УДК 62-50

СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина

Воронежский государственный университет

Для объекта с распределенными параметрами рассматривается метод построения модального регулятора, обеспечивающего заданное распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы. Процедура синтеза позволяет получить передаточную функцию регулятора непосредственно по передаточной функции объекта. Метод синтеза модального регулятора сводится к решению интерполяционной задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления объектами с распределенными параметрами представляет собой одну из актуальных проблем теории автоматического управления. Об этом свидетельствует появление в отечественных и зарубежных изданиях многочисленных публикаций как теоретического, так и прикладного характера, проведение различных конференций и симпозиумов, посвященных этой проблеме. Трудно указать какую-нибудь естественно-научную, техническую или промышленную область, где бы не возникали задачи, связанные с использованием объектов с распределенными параметрами [1, 2]. Кроме того, интерес исследователей к данной проблеме объясняется тем, что объекты с распределенными параметрами, являясь бесконечномерными, описываются трансцендентными передаточными функциями. Это обстоятельство не позволяет непосредственно применять к объектам с распределенными параметрами методы теории автоматического управления объектами с сосредоточенными параметрами.

Настоящая статья посвящена методу синтеза распределенных систем управления с помощью передаточных функций. Предлагаемый метод дает возможность проектировать не только свободное, но и вынужденное движение замкнутой системы управления, учитывая априорную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Класс реализуемых модальных регуляторов, полученный с помощью рассматриваемого в данной статье метода, включает регуляторы Смита для объектов с запаздыванием [3, 4].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел. Пусть передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W(p) = W_0(p)\Psi(p), \qquad (1)$$

где

$$W_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)},\ A(p) \in \mathfrak{R}_m,\ B(p) \in \mathfrak{R}_l,\ m \ge l, \qquad (2)$$

функция $\Psi(p)$ комплексной переменной p является аналитической в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Для заданной передаточной функции $W(p)$ объекта управления (1) и заданного полинома $D(p) \in \mathfrak{R}_n$ требуется определить дробно-рациональную передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V_0(p) = \frac{S(p)}{R(p)},\ \deg S \le \deg R, \qquad (3)$$

с компенсирующей обратной связью, чтобы передаточная функция замкнутой системы управления по управляющему воздействию, структурная схема которой изображена на рис. 1, имела вид

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}\Psi(p),\ \deg Q \le \deg D, \qquad (4)$$

и учитывала полезную информацию о задающем воздействии $g(t)$ и внешнем возмущении $f(t)$. Здесь $Q(p)$ — некоторый алгебраический многочлен, у которого $k \in \mathbb{Z}_0$ коэффициентов являются произвольными. Общий вид многочлена $Q(p)$ будет выписан ниже. Произвольные коэффициенты многочлена $Q(p)$ влияют на распределение только нулей передаточной функции $\Phi(p)$.

Следуя принципу поглощения [5], классы задающих воздействий и внешних возмущений описываются линейными дифференциальными операторами $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$, аннулирующими соответственно задание $g(t)$ и возмущение $f(t)$, т.е.

$$L_1(\sigma)g(t) = 0,\ L_2(\sigma)f(t) = 0,\ \sigma = \frac{d}{dt}. \qquad (5)$$

Конкретные представители классов задающих и возмущающих воздействий определяются начальными условиями дифференциальных уравнений (5).

3. СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом синтеза модальных регуляторов, изложенным в [6, 7]. На основе блок-схемы (см. рис.) можно получить зависимость между изображениями по Лапласу $Y(p)$, $G(p)$ и $F(p)$ сигналов $y(t)$, $g(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{V_0(p)W(p)}{1 + V_0(p)W_0(p)} G(p) + \\ &+ \frac{W(p)\left[1 + V(p)\left(W_0(p) - W(p)\right)\right]}{1 + V_0(p)W_0(p)} F(p). \end{aligned} \qquad (6)$$

Отсюда находим передаточную функцию замкнутой системы по заданию

$$\Phi(p) = \frac{V_0(p)W(p)}{1 + W_0(p)V_0(p)}.$$

Принимая во внимание условие (4) и формулы (1)—(3), получаем систему полиномиальных уравнений относительно $S(p)$ и $R(p)$

$$B(p)S(p) = Q(p),$$
$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p).$$

Очевидно, что при известном $S(p)$ многочлен $Q(p)$ полностью определен. Таким образом, для решения поставленной задачи требуется решить следующее полиномиальное уравнение:

$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \qquad (7)$$

Для того чтобы многочлен $Q(p)$ имел k произвольных коэффициентов, решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\begin{aligned} S(p) &= S_0(p) + A(p)C(p), \\ R(p) &= R_0(p) - B(p)C(p), \end{aligned} \qquad (8)$$

где $C(p) \in \Re_{k-1}$ — произвольный полином, а многочлены $S_0(p)$ и $R_0(p)$ являются решением полиномиального уравнения

$$B(p)S_0(p) + A(p)R_0(p) = D(p). \qquad (9)$$

Замечание 1. *Если* $k = 0$, *то полагаем* $C(p) \equiv 0$.

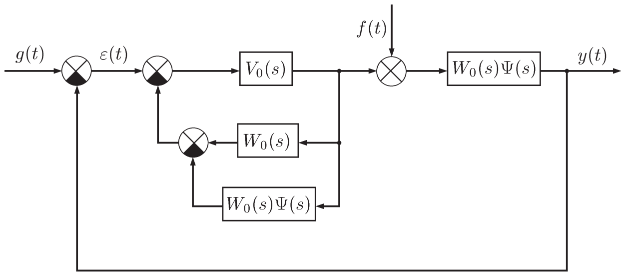

Рис. 1

Имеет место следующая теорема [7].

Теорема 1. *Если многочлены* $A(p) \in \Re_m$ *и* $B(p) \in \Re_l$, $m \ge l$, *взаимно простые, то для любого полинома* $D(p) \in \Re_n$, $n \ge m + l$, *существует единственная пара многочленов* $S_0(p) \in \Re_{m-1}$ *и* $R_0(p) \in \Re_{n-m}$, *являющаяся решением полиномиального уравнения (9).*

Доказательство. Обозначим через $a \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, \mu}$, различные корни кратности ν_i многочлена $A(p)$, $\sum_{i=1}^{\mu} \nu_i = m$. По условию теоремы

$$B(\alpha_i) \ne 0 \quad \forall i = \overline{1, \mu}. \qquad (10)$$

Тогда, дифференцируя ρ_i раз ($\rho_i = \overline{0, \nu_i - 1}$) уравнение (9), получаем следующую интерполяционную задачу:

$$\left[B(p)S_0(p)\right]^{(\rho_i)}_{p=\alpha_i} = D^{(\rho_i)}(\alpha_i), \qquad (11)$$

или, что тоже,

$$S_0^{(\rho_i)}(\alpha_i) = \left[\frac{D(p)}{B(p)}\right]^{(\rho_i)}_{p=\alpha_i}. \qquad (12)$$

Поскольку все α_i различны и справедливо неравенство (10), то, как показано в [8], существует единственный полином $S_0(p)$ степени $m - 1$, удовлетворяющий условию (12). При этом $S_0(p)$ представляет собой интерполяционный многочлен Эрмита. Так как условие (11) выполняется, то многочлен $D(p) - B(p)S_0(p)$ единственным способом делится без остатка на многочлен $A(p)$, то есть

$$R_0(p) = \frac{D(p) - B(p)S_0(p)}{A(p)}. \qquad (13)$$

В силу условия $n \ge m + l$ имеем неравенство $\deg D = n > m + l - 1 = \deg BS_0$. Поэтому, принимая во внимание (13), получаем $\deg R_0 = n - m$.

Докажем теперь, что коэффициенты многочленов $S_0(p)$ и $R_0(p)$ являются действительными числами. В самом деле, полиномиальное уравнение (9) можно представить в виде линейной системы алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, в которой неизвестными являются коэффициенты многочленов $S_0(p)$ и $R_0(p)$. Решением такой системы могут быть только действительные числа. Однако выше было показано, что пара многочленов $S_0(p)$ и $R_0(p)$ является единственным решением уравнения (9), а значит и соответствующей линейной системы. Теорема доказана.

Замечание 2. *Если многочлен $A(p)$ имеет нулевую степень $\deg A = m = 0$, т.е. $A(p) = \text{const}$, то полагаем $S_0(p) \equiv 1$ и поэтому $\deg S_0 = 0$.*

Следствие 1. *Из теоремы 1 и формулы Эрмита* [8] *следует, что*

$$S_0(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{A(s) - A(p)}{A(s)(s-p)} \frac{D(s)}{B(s)} ds,$$

где Γ — контур, содержащий все корни α_i многочлена $A(p)$.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда многочлен $S_0(p)$ определяется следующей формулой:*

$$S_0(p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{\nu_i - 1} \frac{A(p)}{(p-\alpha_i)^{r+1}} \sum_{l=r}^{\nu_i - 1} \left[\frac{(s-\alpha_i)^{\nu_i}}{A(s)} \right]_{s=\alpha_i}^{(\nu_i - 1 - l)} \times$$

$$\times \left[\frac{D(s)}{B(s)} \right]_{s=\alpha_i}^{(l-r)} \frac{1}{(\nu_i - 1 - l)!(l-r)!}.$$

Таким образом, передаточная функция конечномерного регулятора задается следующей формулой:

$$V_0(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{S_0(p) + A(p)C(p)}{R_0(p) - B(p)C(p)} \qquad (14)$$

и соответствующая передаточная функция регулятора $V(p)$ с компенсирующей обратной связью приобретает вид

$$V(p) = \frac{V_0(p)}{1 + V_0(p) W_0(p) \left[1 - \Psi(p)\right]}. \qquad (15)$$

Отсюда, учитывая формулы (2), (8) и (14), окончательно получаем

$$V(p) = \frac{S(p)A(p)}{D(p) - S(p)B(p)\Psi(p)} = \frac{\left[S_0(p) - A(p)C(p)\right]A(p)}{D(p) - \left[S_0(p) - A(p)C(p)\right]B(p)\Psi(p)}. \qquad (16)$$

Справедлива следующая теорема [8].

Теорема 2. *Передаточная функция регулятора (14) всегда реализуема, если выполняется неравенство*

$$n \geq m + \chi + k, \; \chi = \max\left\{m-1, l\right\}. \qquad (17)$$

Доказательство. Условие реализуемости передаточной функции регулятора (14) определяется неравенством

$$\deg R \geq \deg S. \qquad (18)$$

Если неравенство (17) справедливо, то согласно теореме 1 и очевидному неравенству $\chi \geq l$ имеем $\deg R_0 = n - m > l + k - 1 = \deg BC$ и $\deg S_0 = m - 1 \leq m - 1 + k = \deg S$. Поэтому $\deg R = n - m$ и $\deg S = m - 1 + k$. Таким образом, условие (17) гарантирует выполнение неравенства (18).

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ЗАДАННЫХ КЛАССАХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Для повышения качества управления определим передаточную функцию регулятора, использующего полезную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Обозначим через $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,\mu}$, различные корни кратности ν_i многочлена $L(p) = L_1(p)L_2(p) \in \Re_r$, $\deg L_j = r_j$, $j = 1,2$, $r = r_1 + r_2$, $\sum_{i=1}^{r} \nu_i = \mu$, и рассмотрим следующую интерполяционную задачу:

$$\left[D(p) - S(p)B(p)\Psi(p)\right]_{p=\lambda_i}^{(\rho_i)} = L^{(\rho_i)}(\beta_i) = 0, \quad \rho_i = \overline{0, \nu_i - 1}, \; i = \overline{1,\mu}. \qquad (19)$$

Так как полином $S(p)$ определяется формулой (8), то интерполяционная задача (19) принимает вид

$$\left[D(p) - S_0(p)B(p)\Psi(p) + C(p)A(p)B(p)\Psi(p)\right]_{p=\beta_i}^{(\rho_i)} = 0.$$

Поэтому имеет место условие

$$C^{(\rho_i)}(\beta_i) = \left[\frac{S_0(p)B(p)\Psi(p) - D(p)}{A(p)B(p)\Psi(p)} \right]_{p=\beta_i}^{(\rho_i)}. \qquad (20)$$

Если функции $A(p)B(p)\Psi(p)$ и $L(p)$ являются взаимно простыми, то $A(\beta_i)B(\beta_i)\Psi(\beta_i) \neq 0$ и согласно [8] существует единственный интерполяционный полином Эрмита $C(p)$ степени $r-1$, удовлетворяющий условию (20). Кроме того, если $\Psi(\beta_i) \in \mathbb{R}$ для всех $\beta_i \in \mathbb{R}$ и $\overline{\Psi(\beta_i)} = \Psi(\bar{\beta}_i)$ для всех $\beta_i \in \mathbb{C}$, то $C(p) \in \Re_{r-1}$. Таким образом, за счет выбора соответствующих коэффициентов многочлена $C(p)$ решается задача проектирования вынужденного движения замкнутой системы управления. Действительно, согласно равенствам (5), (6) и (15) изображение по Лапласу $E(p)$ для ошибки регулирования $\varepsilon(t)$ определяется следующей формулой:

$$E(p) = \frac{1 + V_0(p)\big(W_0(p) - W(p)\big)}{1 + V_0(p)W_0(p)} \times$$
$$\times\left(\frac{G_0(p)}{L_1(p)} - \frac{W(p)F_0(p)}{L_2(p)}\right),$$

где $G_0(p)$ и $F_0(p)$ — алгебраические многочлены степени $r_1 - 1$ и $r_2 - 1$ соответственно, определяемые начальными условиями уравнений (5). Очевидно, что интерполяционная задача (19) может быть представлена в виде

$$D(p) - S(p)B(p)\Psi(p) = L(p)\Theta(p).$$

Здесь $\Theta(p)$ — некоторая функция, для которой справедливо следующее условие: $\Theta^{(\rho_i)}(\beta_i) \neq 0$, $\rho_i = \overline{0, \nu_i - 1}$, $i = \overline{1, \mu}$. Таким образом, имеет место равенство

$$E(p) = \frac{L_2(p)\Theta(p)G_0(p)}{D(p)} - \\ - \frac{B(p)\Psi(p)L_1(p)\Theta(p)F_0(p)}{A(p)D(p)}. \quad (21)$$

Из формулы (21) и теоремы Хевисайда о разложении [9] сразу вытекает следующий результат: если полиномы $A(p)$ и $D(p)$ являются гурвицевыми и выполнено условие (19), то ошибка регулирования $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех внешних воздействий, определяемых дифференциальными уравнениями (5). При этом, условие физической реализуемости передаточной функции регулятора $V_0(p)$, учитывающего полезную информацию о входных сигналах, определяется условием (17) при $k = r$. Анализ формулы (21) показывает, что поведение ошибки регулирования будет определяться не только полюсами передаточной функции замкнутой системы, но и полюсами передаточной функции объекта. Поэтому для нейтрального и неустойчивого объекта при наличии внешних возмущений или при ненулевых начальных условиях объекта система управления будет неработоспособной.

5. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим теперь метод синтеза модальных регуляторов для устойчивого объекта, т.е. когда многочлен $A(p)$ является гурвицевым. С этой целью введем следующие обозначения:

$$S_0(p) = \tilde{S}_0(p)A(p),\ D(p) = D_0(p)A(p).$$

Тогда полиномиальное уравнение (9) примет вид

$$\tilde{S}_0(p)B(p) + R_0(p) = D_0(p).$$

Нетрудно проверить, что решением этого полиномиального уравнения являются пары многочленов

$$\tilde{S}_0(p) = 0,\ R_0(p) = D_0(p), \text{ или} \\ \tilde{S}_0(p) = 1,\ R_0(p) = D_0(p) - B(p). \quad (22)$$

Принимая во внимание формулы (8), получаем равенства

$$S(p) = A(p)\left[\tilde{S}_0(p) - C(p)\right], \\ R(p) = R_0(p) + B(p)C(p). \quad (23)$$

В этом случае передаточные функции (14) и (16) имеют соответственно вид

$$V_0(p) = \frac{\left[\tilde{S}_0(p) - C(p)\right]A(p)}{R_0(p) + B(p)C(p)},$$
$$V(p) = \frac{\left[\tilde{S}_0(p) - C(p)\right]A(p)}{D_0(p) - \left[\tilde{S}_0(p) - C(p)\right]B(p)\Psi(p)}.$$

Отсюда сразу следует, что интерполяционная задача (19) принимает следующий вид:

$$\left[D_0(p) - \left(\tilde{S}_0(p) - C(p)\right)B(p)\Psi(p)\right]_{p=\beta_i}^{(\rho_i)} = 0, \\ \rho_i = \overline{0, \nu_i - 1},\ i = \overline{1, \mu}. \quad (24)$$

После элементарных преобразований находим

$$C^{(\rho_i)}(\beta_i) = \left[\frac{\tilde{S}_0(p)B(p)\Psi(p) - D_0(p)}{B(p)\Psi(p)}\right]_{p=\beta_i}^{(\rho_i)}.$$

Отметим, что условие физической реализуемости передаточной функции регулятора $V_0(p)$ определяется неравенством (17) при $k = r$.

6. ПРИМЕР

Пусть задана передаточная функция объекта управления с распределенными параметрами

$$W(p) = \frac{2 - p}{(p+2)\sqrt{p+1}}. \quad (25)$$

Здесь

$$W_0(p) = \frac{2 - p}{p + 2},\quad \Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}}.$$

Поэтому

$$B(p) = 2 - p,\ l = 1,\ A(p) = p + 2,\ m = 1.$$

Синтезируем астатический регулятор $V(p)$ с компенсирующей обратной связью для объекта (25). Так как полином $A(p)$ является гурвицевым, то воспользуемся методом синтеза регуляторов, изложенным в п. 4. Положим $L_1(p) = L(p) = p$, $r = 1$. Условие реализуемости регулятора определяется неравенством (17), т. е. $n \geq 1$.

Пусть $n = 3$ и $D(p) = (p+2)^3$. В этом случае $D_0(p) = (p+2)^2$ и согласно (22) и (23) имеем $\tilde{S}_0(p) = 0$, $R_0(p) = (p+2)^2$. Тогда, принимая во внимание формулы (23), находим

$$S(p) = -(p+2)C(p),\ R(p) = (p+2)^2 + (2-p)C(p).$$

Здесь $C(p)$ — полином нулевой степени со свободным коэффициентом. Для того чтобы регулятор был астатическим, выберем полином $C(p)$, удовлетворяющим следующей интерполяционной задаче (24):

$$\left[(p+2)^2 + \frac{C(p)(2-p)}{\sqrt{p+1}}\right]_{p=0} = 0.$$

Отсюда находим $C(p) = -2$. Таким образом,

$$S(p) = 2(p+2),\ R(p) = p(p+6).$$

Окончательно получаем передаточные функции регулятора

$$V_0(p) = \frac{2(p+2)}{p(p+6)},\ V(p) = \frac{2(p+2)\sqrt{p+1}}{(p+2)^2\sqrt{p+1} + 2(p-2)}.$$

Передаточная функции замкнутой системы при этом имеет вид

$$\mathbf{\Phi}(p) = \frac{2(p+2)(2-p)}{(p+2)^3\sqrt{p+1}} = \frac{2(2-p)}{(p+2)^2\sqrt{p+1}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.

2. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. — М.: Машиностроение, 1974. — 328 с.

3. *Smith O. J. M.* Closer Control of Loops with Dead Time // Chem. Eng. Progr. —1957. — V. 53. — P. 217.

4. *Лозгачев Г. И., Тучинский С. В.* Построение модального регулятора для объекта с запаздыванием по передаточной функции замкнутой системы // Нелинейная динамика и управление. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Вып. 1. — С. 151—154.

5. *Вишняков А. Н., Цыпкин Я. З.* Синтез модальных дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 7. — С. 86—94.

6. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристических полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 4. — С. 17—20.

7. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез модальных систем управления // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2004. — Вып. 1. — С. 103—109.

8. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. — 508 с.

9. *Теория* автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1986. — 367 с.

Статья принята к опубликованию
25 декабря 2006 г.