

О МЕТОДЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАКОПЛЕНИЯ ОТХОДОВ

И. К. Астанин, В. К. Астанин, А. И. Ясаков

*Воронежский государственный университет
Воронежский госагроуниверситет им. К. Д. Глинки*

В статье рассмотрены математические модели динамики разложения промышленных и бытовых отходов на полигоне отходов с учетом колебаний от внешних воздействий, например, сезонных. Предложена математическая модель прогнозирования накопления отходов на полигоне с учетом динамики их разложения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Производственная деятельность, жизнедеятельность человека сопровождается образованием отходов. Бурное развитие техносферы привело к тому, что утилизация отходов вышла на передний план антропогенного воздействия человека на природу. Доминирующим способом утилизации отходов остается захоронение на свалках и полигонах. Разложение отходов растянуто во времени. На свалки и полигоны поступают новые порции отходов, причем количество их с каждым годом увеличивается. Происходит накопление отходов и их запасы приближаются к опасной для человека черте. Для контроля ситуации с отходами необходимы математические модели накопления отходов с учетом разложения ранее захороненных партий.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ И БЫТОВЫХ ОТХОДОВ

Прежде всего необходимо описать динамику разложения отходов. Для этого составим дифференциальное уравнение изменения массы отходов путем естественного разложения. Как показывают исследования, скорость разложения отходов $m'(t)$ пропорциональна массе отходов $m(t)$ с переменным коэффициентом $k=k(t)$. Функцию $k(t)$ с достаточной степенью точности можно принять равной $\frac{-1}{a+b \cdot t}$ где значения параметров a, b зависят от состояния конкретного полигона. Тогда

$$m'(t) = \frac{-1}{a+b \cdot t} \cdot m(t) \text{ при } m(0) = Q, \quad (1)$$

где Q — количество отходов, заложенное в начальный период.

Решая дифференциальное уравнение (1), получим изменение массы отходов в зависимости от времени

$$m(t) = Q \cdot \sqrt{\frac{a}{a+b \cdot t}}.$$

Типичная кривая величины оставшихся отходов по мере их разложения (при $Q=10, a=1,5, b=2$) представлена на рис. 1.

Для других типов полигонов на скорость разложения отходов $m'(t)$ оказывает влияние сезонная цикличность, что приводит к рассмотрению дифференциального уравнения

$$m'(t) = -k \cdot m(t) + r \cdot \sin \omega t \text{ при } m(0) = Q, \quad (2)$$

где параметр ω определяет цикличность воздействия, а параметр r — его амплитуду.

Решим дифференциальное уравнение (2). Общее решение однородного уравнения $m'(t) = -k \cdot m(t)$ имеет вид $C \cdot e^{-k \cdot t}$, где C — произвольная постоянная. Найдем частное решение неоднородного уравнения (2) в виде $m(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cos \omega t$ с неопределенными коэффициентами A и B . Подставим выражение $A \cdot \sin \omega t + B \cos \omega t$ в уравнение (2) и получим

$$A\omega \cdot \cos \omega t - B\omega \sin \omega t + Ak \cdot \sin \omega t + Bk \cos \omega t = r \cdot \sin \omega t.$$

откуда получаем значения неопределенных коэффициентов

$$A = \frac{k \cdot r}{k^2 + \omega^2}, B = -\frac{\omega \cdot r}{k^2 + \omega^2}.$$

Получаем общее решение дифференциального уравнения (2)

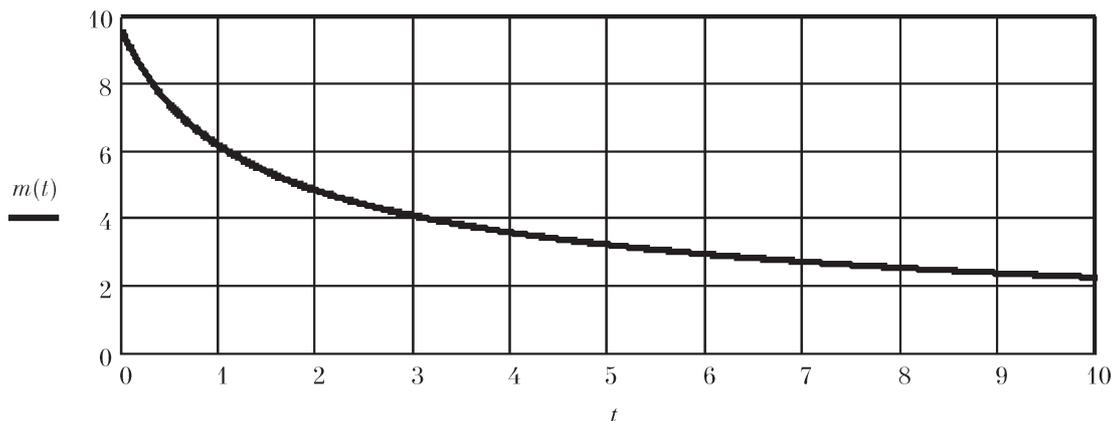


Рис. 1. Кривая изменения массы отходов по мере их разложения

$$m(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{k \cdot r}{k^2 + \omega^2} \cdot \sin \omega t - \frac{\omega \cdot r}{k^2 + \omega^2} \cdot \cos \omega t. \quad (3)$$

Решение (3) можно записать в более удобном виде

$$m(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right). \quad (4)$$

Постоянную величину C находим, используя условие (2). При $t=0$

$$m(0) = C + \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} = Q.$$

Отсюда

$$C = Q - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2}.$$

Тогда окончательно получаем изменение массы отходов в зависимости от времени

$$m(t) = \left(Q - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} \right) \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right). \quad (5)$$

Кривая (сплошная линия) величины оставшихся отходов по мере их разложения (при $Q=10$, $k=1,5$, $\omega=2$) представлена на рис. 2. Для сравнения показана пунктирная линия величины оставшихся отходов, когда внешнее взаимодействие отсутствует.

Итак, динамика разложения отходов подчиняется закону (5).

Рост образования отходов подчиняется линейному закону, т. е. через равные промежутки времени объем поступающих на свалки отходов увеличивается на определенную неизменную величину. Расчетная схема представлена на рис. 3. По оси абсцисс отложены равномерные промежутки времени, по оси ординат — величина

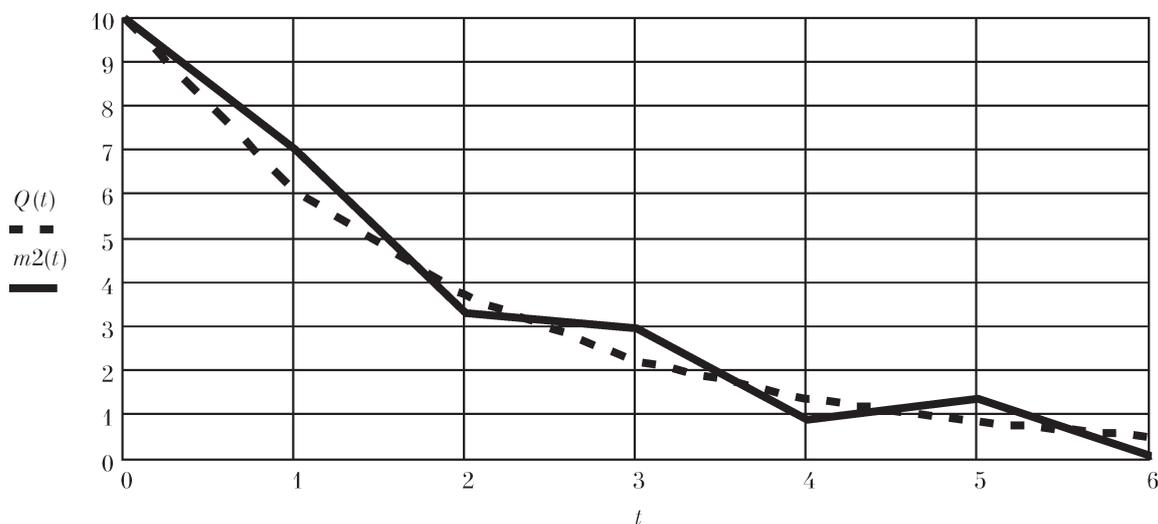


Рис. 2. Динамика изменения оставшихся отходов

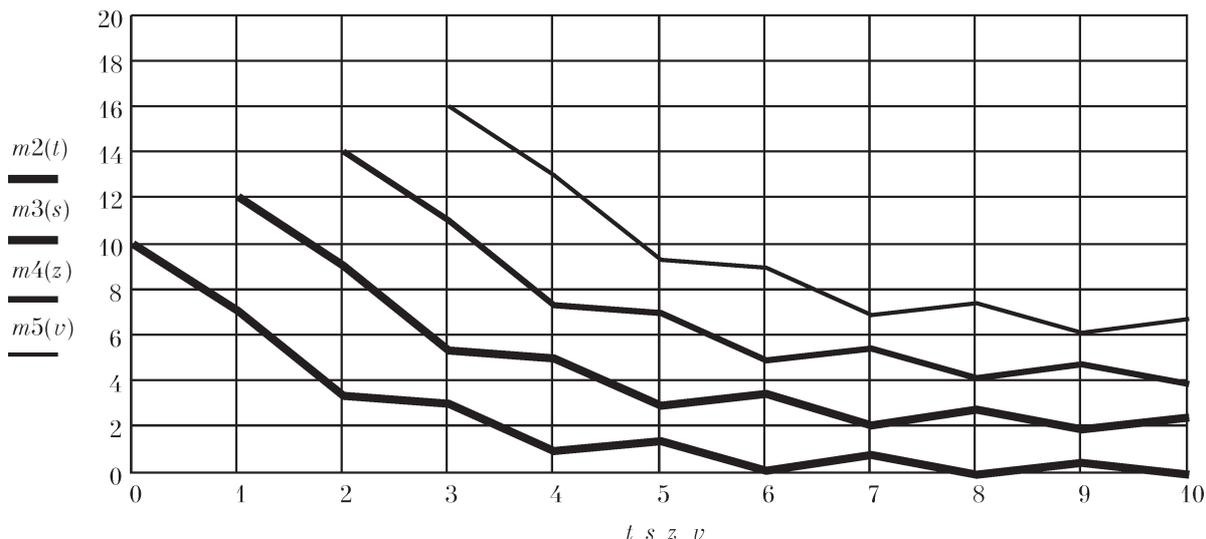


Рис. 3. Расчетная схема роста образования отходов

поступивших на свалку отходов. Кривые линии показывают величину оставшихся отходов по мере их разложения, учитывая выражение (5).

При этом каждая кривая будет представлена выражениями:

$$f_1(t) = \left(Q - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} \right) \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right), \quad (6)$$

$$f_2(t) = \left(Q + \Delta - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} \right) \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right), \quad (7)$$

$$f_3(t) = \left(Q + 2 \cdot \Delta - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} \right) \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right). \quad (8)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_{n+1}(t) = \left(Q + n \cdot \Delta - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} \right) \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right), \quad (9)$$

где Q — количество отходов, доставленное в начальный период, Δ — величина, на которую возрастает поступающее количество отходов за отрезок времени Δt , t — текущее время, k — показатель динамики разложения отходов. Количество рассматриваемых отрезков времени n равно $n = \frac{t}{\Delta t}$.

Накопление отходов в конечный момент времени будет выражаться суммой $F(t) = \sum_{i=1}^{i=n+1} f_i(t)$. Тогда

$$F(t) = W \cdot e^{-k \cdot t} + (W + \Delta) \cdot e^{-k \cdot (t-1)} + (W + 2 \cdot \Delta) \cdot e^{-k \cdot (t-2)} + \dots + (W + n \cdot \Delta) \cdot e^{-k \cdot (t-n)} + \frac{n \cdot r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right), \quad (10)$$

где $W = Q - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2}$. Поскольку $e^{-k \cdot (t-n)} = e^{-k \cdot t} \cdot e^{k \cdot n}$, то выражение из (10), содержащее величину W , приобретет вид

$$e^{-k \cdot t} [W + (W + \Delta) \cdot e^k + (W + 2 \cdot \Delta) \cdot e^{2 \cdot k} + \dots + (W + n \cdot \Delta) \cdot e^{n \cdot k}],$$

или

$$e^{-k \cdot t} [W \cdot (1 + e^k + e^{2 \cdot k} + \dots + e^{n \cdot k}) + \Delta \cdot (1 \cdot e^k + 2 \cdot e^{2 \cdot k} + \dots + n \cdot e^{n \cdot k})]. \quad (11)$$

Анализируя структуру выражения (11), нетрудно заметить, что сомножитель показателя поступления отходов W (выражение в скобках) представляет собой сумму бесконечного ряда, а сомножитель показателя Δ — ее производную. После преобразований выражение (11) примет вид

$$e^{-k \cdot t} \cdot \left[W \frac{e^{k \cdot (n+1)} - 1}{e^k - 1} + \Delta \frac{n \cdot e^{k \cdot (n+1)} \cdot (e^k - 1) - e^{k \cdot (n+1)} + e^k}{(e^k - 1)^2} \right].$$

Окончательно, объем отходов на полигоне выражается формулой

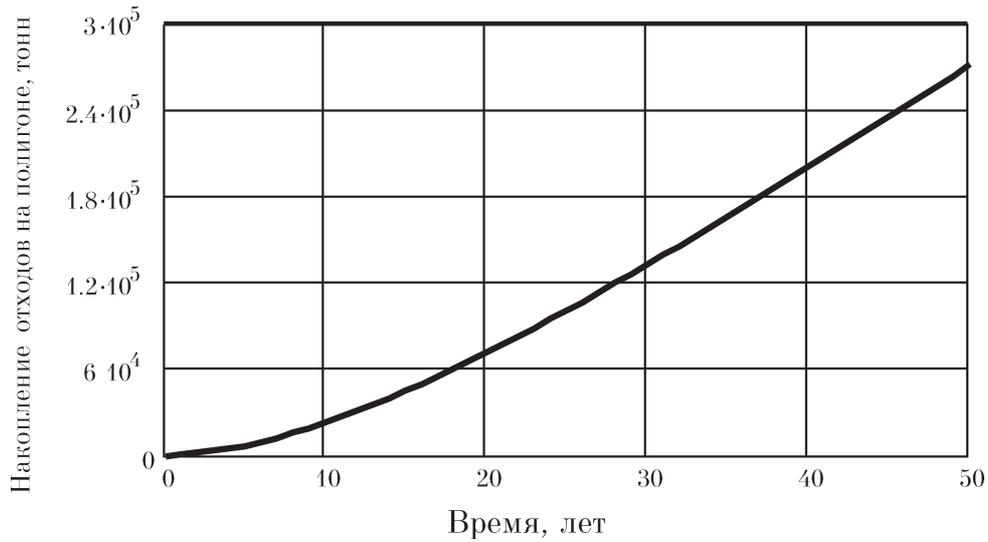


Рис. 4. График функции накопления отходов

$$\begin{aligned}
 F(t) = e^{-k \cdot t} \cdot \left[\left(Q - \frac{r \cdot \omega}{k^2 + \omega^2} \right) \frac{e^{k(n+1)} - 1}{e^k - 1} + \right. \\
 \left. + \Delta \frac{n \cdot e^{k(n+1)} \cdot (e^k - 1) - e^{k(n+1)} + e^k}{(e^k - 1)^2} \right] + \\
 + \frac{n \cdot r}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \cdot \sin \left(\omega t - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

График функции (12) представлен на рис. 4.

По графику видно, что с течением времени объем отходов увеличивается, причем динамика нарастания запасов не в пользу экологии. При утилизации отходов полимеров необходимо изыскивать новые технологии, при которых динамика накопления отходов будет снижаться.

Статья принята к опубликованию 25 декабря 2006 г.