1\right) D_1 \cos\left(\omega_1 \tau - \delta_1\right) -$$
$$-\omega_1\left(A_1 - k_{10}\right) D_1 \sin\left(\omega_1 \tau - \delta_1\right) +$$
$$+\left(\omega_2^2 - B_1\right) D_2 \cos\left(\omega_2 \tau - \delta_2\right) +$$
$$+\omega_2\left(A_1 - k_{10}\right) D_2 \sin\left(\omega_2 \tau - \delta_2\right).$$

§ 6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Рассмотрим такие значения параметров: R_1=300; R_2=600; P_1=2.2403E-8; C_2=1.5E-9; $P_2=\infty$; L_1=0.2247; L_2=0.2106; M_1=0.04853; M_2=0; S_0=4.34E-4; S_3=1.0E-5.

Отметим, что при S_0=4.340382E-4, получаем характеристические числа $\lambda_{1,2} = 0.0000 \pm 5.59667i$, $\lambda_{3,4} = 0.0000 \pm 0.71328i$, а при S_0=4.5E-4 получаем характеристические числа $\lambda_{1,2} = 0.00272 \pm 5.59647i$, $\lambda_{3,4} = 0.00273 \pm 0.71330i$, поэтому выбрано S_0=4.34E-4.

При этих значениях параметров получаются асимптотически устойчивые одночастотные колебания (одно с низкой, а другое с высокой частотой).

Пример, когда возникают асимптотически устойчивые двухчастотные колебания. Выберем такие значения параметров

R_1=2000; R_2=25000; P_1=8.0E-9; C_2=5.0E-10; $P_2=\infty$; L_1=0.2247; L_2=0.2106; M_1=0.04853; M_2=0; S_0=4.72E-3; S_3=1.0E-4

имеют место следующие собственные значения:

S_0=4.685E-3, $\lambda_{1,2} = 0.000 \pm 2.5011i$,
$\lambda_{3,4} = 0.000 \pm 1.6512i$.

Используя метод усреднения Крылова—Боголюбова [3] мы находим условия, при которых в системе возможны установившиеся одночастотные и двухчастотные колебания. Получены приближенные аналитические выражения для одночастотных и двухчастотных колебаний. Результаты подтверждаются моделированием динамических процессов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы/ П.С. Ланда. М., Наука, 1980. — 350 с.

2. *Бутенин Н.В.* Введение в теорию нелинейных колебаний/ Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. М., Наука, 1978. — 384 с.

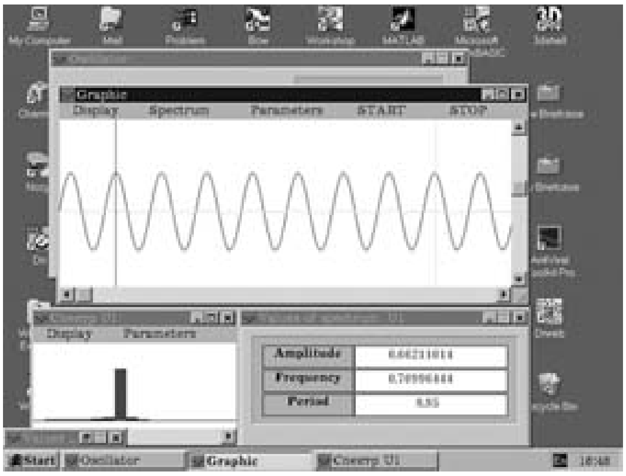


Рис. 2. Колебания на низкой частоте

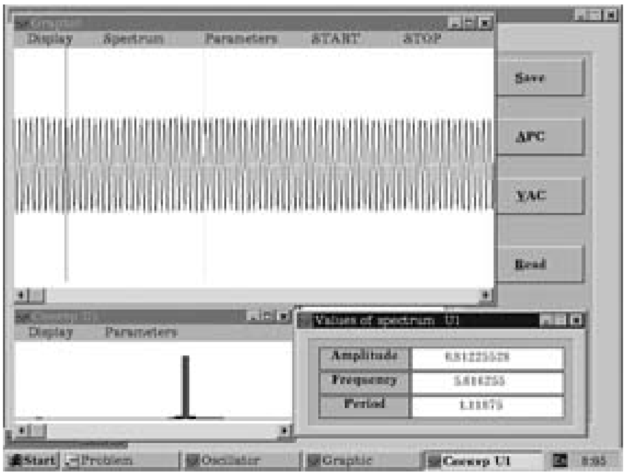


Рис. 3. Колебания на высокой частоте 2

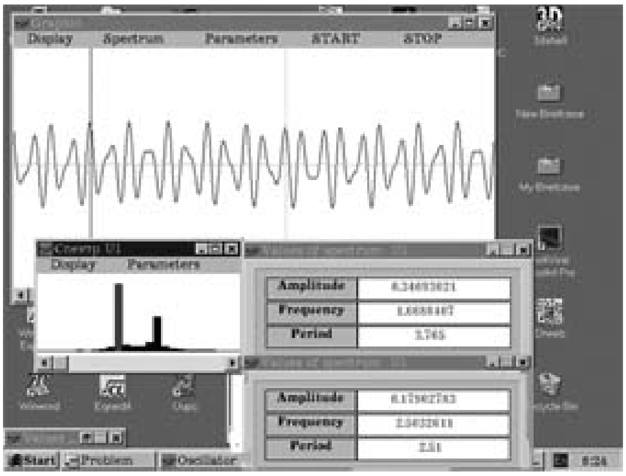


Рис. 4 Двухчастотные колебания

3. *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М., Наука, 1974. — 503 с.

4. *Денисов И.Д.* Генераторы и усилители колебаний радиочастот/ И. Д. Денисов М.—Л., Госэнергоиздат, 1963. — 512 с.

5. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы/ К. Ф. Теодорчик. М., Гостехиздат, 1952, — С. 367.

6. *Поздняк Э.Л.* О погрешностях метода малого параметра в задачах автоколебаний систем с двумя степенями свободы// Э.Л. Поздняк. Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 3. – Киев: Издательство Института математики АН УССР, 1970, — С. 618.