УДК 62.50

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СТРУКТУРНОГО СОСТАВА НАСЕЛЕНИЯ

В. Г. Рудалев, А. И. Кремер

Воронежский государственный университет

Рассматривается возможность применения методов калмановской фильтрации к задачам текущего оценивания и прогнозирования характеристик возрастно-половой структуры населения региона. Обсуждается построение специальной демографической модели с целью применения ее в условиях поступления неполных и неточных данных текущих мониторингов населения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях актуальной задачей является оценка и прогнозирование численности и структурного состава населения регионов Российской Федерации. Ослабление системы государственного учета и невозможность проведения регулярных переписей при резком возрастании миграции населения приводит к необходимости решения задач оценки и прогнозирования динамики населения по неполным и неточным данным текущих мониторингов.

Представляется перспективным применение для этой цели математических моделей в виде уравнений состояния и базирующихся на них методов теории оптимальной фильтрации Калмана—Бьюси [1]. Фильтры Калмана—Бьюси (ФКБ) специально разработаны для использования в условиях неполных и неточных наблюдений но, в силу исторических причин, и проблем, обусловленных особенностями социальной сферы человеческой деятельности, чаще всего применяются в технических системах.

Существенными особенностями, отличающими демографические модели от моделей, применяемых, например, в управлении, радионавигации и связи, (а также более простых матричных моделей Лесли [2], применяемых для исследования биологических популяций), и затрудняющих применение методов ФКБ, являются:

- невозможность проведения активных экспериментов над объектом управления (человеческой популяцией) для более точного построения моделей;
- большое количество заранее неизвестных возмущающих факторов, нестационарность и стохастичность моделей [2];
- закономерности изменения параметров модели (коэффициентов рождаемости, смертности и др.) определяются не только биологическими возможностями популяции в конкретных условиях, но и многочисленными трудно предсказуемыми социально-экономическими, политическими и психологическими факторами;
- данные наблюдаются не непосредственно, а с помощью выборочных обследований, что приводит к большим ошибкам по сравнению с технологическими датчиками;
- «плавность» изменений численности, затрудняющая решение задачи идентификации модели на ограниченном временном отрезке.

Целью данной статьи является описание демографических систем в виде уравнения состояния и анализ возможностей использования ФКБ для решения задач текущего оценивания и прогнозирования численности и возрастно-полового состава населения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания демографической модели разобьем население региона на группы в соответствии с возрастом и полом. Если предположить, что величина временного интервала, охватывающего одну возрастную группу, равна 5 годам, то население региона состоит из 18 возрастных групп: 0—4 года, 5—9 лет, 10—14 лет, ..., 80—84 лет, 85 лет и старше.

В итоге динамика численности населения региона описывается следующими дискретными уравнениями состояния [3]:

$$X[k+1] = A[k]X[k] + U[k], \qquad (1)$$

$$Y[k] = CX[k], \qquad (2)$$

$$k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$X[0] = X_0.$$

Здесь $X[k] = \begin{bmatrix} X^F[k] \\ --- \\ X^M[k] \end{bmatrix}$ — вектор состояния, включающий два вектора — вектор состояния, описывающий динамику женского состава $X^F[k]$ и мужского $X^M[k]$ в зависимости от номера интервала текущего наблюдения k. Вектор $X^F[k]$ и, аналогично ему, $X^M[k]$, имеет вид

$$X^F[k] = \begin{bmatrix} x_1^F[k] \\ \dots\dots\dots \\ x_N^F[k] \end{bmatrix},$$

где N — число возрастных групп. Младшие индексы вектора соответствуют младшим возрастным группам. В векторе входных воздействий

$$U^T[k] = \left[u_1^{F\,T}[k], \dots, u_N^{F\,T}[k], u_1^{M\,T}[k], \dots, u_N^{M\,T}[k] \right]$$

i-й компонент описывает баланс миграции населения за пределы региона в i-й возрастной группе на k-м интервале наблюдения (и другие факторы, не учитываемые моделью, но влияющие на состав возрастных групп).

В общем случае вектор $U[k]$ является случайным процессом со средним значением $M\{U[k]\} = U^0$ и ковариационной матрицей $M\{(U[k]-U^0)^T(U[k]-U^0)\} = V_u$.

В уравнении (2) $Y[k]$ — вектор наблюдаемых значений структурного состава населения. Вид уравнения наблюдения (2) зависит от способа наблюдения. Если наблюдается общая численность населения, то C представляет собой вектор-строку $C = [1, 1, \dots, 1]$. Если наблюдению и учету подлежит вся совокупность с учетом возрастного состава, т.е. вектор $X[k]$, то C является диагональной матрицей $C = diag[1, 1, \dots, 1]$.

Во многих ситуациях доступными для текущего мониторинга могут быть число новорожденных, количество юношей призывного возраста, число пенсионеров и т.п. В этом случае соответствующие блоки матрицы C равны 1, а остальные — нулю. Кроме того, в качестве переменных наблюдения Y в уравнении (2) могут использоваться любые наблюдаемые показатели, корреляционная связь которых с численностью возрастных групп достаточно точно установлена. Тогда связь Y и X задается более сложным, в общем случае нелинейным уравнением. Единственное ограничение здесь состоит в соблюдении требования наблюдаемости системы (1), что гарантирует возможность оценки состояния.

Неточность наблюдений моделируется введением в уравнение (2) шума наблюдений $v[k]$:

$$Y[k] = CX[k] + v[k]. \qquad (3)$$

На практике обычно предполагают [1,2], что $v[k]$ есть последовательность некоррелированных случайных векторов со средним значением $Mv[k] = \overline{v}$ и ковариационной матрицей V_v.

Блочно-диагональная матрица $A[k]$ описывает динамику изменений возрастного состава населения. Ее структура зависит от величины временного интервала между k+1-м и k-м наблюдениями. Если упомянутый интервал равен продолжительности возрастной группы, то после истечения этого срока состав возрастной группы полностью изменится, и матрицу $A[k]$ можно представить в следующем виде:

$$A[k] = \left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{N-1} & \alpha_N & & & & & & \\
\beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\
0 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & 0 & & \\
. & . & . & . & . & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & \beta_N & & & & & & \\
\hdashline
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{N-1} & \gamma_N & 0 & 0 & . & . & \dots & 0 \\
 & & & & & & \delta_1 & 0 & . & . & . & 0 \\
 & & 0 & & & & 0 & \delta_2 & . & . & . & 0 \\
 & & & & & & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{N-1} & \delta_N
\end{array}\right].$$

Здесь α_i (соответственно γ_i) — это среднее число родившихся и выживших девочек (соответственно — мальчиков) на одну женщину i-й возрастной группы за интервал наблюдения. Разумеется, при малых i и при больших i значения коэффициентов рождаемости α_i, γ_i равны (точно или приблизительно) нулю. Параметры β_i, δ_i (коэффициенты передвижки) равны:

$$\beta_i = 1 - \varepsilon_i^F, \delta_i = 1 - \varepsilon_i^M,$$

где $\varepsilon_i^F, \varepsilon_i^M$ – коэффициенты смертности в i-й возрастной группе.

Уравнение (1) позволяет учесть основные демографические факторы:

1) рождаемость (коэффициенты α_i, γ_i);

2) смертность (β_i, δ_i);

3) миграцию (u^F, u^M);

4) старение населения, т. е. переход в следующую возрастную группу (левые нижние подматрицы диагональных блоков матрицы A).

Замечания.

• Следует подчеркнуть, что аргумент k у перечисленных выше параметров ($\beta_i[k], \gamma_i[k]$ и др.) опущен лишь для получения более компактной записи. В действительности значения параметров матриц A и C зависят от текущего момента времени k и меняются во времени случайным образом. Модель (1)—(2) можно классифицировать как нестационарную модель со случайными параметрами [4]. Методы идентификации таких моделей разработаны и изучены недостаточно.

• Можно предположить, что уменьшение интервала возрастной группы до одного года увеличит потенциальную «точность» модели, так как аналитик будет располагать большей детализацией и большим объемом выборки. С другой стороны, такое уменьшение вызовет увеличение размерности системы с 18 до 86. Но для решения многих практических задач (например, прогнозирования числа призывников или пенсионеров на небольшой отрезок времени) нет необходимости анализировать весь вектор состояния, поэтому реальная размерность может оказаться невелика. Следовательно, основным фактором, влияющим на выбор интервала возрастной группы при построении модели, должен быть объем и детализация информации, предоставленной статистическими органами.

3. МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Модель (1)—(2) является нестационарной и стохастичной, что затрудняет использование многих, ставших классическими подходов.

Например, *непосредственное решение системы разностных уравнений (1)* для расчета оценок состояния $X[k]$ во многих случаях затруднительно или не обеспечивает должной точности прогноза. Прежде всего, вектор $X[k]$ может наблюдаться не полно и не точно (см. уравнение (3)). Однако даже в случае полного и точного наблюдения (Y=X) проблемы неизбежны. Например, ошибки в определении начального условия $X[0]$ (структурного состава популяции на базовый момент времени) или матриц A, B, C оказывают негативное влияние на точность дальнейших оценок. Иногда при этом ошибки оценки состояния могут даже неограниченно возрастать из-за склонности демографических систем к неустойчивому поведению [2].

Методы регрессионного анализа. Разностные уравнения (1)—(2) допускают преобразование к эквивалентным уравнениям АРСС [1, 5]. Однако параметрами регрессионной модели остаются коэффициенты рождаемости и смертности, являющиеся нестационарными и неточно известными, а попытка их идентификации по данным численности населения приведет к смещенным оценкам из-за влияния ошибок измерений [5]. Потому представляется более перспективным использование методов регрессионного и спектрального анализа только для прогноза коэффициентов рождаемости и смертности. Например, с их помощью естественным образом описываются известные явления «волнообразности» демографических процессов, а полученные оценки и прогнозы могут быть далее использованы для уточнения параметров ФКБ.

Фильтр Калмана—Бьюси. Алгоритм ФКБ позволяет находить оценки структурного состава населения, описываемого вектором состояния $X[k]$, статистически оптимальным образом по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Задача оценивания по Калману заключается в определении оценок неизвестных текущих значений вектора состояния по известным данным наблюдения $Y[k]$, а прогнозирование выдает оценки на один шаг вперед.

Основным преимуществом ФКБ является наличие обратной связи по наблюдаемым данным, что при отсутствии шумов наблюдения в (3) гарантирует быструю сходимость оценок к истинным значениям, а при наличии шумов — оптимальный баланс между скоростью сходимости и помехоустойчивостью. Однако значения матриц A, B, C и статистических характеристик шумов (или их оценки) должны быть известны на каждом шаге алгоритма.

Для использования в демографических системах предпочтителен вариант ФКБ, вычисляющий оценку не текущего, а будущего вектора состояния $\hat{X}[k+1]$ на один шаг вперед [1]. Оценки состояния вырабатываются в реальном времени по мере поступления новых наблюдений $Y[k]$:

$$\hat{X}[k+1] = A\hat{X}[k] + \hat{U}[k] + \Gamma[k]\{Y[k] - C\hat{X}[k] - \bar{v}\}, \quad (4)$$
$$\hat{X}[0] = MX[0].$$

Здесь $\hat{X}[k]$ — искомая оценка (прогноз) вектора состояния, $\hat{U}[k]$ — оценка среднего значения баланса миграции населения, $\Gamma[k]$ — матрица коэффициентов усиления обратной связи фильтра, вычисляемая по следующим формулам

$$\Gamma[k] = A[k]P[k]C\{C^T P[k]C + V_v\}^{-1},$$

$$P[k+1] = A[k]P[k]A^T[k] + V_U - \Gamma[k]C^T P[k]A^T,$$
$$P[0] = P_0.$$

Здесь P_0 — заданная ковариационная матрица ошибки оценки начального состояния $X[0]$, V_U — ковариационная матрица входных шумов в уравнении [1].

Рассмотрим ситуацию, когда параметры уравнений состояний (коэффициенты рождаемости и смертности, уровни миграции) в уравнении (4) известны неточно и изменяются во времени случайным образом.

Очевидные, но достаточно эффективные подходы — использовать в качестве оценок неизвестных параметров их средние значения, полученные выборочным способом; экстраполировать на один шаг предыдущие оценки параметров; использовать для оценки параметров методы регрессионного анализа. Основанием для такого рода упрощений является возможность относительно низкой чувствительности ФК к ошибкам определения параметров моделей (при достаточно нежестких условиях), исследованная в работе [4].

Второй, более мощный и универсальный подход, сводится к совместной оценке состояния и идентификации параметров модели (1) на основе, например, расширенного фильтра Калмана или фильтра Пугачева [1]. Преимуществом здесь является возможность учета случайных изменений параметров модели за счет расширения вектора состояния, недостатком — усложнение алгоритма и возможное ухудшение сходимости [4].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование работы ФКБ выполнялось с помощью Windows-программы, написанной в среде Delphi. Программа работает в двух режимах — в режиме имитационного моделирования демографических процессов и в режиме обработки реальных статистических данных. Данные статистических наблюдений программа импортирует из таблиц MS Excel.

В режиме *имитационного моделирования* была протестирована работа ФКБ для прогнозирования структурного состава населения при известных показателях рождаемости, миграции и смертности и при отсутствии ошибок наблюдения. Прогноз сравнивался с данными, полученными в результате моделирования. Начальная оценка структурного состава при прогнозе выбиралась преднамеренно с большой относительной ошибкой 100 % (полагалась равной нулю). Те не менее скорость сходимости ФКБ, как и ожидалось, была достаточно высока. Уже на третьем шаге алгоритма прогноз совпал с истинными значениями с точностью до одного человека: отрицательная обратная связь компенсировала ошибки начальных данных.

Второй этап эксперимента проведен на реальных данных численности населения Воронежской области с 1995 по 2005 год (данные за предыдущие годы недоступны). Величина интервала возрастного состава равнялась 5 годам. Точная информация о коэффициентах рождаемости и смертности на момент написания статьи также была неизвестна. Поэтому были сделаны следующие достаточно «грубые» предположения. Баланс миграции полагался $U[k] = 0$, поэтому коэффициенты передвижки, совпадающие в данном случае с коэффициентами структурного сдвига, вычислялись методом наименьших квадратов непосредственно из уравнения (1). Малая величина интервала наблюдения в сочетании с медленным характером изменения численности не позволила аналогичным способом идентифицировать коэффициенты рождаемости по уравнению (1). Чтобы оценить возможности ФКБ при неточно известных параметрах модели, значения коэффициентов рождаемости преднамеренно задавались на 50 % меньше реальных значений.

При отсутствии ошибок наблюдения ковариационные матрицы входных и выходных шумов играют роль весовых матриц, выбором соотношения которых задаются динамические характеристики ФКБ. В данном примере это соотношение было выбрано сравнительно большим: $\|V_U\| / \|V_v\| = 10$. В итоге среднеквадратическая ошибка прогноза на 2005 год при использовании ФКБ оказалась в 1,5 раза меньше, чем при непосредственном решении уравнения (1). Следует отметить, что в старших возрастных группах гипотеза об отсутствии миграции является обоснованной, поэтому при обоих способах прогноз оказался близок к реальному значению. Например, количество женщин в возрасте 60—65 лет в 2005 году составляло 91421 чел., ФКБ сделал прогноз на основании данных 2000 г. 91463 чел., непосредственное использование уравнений (1) дало 90839 человек (см. рис. 1).

Несколько большие значения ошибок получены в средних возрастных группах (20—

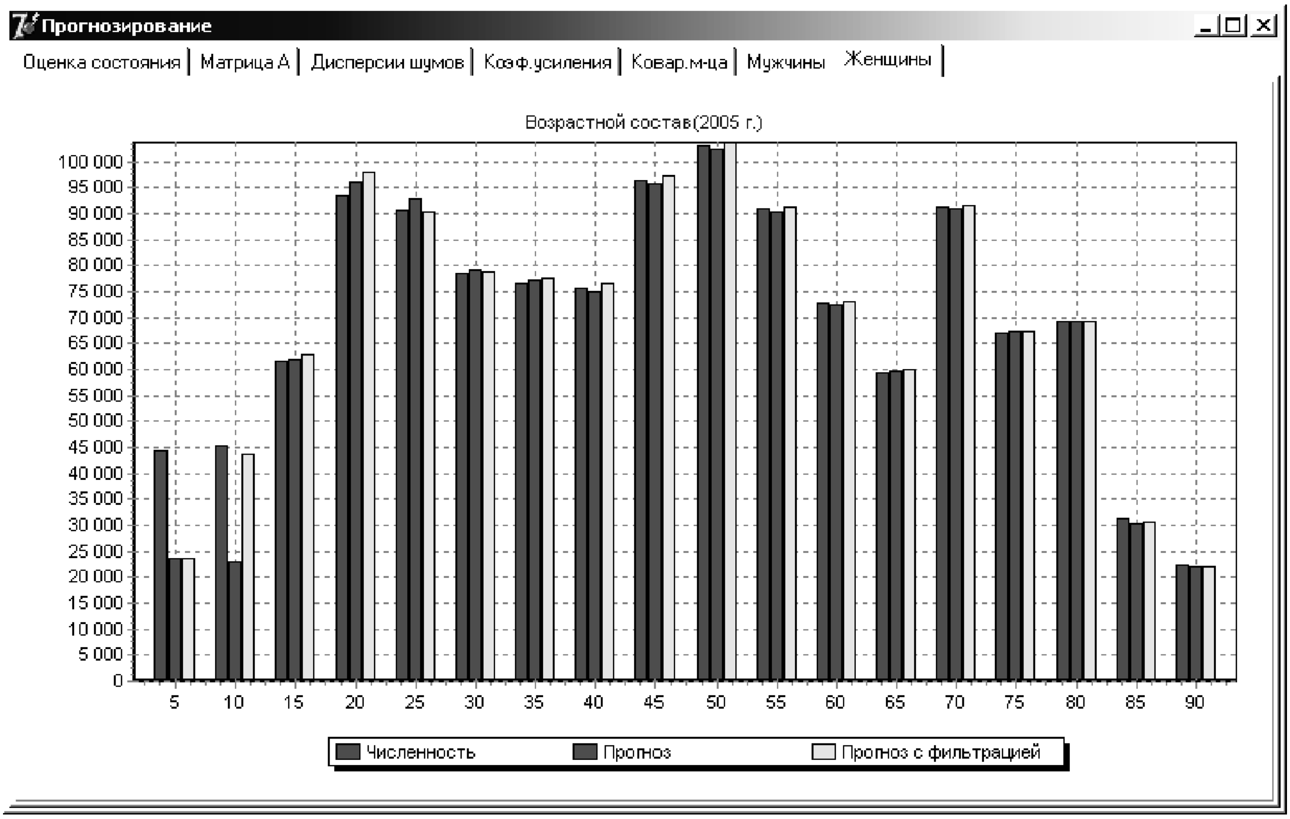

Рис. 1. Распределение численности женщин Воронежской области в 2005 г. по возрастам

40 лет), что вызвано неточностью оценок коэффициентов структурного сдвига и несостоятельностью сделанного ранее предположения об отсутствии миграции.

Следует отметить, что наибольший выигрыш ФКБ дает при прогнозе в младших возрастных группах, когда использовались заведомо ошибочные показатели рождаемости. Число девочек в возрасте от 5 до 10 лет в 2005 г. равнялось 45382. Прогноз при помощи ФКБ — 43671 чел., прогноз непосредственным решением уравнения (1) — 23106 чел. При более точных оценках коэффициентов рождаемости оба метода дают примерно одинаковую погрешность, но в целом при наличии ошибок модели применение ФКБ предпочтительно, что согласуется с результатами, полученными в работе [4].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты предварительного анализа рассмотренной в статье демографической модели свидетельствуют о перспективности применения современных методов фильтрации и управления, базирующихся на представлении систем в форме уравнений состояния, в задачах прогнозирования социально-демографических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева / И. Н. Синицын. — М.: Логос, 2006. — 640 с.

2. *Keyfitz M.* Applied Mathematical Demography / M. Keyfitz, H. Caswell. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 558 p.

3. *Рудалев В.Г.* Применение фильтрации Калмана в демографических моделях / В. Г. Рудалев, А. И. Кремер // Экономическое прогнозирование: модели и методы. Материалы международной научно-практической конференции. — ВГУ, 2006. — С. 300—304.

4. *Бухарин С.В.* Идентификация нестационарных М-систем обработки информации / С. В. Бухарин, В. Г. Рудалев, Б. И. Жилин. — Воронеж: ВИ МВД России, 2000. — 98 с.

5. *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл. — М.: Мир, 1990. — 584 с.

Статья принята к опубликованию 25 декабря 2006 г.