

## БИДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА ТРАЕКТОРИИ РАЗВИТИЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. Б. Баева\*, Н. Е. Красова\*\*

\*Воронежский государственный университет

\*\*Воронежское высшее военное авиационно-инженерное училище (военный институт)

В статье предлагается бидинамическая модель выбора траектории развития региональных экономических систем, учитывающая инфляцию издержек. Она позволяет выбрать из возможных вариантов сочетаний финансовых вложений в элементы региональной экономической системы, направляемых на развитие и увеличение уровня жизни населения, наилучший вариант, позволяющий достичь сбалансированного экономического роста. Предложен алгоритм решения поставленной задачи, представляющий собой модификацию метода Соболя для решения задач векторной оптимизации и двухэтапный алгоритм, сводящий решение исходной задачи общего вида к решению последовательности задач скалярной оптимизации.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Построение эффективных региональных экономических систем (РЭС) — актуальная теоретическая и важная практическая задача. В основе ее решения лежит такое изменение экономической и организационной работы в регионе, при которой имеет место постоянное и непрерывное совершенствование всех процессов обеспечивающих его эффективное функционирование и развитие.

Под *региональным развитием* нами будет пониматься *такое общественное развитие региона, при котором не разрушается его природная основа, создаваемые условия жизни не влекут деградации человека и социально-деструктивные процессы не развиваются до масштабов, угрожающих безопасности общества* [1]. Принципы и способы подготовки исходной информации для построения эффективных стратегий развития экономики регионов описаны в ряде работ достаточно обстоятельно (см., например, [1—5]). Особый интерес представляет работа [5] где описана агрегированная модель развития с учетом инноваций. Модель представляет собой задачу оптимального управления, в качестве критерия оптимальности рассмотрен максимум суммарного регионального дохода, за вычетом штрафа за экологические нарушения на заданном вре-

менном интервале при заданных начальных условиях.

Анализ названных выше работ позволил сделать вывод о том, что фундаментом решения задач успешного регионального развития является разработка специфического прикладного инструментария, создающего основу для разработки траекторий, обеспечивающих экономический рост, гармоничное изменение структурного устройства региона и рост качества жизни его населения.

Нам представляется, что в основу прикладного инструментария решения такого рода задач могут быть положены модели, алгоритмы и программы, описанные в работах [6—8]. При этом для прогнозирования развития РЭС в [6] были предложены способы моделирования и выбора основных стратегий развития, которые позволяют, не опираясь в значительной степени на историю процесса, осуществить догоняющее прогнозирование, т.е. движение к заранее определенному уровню регионального дохода. В [7] предлагается агрегированная модель выбора траектории развития, формулировка которой базируется на понимании развития как синтеза сбалансированного роста экономических показателей, принятых для оценки деятельности РЭС, и внутренней реструктуризации системы, как источника роста ее экономического потенциала. Весьма перспективным с нашей точки зрения является учет инфляции в моделях регионального развития. Общие принципы подходов к определению сущности и

аналитического вида инфляционной спирали, оценки потенциальной реакции цен на инфляционный импульс, условия, при которых РЭС находится в сбалансированном состоянии, изложены нами в [8]. Нерешенной, с нашей точки зрения, остается проблема учета инфляции при выборе направления эффективного функционирования и развития региональных экономических систем (РЭС) и разработки на этой основе различных сценариев.

Формулированию модели регионального развития, учитывающей инфляцию, и алгоритмов получения на ее основе траектории развития РЭС и посвящена настоящая статья.

## 2. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В основу модели, предлагаемой нами в настоящей статье, была положена агрегированная модель выбора траектории развития, сформулированная с использованием производственных функций для описания возможностей системы по выпуску продукции, и балансовых соотношений, учитывающих объем необходимых для сферы потребления товаров, для описания потребностей системы продукции для потребления. Подробно эта модель изложена нами в [6].

Система ограничений модели содержит три блока. Соотношения первого блока описывают возможности системы по производству продукции и рациональному распределению финансовых ресурсов. Второй блок ограничений представляет собой учет минимально необходимого выпуска продукции, обеспечивающего удовлетворение спроса сферы потребления. В основе этого блока лежат балансовые соотношения между производством и потреблением продукции. Третий блок содержит ограничения на использование дополнительных ресурсов и содержится ограничения на учет инфляции издержек. Аналитический вид правой части определяется избранным сценарием погашения инфляционного импульса. Подробно это изложено нами в [8].

С учетом сказанного модель развития региона, понимаемого как экономический рост, аналитически может быть описана в следующем виде.

$$F_1(p^{(t,\tau)}, x^t) = \max_{t,\tau} G_1(p^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \min_{x,p};$$

$$F_2(p^{(t,\tau)}, x^t) = \min_{t,\tau} G_2(p^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \max_{x,p};$$

$$I \begin{cases} p_i^{(t,\tau)} x_{it} \leq f_i(L_{it}, K_{it}); \\ K_{i(t)} = K_{i(t-1)} + \beta_{i(t)} \overline{\Delta K}_{i(t)}; L_{i(t)} = L_{i(t-1)} + \delta_{i(t)} \Delta L_{i(t)}; \\ 0 \leq \underline{\beta}_{i(\lambda_i)} \leq \beta_{i(t)} \leq \overline{\beta}_{i(\lambda_i)}; \\ \sum_{i=1}^n \beta_{i(t)} \leq 1; \\ 0 \leq \underline{\delta}_{i(\lambda_i)} \leq \delta_{i(t)} \leq \overline{\delta}_{i(\lambda_i)}; \\ \Delta L_{(t)} + \Delta K_{(t)} \leq \Phi_{(t)}; \end{cases}$$

$$II \begin{cases} p_j^{(t,\tau)} x_{jt} \geq \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} h_{ij}^t x_{it} + Z_j^{(t-1)} + \Delta Z_j^{(t)}; \\ p_i^{(t,\tau)} x_{it} \geq \sum_{j=1}^n p_j^{(t,\tau)} h_{ij}^t \frac{x_i^B}{x_j} \hat{x}_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} p_j^{(t,\tau)} K_{jt} \Delta x_{jt} + Y_{it}; \\ \chi_i p_i^{(t,\tau)} x_{it} \leq p_i^{(t,\tau)} Y_{it}; \\ \sum_{i=1}^n \Delta Z_i^{(t)} \leq Z_{(t)}^\Delta; \\ \overline{Z}_j^{(t)} \leq Z_j^{(t-1)} + \Delta Z_j^{(t)} \leq \overline{Z}_j^{(t)}; \\ \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} Y_{it} \leq J; \end{cases}$$

$$III \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} a_{v_i t} x_{it} \leq B_{v_t}^v; v = 1, 2, \dots, L^v; \end{cases}$$

$$IV \begin{cases} p_i^{(t,\tau+1)} = p_i^{(t,\tau)} + \frac{\Delta z_i^t}{\left(1 - \frac{x_i^B}{x_j^B}\right) x_i^t}; \end{cases}$$

$$K_{i(t_0)} = K_i^0, L_{i(t_0)} = L_i^0, x_{i_0} = x_i^0, x_{it} \geq 0$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; t = t_0, t_0 + 1, \dots, T; \tau = 1, 2, \dots, \tau_t,$$

Здесь  $p_i^{(t,\tau)}$  — цена на продукцию  $i$ -го сектора в момент времени  $(t, \tau)$ ;

$p_i^{(t,\tau+1)} = p_i^{(t,\tau)} + \frac{\Delta z_i^t}{\left(1 - \frac{x_i^B}{x_j^B}\right) x_i^t}$  — функция инфля-

ционной спирали, которая характеризует изменение цен, под воздействием инфляционного импульса  $\Delta z_i^t$ ,  $p_i^{(t,\tau)} x_{it}$  — валовой выпуск  $i$ -го сектора системы в стоимостном выражении;  $p_i^{(t,\tau)} h_{ij}^t x_{it}$  — межотраслевые потоки;  $p_j^{(t,\tau)} K_{jt} \Delta x_{jt}$  — величина конечного продукта, идущего на восстановление основных фондов, в момент времени  $t$  в стоимостном выражении;  $p_i^{(t,\tau)} Y_{it}$  — конечный продукт в стоимостном выражении;  $J$  — максимальный суммарный объем конечного продукта, необходимый для нормального функционирования системы,  $\chi_i$  — минимальная доля выпуска, идущего на

потребление;  $a_{i^v}(t)$  — норма затрат  $l^v$  ресурса на единицу валового выпуска  $i$ -го сектора в момент времени  $t$ ;  $B_{i^v}(t)$  — количество  $l^v$  ресурса, выделяемого всей системе в момент времени  $t$ ;  $\Delta K_{(t)}$  — средства, которые выделяются на прирост капитала в году  $t$ ;  $\Delta Z_{(t)}$  — прирост чистой продукции;  $Z_{(t)}^{\Delta}$  — максимально допустимая величина суммарного прироста чистой продукции;  $\Delta L_{(t)}$  — средства, которые выделяются на улучшение качества рабочей силы в году  $t$ ;  $\Phi_{(t)}$  — финансовые средства;  $T$  — горизонт планирования;  $t$  и  $\tau$  — параметры, соответственно, «медленного» и «быстрого» времени.

В качестве функций цели в данной модели использованы широко применяемые в экономико-математических исследованиях и экономическом анализе индексы цен  $G_1(p^{(t,\tau)}, x^t)$  и индексы объемов  $G_2(p^{(t,\tau)}, x^t)$ , рассчитываемые в виде

$$G_1(p^{(t,\tau)}, x^t) = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^{(t,\tau)} x_i^t}{\sum_{i=1}^N p_i^{(t,\tau-\bar{\tau})} x_i^t}; \quad (1)$$

$$G_2(p^{(t,\tau)}, x^t) = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^{(t,\tau)} x_i^t}{\sum_{i=1}^N p_i^{(t,\tau)} x_i^{t-1}}; \quad (2)$$

$$t = t_0, t_0 + 1, \dots, T; \quad \tau = 1, 2, \dots, \tau_t.$$

В модели динамика всех параметров определяется изменением медленного времени, быстрого времени или и быстрого, и медленного. Для всех приведенных параметров модели разработаны инструкции их отыскания на основе региональной статистики. В этих условиях сформулированная модель разрешима. Она позволяет определить балансовую равновесную траекторию развития РЭС  $\{p^{(t,\tau)}, x_t\}$ , сопряженные с объемами валового продукта объемы конечной ( $Y$ ) и чистой продукции ( $Z$ ), а также распределение финансовых средств. Эта модель создает основу для построения системы поддержки принятия решений при выборе сценариев устойчивого развития экономики региона.

Необходимо отметить, что на основе предложенной модели фактически определяются «узловые» точки балансовую равновесной траектории. В этих точках за счет управляющих воздействий администрации региона (имеющих дискретный по времени характер) обеспечивается совпадение реальной траектории функци-

онирования РЭС с расчетной.

Исследование предлагаемой модели позволяет отметить следующие ее важные особенности.

Во-первых, она недоопределена и для записи ее в виде корректной математической задачи требуется введения некоторого интегрального принципа оптимальности [9].

Во-вторых, система ограничений представляет собой непустое, замкнутое, необязательно выпуклое, слабозаполненное множество с частично нелинейной границей.

В-третьих, следует отметить, что в системе находятся параметры, меняющиеся в различных временных шкалах и поэтому она, по сути, является бидинамической. Бидинамическая система оперирует понятиями «быстрого» и «медленного» времени. Имеется в виду, что, как правило, промежутки «медленного» времени — годы, а промежутки «быстрого» времени — месяцы. Кроме того, границы этих интервалов для реальных экономических процессов не всегда совпадают. Исходя из бидинамического характера модели, система ограничений имеет специфическую структуру, которая представлена на рисунке 1.

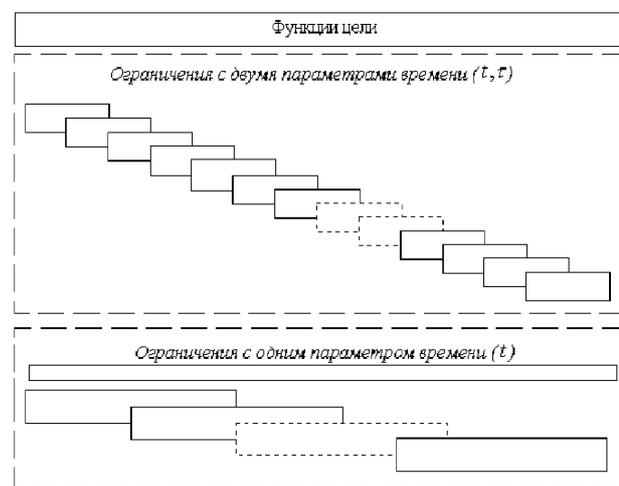


Рис. 1. Схема структуры бидинамической модели выбора траектории развития

Рассматриваемая модель представляет собой задачу векторной нелинейной оптимизации с разнонаправленными критериями. В таких, называемых в литературе, «неоднородными» задачах нередко используется идея введения приоритетов критериев. Мы же будем предполагать, что в данной задаче критерии имеют одинаковый порядок важности.

Особенности структуры рассматриваемой модели определили выбор метода получения на ее основе решения. Нами предлагается два подхода. Первый является модификацией метода Соболя [10,11], адаптированным для решения бидинамической задачи с двумя функциями цели. Второй основан на использовании специфики структуры ограничений рассмотренной выше задачи и представляет собой двухэтапный итерационный алгоритм. К описанию особенностей реализации предлагаемых методов мы и перейдем.

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ БИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЫБОРА ТРАЕКТОРИИ РАЗВИТИЯ, КАК ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предлагаемый для решения бидинамической задачи выбора траектории развития региональных экономических систем с учетом инфляции алгоритм представляет собой, в сущности, модификацию метода Соболя для решения задач векторной оптимизации. Перепишем сформулированную ранее модель в следующем обобщенном виде:

$$F_1(p^{(t,\tau)}, x^t) = \max_{t,\tau} G_1(p^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \min_{x,p}; \quad (3)$$

$$F_2(p^{(t,\tau)}, x^t) = \min_{t,\tau} G_2(p^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \max_{x,p}; \quad (4)$$

$$(p^{(t,\tau)}, x^t) \in D; \quad (5)$$

$$\underline{x}^t \leq x^t \leq \overline{x}^t; \quad (6)$$

$$\underline{p}^{(t,\tau)} \leq p^{(t,\tau)} \leq \overline{p}^{(t,\tau)}. \quad (7)$$

Ограничения (6)-(7) введены для возможности осуществления основных шагов метода Соболя,  $D$  — замкнутое выпуклое множество, определяемое ограничениями описанной выше модели выбора траектории развития региональных экономических систем с учетом инфляции.

Основные шаги предлагаемого алгоритма приведены ниже.

1°. Дискретизация множества, определяемого ограничениями (5) — (7), т.е. замена его множеством  $D_f$  состоящим из конечного числа точек множества  $D$ .

2°. Фильтрация построенного дискретного допустимого множества, т.е. построение разреженного множества  $D_{fd} \subset D_f$ .

3°. Построение множества эффективных точек  $P_r$  следующей дискретной задачи:

$$F_1(p^{(t,\tau)}, x^t) = \max_{t,\tau} G_1(p^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \min_{x,p};$$

$$F_2(p^{(t,\tau)}, x^t) = \min_{t,\tau} G_2(p^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \max_{x,p};$$

$$(p^{(t,\tau)}, x^t) \in D_{fd};$$

$$\underline{x}^t \leq x^t \leq \overline{x}^t;$$

$$\underline{p}^{(t,\tau)} \leq p^{(t,\tau)} \leq \overline{p}^{(t,\tau)}.$$

Здесь  $D_{fd}$  — дискретный аналог допустимого множества исходной задачи выбора траектории развития региональных экономических систем с учетом инфляции

4°. Выбор оптимального решения исходной задачи на основе множества эффективных точек  $P_r$ , построенного на предыдущем этапе, и дополнительного критерия оптимизации.

Рассмотрим подробнее и отметим особенности реализации некоторых шагов предлагаемого алгоритма.

*Дискретизация множества*, определяемого ограничениями (5)-(7), фактически заключается в выделении в нем определенного числа векторов  $(p_k^{(t,\tau)}, x_k^t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_f$  заполняющих множество допустимых точек и репрезентативно его представляющих. Ограничения (6) — (7) выделяют в рассматриваемом пространстве  $R^{2n}$  гиперпараллелепипед, для равномерного заполнения которого предлагается применить алгоритм, основанный на методе Соболя. Этот алгоритм содержит задание необходимого числа точек  $N_f$ , расчет очередной точки  $Q_k = (q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{2nk})$  из ЛП<sub>τ</sub>-последовательности [10].

После этого с помощью точки  $Q_k = (q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{2nk})$  вычисляются координаты вектора  $(p_k^{(t,\tau)}, x_k^t)$  следующим образом:

$$p^{(t,\tau)}_{ik} = \underline{p}^{(t,\tau)}_i + \left( \overline{p}^{(t,\tau)}_i - \underline{p}^{(t,\tau)}_i \right) q_{ik}, i = 1, 2, \dots, n;$$

$$x^t_{ik} = \underline{x}^t_i + \left( \overline{x}^t_i - \underline{x}^t_i \right) q_{i+nk}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Далее осуществляется проверка допустимости полученной точки  $(p_k^{(t,\tau)}, x_k^t)$ , т.е. проверяется ее принадлежность  $D$  путем подстановки в ограничения рассмотренной выше задачи. Шаги повторяются до тех пор, пока не выполнено следующее условие  $N_f > 2^{20}$  и  $k > N_f$ .

Реализация предложенного алгоритма существенным образом зависит от способа расчетов точки  $Q_k = (q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{2nk})$ . Эти расчеты могут быть осуществлены, например, на основе, так называемых, «направляющих чисел», значения

которых при  $1 \leq j \leq 51, 1 \leq l \leq 20$  приведены в [10, 11]. Таким образом, в результате применения описанных выше шагов строятся последовательности точек в гиперпараллелепипеде размерности  $n \leq 51$ .

В работе [10] предложен сверхбыстрый алгоритм расчета ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей, в котором порядок следования точек  $Q_k = (q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{2nk})$  меняется так, чтобы каждая следующая точка  $Q_k$  вычислялась по предыдущей точке  $Q_{k-1}$  с помощью одной операции поразрядного сложения по модулю два в двоичной системе, т.е. операции  $\otimes$  (исключающее ИЛИ). Назовем величину  $\Gamma(k)$ , определяемую по правилу:  $\Gamma(k) = k \otimes [k/2]$ , где  $[k/2]$  – целая часть  $k/2$ , кодом Грея, соответствующим номеру  $k$ . Отметим, что два соседних кода  $\Gamma(k)$  и  $\Gamma(k-1)$  всегда различаются в одном и только в одном разряде  $l = l(k)$ , номер которого можно вычислить по формуле:  $l = 1 + \log_2[\Gamma(k) \otimes \Gamma(k-1)]$ .

Таким образом, применение описанных выше шагов позволяет построить дискретный аналог множества допустимых значений исходной задачи. Обозначим его через  $D_f = \{(p_k^{(t,\tau)}, x_k^t), k = 1, 2, \dots, N_f\}$ .

Следующим шагом является фильтрация построенного дискретного множества  $D_f$ . Различают прямую и обратную фильтрацию.

Прямая фильтрация заключается в выделении  $N$  точек, отстоящих друг от друга на расстояние, не меньше наперед заданного.

Обратная фильтрация заключается в формировании  $N$  точек, лежащих в заданной окрестности некоторой точки.

Нами был использован алгоритм прямой фильтрации, который основан на введении отношения фильтрации, предназначенного для сравнения взвешенных расстояний между точками, которые являются претендентами на возможное включение в фильтр, и точками, уже «задержанными» ранее [12]. Отношение фильтрации задается в виде:

$$\left( \sum_{i=1}^n (\pi_i |x_i^r - x_i^s|)^p \right)^{1/p} > d,$$

где  $X^r$  – вектор, который пока не задержан фильтром;  $X^s$  – задержанный ранее вектор. Параметр фильтрации регулирует отношение фильтрации следующим образом: если расстояние между точками  $X^r$  и  $X^s$  больше или равно  $d$ , то эти точки считаются существенно отличающимися и включаются в фильтр. В противном

случае точки исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Обозначим множество, полученной после фильтрации,  $D_{fd}$ . Точки из множества  $D_{fd}$  поочередно подставляются в (1)–(2) и по определению Парето оптимальных точек строится множество эффективных точек задачи (3)–(7), которое можно описать следующим образом

$$P_r = \left\{ (p^{(t,\tau)}, x^t) \in D_{fd} \mid \Pi \left( (p^{(t,\tau)}, x^t), F \right) = \emptyset \right\}.$$

Здесь

$$\Pi \left( (p_k^{(t,\tau)}, x_k^t), F \right) = \left\{ \begin{array}{l} (p_k^{(t,\tau)}, x_k^t) \in D_{fd} \mid F_k \left( (p_k^{(t,\tau)}, x_k^t) \right) \geq F_k \left( (p_k^{(t,\tau)}, x_k^t)^0 \right), \\ \exists k_0 : F_{k_0} \left( (p_k^{(t,\tau)}, x_k^t) \right) > F_{k_0} \left( (p_k^{(t,\tau)}, x_k^t)^0 \right) \end{array} \right\},$$

а  $F = \{-F_1, F_2\}$  – функции цели исследуемой задачи.

В случае, когда множество эффективных точек содержит единственный вектор  $(p^{(t,\tau)}, x^t)^0$ , он и выбирается в качестве решения поставленной задачи. В противном случае возникает проблема выбора наилучшей эффективной точки, которую, как правило, решают введением дополнительного критерия  $\pi(p^{(t,\tau)}, x^t)$  качества полученных эффективных точек. В качестве такого критерия может быть использована, например, свертка критериев исходной задачи

$$\sum_{t,\tau} \left( -\lambda_{t\tau}^1 F_1 \left( (p^{(t,\tau)}, x^t) \right) + \lambda_{t\tau}^2 F_2 \left( (p^{(t,\tau)}, x^t) \right) \right) \rightarrow \max.$$

Решением является тогда оптимальный по этому критерию эффективный вектор.

Вышеописанный алгоритм был реализован в виде программного комплекса в C++ версии 4.5. Он был использован для проведения расчетов, которые показали высокую универсальность метода. Расчеты проведены для различных производственных функций и различных видов функции инфляционной спирали.

#### 4. ИТЕРАЦИОННЫЙ ДВУХЭТАПНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ БИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

Как отмечалось ранее, рассматриваемая выше модель является бидинамической задачей векторной оптимизации. Ранее также отмечались особенности структуры ограничений задачи (см. рис 1). Специфика задачи позволяет предложить итерационный алгоритм нахождения ее решения.

Пусть в некоторый момент  $t=0$  известно состояние экономической системы (векторы валового выпуска, цен, конечного и чистого продукта). В реальности, если экономика находится в балансовом равновесном состоянии, то достаточно знать вектора цен, конечного и чистого продукта. Вектор выпуска находится из уравнений межотраслевого баланса

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Предлагаемый алгоритм состоит из двух этапов. Условно будем их называть «четными» и «нечетными».

На «нечетных» этапах задается вектор валового выпуска (на первом этапе — начальное значение, на последующих шагах — рассчитанный на предыдущем этапе). С помощью приведенной модели рассчитываются вектора цен  $p_k^{(t,\tau)}$  для  $\tau = 1, 2, \dots, \tau_t$ . Каждый из векторов рассчитывается на очередном шаге итерации. При этом исходная модель притерпевает ряд изменений. В конечном счете эта модель принимает вид.

$$\begin{aligned} F_1(p^{(t,\tau)}, \hat{x}^t) &= \max_{t,\tau} G_1(p^{(t,\tau)}, \hat{x}^t) \rightarrow \min_{x,p}; \\ p_j^{(t,\tau)} \hat{x}_j &\geq \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} h_{ij}^t \hat{x}_i + Z_j^{(t-1)} + \Delta Z_j^{(t)}, \\ p_i^{(t,\tau)} \hat{x}_i &\geq \sum_{j=1}^n p_j^{(t,\tau)} h_{ij}^t \frac{x_i^B}{x_j^B} \hat{x}_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} p_j^{(t,\tau)} \hat{K}_j \Delta \hat{x}_j + \hat{Y}_{it}, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} \hat{Y}_{it} &\leq J; \\ \sum_{i=1}^n \Delta Z_i^{(t)} &\leq Z_{(t)}^\Delta; \\ \underline{Z}_j^{(t)} &\leq Z_j^{(t-1)} + \Delta Z_j^{(t)} \leq \overline{Z}_j^{(t)}; \\ \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} a_{i^v i^t} \hat{x}_i &\leq B_{i^v t}^v, l^v = 1, 2, \dots, L^v, i = 1, 2, \dots, n; \\ p_i^{(t,\tau+1)} &= p_i^{(t,\tau)} + \frac{\Delta Z_i^t}{\left(1 - \frac{x_i^B}{x_j^B}\right) x_i^t}; \\ p_{(t,\tau)} &> 0, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; \tau = 1, 2, \dots, \tau_t. \end{aligned}$$

Назовем ее р-задачей. Полученная задача является задачей скалярной оптимизации с нелинейной функцией цели и частично нелинейной границей системы ограничений. Она, как отмечалось выше, решается итеративно

столько раз, сколько периодов быстрого времени наличествует в одном периоде медленного времени. На каждой новой итерации мы корректируем значение целевой функции в соответствии с результатами, полученными на предыдущем шаге. То есть реально мы решаем последовательно несколько различных задач скалярной оптимизации. В результате мы получаем последовательность цен и величин дозаций отвечающих (условно) устойчивому функционированию экономической системы при заданном объеме выпуска. На рис. 2 приведена последовательность решений итераций первого этапа.

На «четных» этапах фиксируется значение цен, сложившихся к началу нового момента медленного времени  $t$ . Опираясь на фиксированное значение цен, рассчитываем новый вектор валовых выпусков  $X$ , распределение финансовых средств, новый вектор конечного продукта, капитала и трудовых ресурсов. Все эти параметры рассчитываем с помощью следующей модели:

$$\begin{aligned} F_2(p_1^{(t,\tau)}, x^t) &= \min_{t,\tau} G_2(p_1^{(t,\tau)}, x^t) \rightarrow \max_{x,p}; \\ p_{1i}^{(t,\tau)} x_{it} &\leq f_i(L_{it}, K_{it}); \\ K_{i(t)} &= K_{i(t-1)} + \beta_{i(t)} \Delta K_{(t)}; L_{i(t)} = L_{i(t-1)} + \delta_{i(t)} \Delta L_{(t)}; \\ 0 &\leq \underline{\beta}_{i(\lambda_i)} \leq \beta_{i(t)} \leq \overline{\beta}_{i(\lambda_i)}; \\ \sum_{i=1}^n \beta_{i(t)} &\leq 1; \\ 0 &\leq \underline{\delta}_{i(\lambda_i)} \leq \delta_{i(t)} \leq \overline{\delta}_{i(\lambda_i)}; \\ \sum_{i=1}^n \delta_{i(t)} &\leq 1; \\ \Delta L_{(t)} + \Delta K_{(t)} &\leq \overline{\Phi}_{(t)}; \\ p_{1j}^{(t,\tau)} x_{jt} &\geq \sum_{i=1}^n p_{1i}^{(t,\tau)} h_{ij}^t x_{it} + Z_j^{(t-1)} + \Delta Z_j^{(t)}; \\ p_{1i}^{(t,\tau)} x_{it} &\geq \sum_{j=1}^n p_{1j}^{(t,\tau)} h_{ij}^t \frac{x_i^B}{x_j^B} x_{it} + \sum_{j=1}^n b_{ij} p_{1j}^{(t,\tau)} K_{jt} \Delta x_{jt} + Y_{it}; \\ \chi_i p_{1i}^{(t,\tau)} x_{it} &\leq p_{1i}^{(t,\tau)} Y_{it}; \\ \sum_{i=1}^n p_{1i}^{(t,\tau)} Y_{it} &\leq J; \\ \Delta x_{jt} &= x_{j(t+1)} - x_{jt}; \\ \sum_{i=1}^n p_i^{(t,\tau)} a_{i^v i^t} \hat{x}_i &\leq B_{i^v t}^v, l^v = 1, 2, \dots, L^v, i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

$$K_{i(t_0)} = K_i^0, L_{i(t_0)} = L_i^0, x_{i_0} = x_i^0, x_{it} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Описанная выше задача является задачей скалярной оптимизации с нелинейной функцией цели и частично нелинейной границей. Следует отметить, что «четный» этап состоит из одной итерации, которая заключается в решении приведенной задачи, и заканчивающаяся расчетом всех переменных и проверкой окончания  $t = T$ .

Решение, получаемое по приведенному выше двухэтапному алгоритму, имеет структуру, представленную на рис. 2.

Структура решения двухэтапного алгоритма гарантирует получение, по крайней мере, слабоэффективной точки, т.к. на каждом этапе ищется оптимальная точка по одному из критериев.

	Медленное время					Значение функции цели
	0	1	...	T-1	T	
Нечетный этап	$(p^{(0,1)}, x_0)$					$F_1(p^{(0,1)}, x_0)$
	$(p^{(0,2)}, x_0)$					$F_1(p^{(0,2)}, x_0)$
	...					...
	$(p^{(0,\bar{t})}, x_0)$					$F_1(p_1^{(0,\bar{t})}, x_0)$
Четный этап		$(p_1^{(0,\bar{t})}, x_1)$				$F_2(p_1^{(0,\bar{t})}, x_1)$
Нечетный этап		$(p_1^{(1,1)}, x_1)$				$F_1(p_1^{(1,1)}, x_1)$
		$(p_1^{(1,2)}, x_1)$				$F_1(p_1^{(1,2)}, x_1)$
		...				...
		$(p_1^{(1,\bar{t})}, x_1)$				$F_1(p_2^{(1,\bar{t})}, x_1)$
...			...			...
Четный этап				$(p_{T-1}^{(T-1,\bar{t})}, x_{T-1})$		$F_2(p_{T-1}^{(T-1,\bar{t})}, x_{T-1})$
Нечетный этап				$(p_{T-1}^{(T-1,1)}, x_{T-1})$		$F_1(p_{T-1}^{(T-1,1)}, x_{T-1})$
				$(p_{T-1}^{(T-1,2)}, x_{T-1})$		$F_1(p_{T-1}^{(T-1,2)}, x_{T-1})$
				...		...
				$(p_T^{(T-1,\bar{t})}, x_{T-1})$		$F_1(p_T^{(T-1,\bar{t})}, x_{T-1})$
Четный этап					$(p_T^{(T,\bar{t})}, x_T)$	$F_2(p_T^{(T,\bar{t})}, x_T)$

Рис. 2. Структура решения двухэтапного алгоритма решения задачи выбора траектории развития региональной экономической системы с учетом инфляции

Межэлементные потоки (млн рублей)

Номер элемента	1	2	3	4	5	6	Конечный продукт	Валовой выпуск
1	831641	428045	8680	0	46856	99159	1964323	3378704
2	160068	881578	95324	76414	128514	119436	792545	2253879
3	659867	166998	2566136	245723	76060	573336	569077	5550197
4	369917	66192	347562	1030901	567506	934964	149593	3466635
5	266782	14183	32562	2486	9931	80737	2093523	2500204
6	180518	95897	521034	1271195	0	96437	1617325	3782406
Чистый продукт	909911	600986	1978899	839916	978337	1878337		
Валовой выпуск	3378704	2253879	5550197	3466635	1807204	3782406		

### 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ

Приведем в качестве примера расчетов с использованием данных алгоритмов нахождения траектории развития с учетом инфляции на базе межсекторного баланса Воронежской области.

Потоки межэлементных поставок (млн рублей) для такой системы приведены в табл. 1.

Определим наилучшую балансовую равновесную траекторию функционирования РЭС на два года ( $T=2$ ) при допустимом суммарном приросте чистого продукта секторов  $Z_1^A = 360000$  и  $Z_2^A = 360000$  (что составляет примерно 5 и 7,5 % от суммарного объема чистой продукции в начальный момент времени). Пусть цены на продукцию секторов в начальный момент времени одинаковы и равны

$$p_0 = (10000, 10000, 10000, 10000, 10000, 10000).$$

Цены могут быть приняты на уровне реально действующих, но тогда понадобятся дополнительные исследования для выявления темпов их изменения под воздействием оплаты труда.

Матрица коэффициентов распределения  $H$ , полученная по матрице межэлементных потоков, следующая

$$H = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.13 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.03 \\ 0.07 & 0.39 & 0.04 & 0.03 & 0.06 & 0.05 \\ 0.12 & 0.03 & 0.46 & 0.04 & 0.01 & 0.10 \\ 0.11 & 0.02 & 0.10 & 0.30 & 0.16 & 0.27 \\ 0.11 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.03 \\ 0.05 & 0.03 & 0.14 & 0.34 & 0.00 & 0.03 \end{pmatrix},$$

а вектор-строка чистой продукции  $Z$  имеет вид

$$Z = (909911, 600986, 1978899, 839916, 978337, 1878337).$$

В результате проведенных расчетов при заданных интервалах допустимых значений па-

раметров модели получено следующее распределение приростов чистого продукта:

$$(\Delta Z^*)_1 = (136487, 47720, 20875, 8012, 17236, 129670);$$

$$(\Delta Z^*)_2 = (185479, 147431, 40694, 89543, 25445, 51408).$$

Макроэкономические показатели РЭС при функционировании на полученной оптимальной балансово-равновесной траектории представлены в таблице 2.

Таблица 2

Макроэкономические показатели РЭС (млн руб.)

		$Z^*$	$Y^*$	$X^*$	$p^*$
$t=1$	1	1046398	2130477	3633182	11208
	2	648706	861261	2404160	11302
	3	1999774	519533	5677151	10476
	4	847928	131141	3588182	10731
	5	995573	2162085	2567295	10530
	6	2008007	1741889	3980634	10753
$t=2$	1	1231877	2222557	4482879	13199
	2	796137	1556695	3906602	14338
	3	2040468	462714	4920892	11261
	4	937471	55491	4082982	12066
	5	1021018	3004211	3730788	11555
	6	2059415	1710146	4243362	11708

Таким образом, прирост цен в РЭС составил соответственно 7,82 и 21,47 %, а прирост валового регионального продукта в стоимостном выражении — 4,39 и 21,19 % относительно начальных показателей.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предлагается бидинамическая модель выбора траектории развития региональных экономических систем, учитывающая инфляцию издержек. Модель позволяет выбрать из возможных вариантов сочетаний финансовых вложений в элементы региональной экономической системы, направляемых на развитие и

увеличение уровня жизни населения, наилучший вариант, позволяющий достичь сбалансированного экономического роста. Предложен алгоритм решения поставленной задачи, представляющий собой модификацию метода Соболя для решения задач векторной оптимизации и двухэтапный алгоритм, сводящий решение исходной задачи общего вида к решению последовательности задач скалярной оптимизации.

И, хотя, понятны сложности реализации предлагаемой модели, однако жизненная необходимость решения подобных задач в процессе функционирования регионов, делает перспективными исследования в этом направлении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Голиченко О.Г.* Проблема регулирования экономического роста в макроэкономических моделях / О. Г. Голиченко // Экономика и математические методы. — 2001. — Т. 37. — №4. — С. 33—43.
2. *Дедов Л.А.* Макроструктурная динамика промышленного комплекса России / Л. А. Дедов // Экономика и математические методы. — 2002. — Т. 38. — №3. — С. 3—10.
3. *Данилов-Данильян В.И.* Устойчивое развитие (теоретико-методологический анализ) / В. И. Данилов-Данильян // Экономика и математические методы. — 2003. — Т. 39. — № 2. — С. 123—135.
4. *Иванов П.М.* Устойчивое региональное развитие: концепция и модель управления / П. М. Иванов // Экономика и математические методы, 2006. — Т. 42, № 2. — С. 51—59.
5. *Гурман В.И.* моделирование устойчивого развития с учетом инновационных процессов / В. И. Гурман. — Экономика и математические методы, 2003. — Т. 39, № 1. — С. 3—11.
6. *Баева Н.Б.* Процедура догоняющего прогнозирования региональной экономической системы / Н. Б. Баева, Н. Е. Красова // Экономическое прогнозирование: модели и методы (Материалы Международной научно-практической конференции) — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2005. — Ч. 1. — С. 116—120.
7. *Баева Н.Б.* Оптимизационные модели в прогнозировании активных систем в условиях агрессивной внешней среды / Н. Б. Баева, Н. Е. Красова // Экономическое прогнозирование: модели и методы (Материалы II Международной научно-практической конференции) — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. — Ч. 2. — С. 168—172.
8. *Баева Н.Б.* Балансоворавновесные цены и инфляционная спираль в моделировании развития крупномасштабных активных систем / Н. Б. Баева, Н. Е. Красова, В. В. Лебедев // Вестник ВГУ, Серия: «Системный анализ и информационные технологии» — 2006. — № 1 — С. 6—12.
9. *Андрейченков А.В.* Анализ, синтез и планирование решений в экономике / А. В. Андрейченков, О. Н. Андрейченкова. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 368 с.
10. *Соболь И.М.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. — М.: Наука, 1981. — 110 с.
11. *Соболь И.М.* Точки, равномерно заполняющие многомерный куб / И. М. Соболь. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
12. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения: Пер. с англ. / Р. Штойер. — М.: Радио и связь, 1992. — 504 с.

*Статья принята к опубликованию  
25 декабря 2006 г.*