УДК 519.711.3

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРОДУКЦИОННОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

С. Д. Махортов

Воронежский государственный университет

Вводятся алгебраические структуры, позволяющие рассматривать задачи формализации продукционно-логического вывода с точки зрения теории решеток и отношений. Решетка вместе с заданным на ней дополнительным логическим отношением называется LP-структурой (Lattice Production Structure). Исследуется LP-структура, логика которой расширена до полного набора логических связок пропозиционального языка — импликации, конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Изучены следующие основные вопросы: существование LP-замыкания, его структура, эквивалентные преобразования. Доказана теорема о существовании логической редукции произвольного отношения и указан способ ее построения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели представления знаний в современных интеллектуальных системах можно условно разделить на 2 категории: 1) логические, основанные на строгой математической теории (логика высказываний, предикатов и т.д.) и 2) продукционно-сетевые, построенные на базе упрощенных вариантов «человеческой логики» [1]. Если первая категория характеризуется серьезным уровнем математических обоснований, то вторая — существенно более широким применением на практике, несмотря на слабость своей теоретической базы. Преимущества и недостатки продукционных и подобных им систем хорошо описаны, например, в [1—2].

Одним из подходов к построению и исследованию формальных логических систем является «алгебраизация логики». В качестве примера можно привести алгебру Линденбаума—Тарского [3], которая рассматривает формализованный пропозициональный язык как универсальную алгебру, операции которой соответствуют логическим связкам данного языка. Однако алгебраический подход, расширяя возможности исследования логических теорий («метаматематика»), существенно не облегчает их практического применения.

В работах [4—5] автор сделал попытку создать некоторую математическую основу систем второй категории, которая позволила бы, не выходя за рамки имеющейся модели (соответственно, не снижая ее применимости), проводить формальные исследования таких систем. Как известно [6], естественным и эффективным средством представления знаний служат математические решетки. С учетом этого были предложены алгебраические структуры, позволяющие рассматривать задачи формализации продукционно-логического вывода с точки зрения теории решеток и отношений. Решетку вместе с заданным на ней дополнительным логическим отношением можно назвать LP-структурой (Lattice- или Logical-Production Structure). Семантика предложенной в [4—5] логики была ограничена. Она содержала операции, соответствующие всего лишь двум логическим связкам — импликации и конъюнкции. Именно этот минимум операций свойственен набору правил типичной продукционной системы.

Одно из возможных направлений развития теории LP-структур состоит в расширении ее логики. Это позволит решать более сложные и актуальные практические задачи. В частности, некоторые продукционные системы в качестве предпосылок и следствий своих правил могут содержать не только конъюнкции термов, но также дизъюнкции и отрицания [7]. В настоящей работе вводится и исследуется LP-структура, логика которой расширена до полного набора логических связок пропозиционального языка — импликации, конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Изучены следующие основные вопросы: существование LP-замыкания, его структура, эквивалентные преобразования. Доказана теорема о существовании логической редукции произвольного отношения и указан способ ее построения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Вначале введем некоторые обозначения, а также напомним несколько определений и фактов, связанных с отношениями и решетками.

Бинарное отношение R на произвольном множестве F называется рефлексивным, если для любого $a \in F$ справедливо $(a,a) \in R$. Отношение R называется транзитивным, если для любых $a,b,c \in F$ из $(a,b),(b,c) \in R$ следует $(a,c) \in R$. Хорошо известно, что существует замыкание R^* произвольного отношения R относительно свойств рефлексивности и транзитивности (рефлексивно-транзитивное замыкание). Пара элементов $a,c \in F$ называется транзитивной в R (или R-транзитивной), если $(a,c) \in R_1^*$, где R_1^* — транзитивное замыкание отношения $R_1 = R \setminus \{(a,c)\}$.

Существует также понятие транзитивной редукции бинарного отношения. Построение транзитивной редукции — это в определенном смысле обратная задача по отношению к построению транзитивного замыкания. Для данного отношения R строится минимальное отношение R' такое, что его транзитивное замыкание совпадает с транзитивным замыканием R. Как обычно, для частично упорядоченных множеств мы будем различать понятия минимального элемента (для него нет меньшего элемента) и наименьшего элемента (он меньше всех). В [8] приведен алгоритм построения транзитивной редукции ориентированных графов (следовательно, и конечных отношений); показано, что эта задача вычислительно эквивалентна задаче построения транзитивного замыкания, и доказана единственность транзитивной редукции ациклического графа.

Необходимые для чтения данной статьи сведения о решетках содержатся в [9]. Решеткой называется полуупорядоченное множество $\mathbb{F}$, в котором наряду с отношением частичного порядка $\le$ («не больше», «содержится») введены также два двуместных оператора $\wedge$ («пересечение») и $\vee$ («объединение»). Эти операторы таковы, что при любых $a,b \in \mathbb{F}$ справедливо

- $a \wedge b \le a$, $a \wedge b \le b$;
- если $c \in \mathbb{F}$ и $c \le a$, $c \le b$, то $c \le a \wedge b$;
- $a \le a \vee b$, $b \le a \vee b$;
- если $c \in \mathbb{F}$ и $a \le c$, $b \le c$, то $a \vee b \le c$.

Очевидно, что при $a \le b$ справедливо $a \wedge b = a$ и $a \vee b = b$.

Решетка $\mathbb{F}$ называется ограниченной, если она содержит верхнюю и нижнюю грани — такие два элемента O, I, что $O \le a \le I$ для любого $a \in \mathbb{F}$. Решетка $\mathbb{F}$ называется полной, если каждое ее подмножество имеет в $\mathbb{F}$ точные верхнюю и нижнюю грани.

Решетка $\mathbb{F}$ называется дистрибутивной, если в ней при любых a,b,c выполняются следующие равенства:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Можно показать, что каждое из этих тождеств следует из другого.

Под дополнением элемента a в ограниченной решетке $\mathbb{F}$ подразумевают элемент $a' \in \mathbb{F}$ такой, что $a \wedge a' = O$ и $a \vee a' = I$. Решетка, в которой любой элемент имеет дополнение, называется решеткой с дополнениями. Если каждый элемент имеет одно и только одно дополнение, то имеем решетку с единственными дополнениями. Очевидно, в такой решетке справедливо $a = (a')'$ для любого a.

Дистрибутивная решетка с дополнениями называется булевой. В булевой решетке каждый элемент имеет единственное дополнение, причем справедливы тождества (законы де Моргана)

- $(a \wedge b)' = a' \vee b'$;
- $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

3. ПРОДУКЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ НА РЕШЕТКАХ

В этом разделе мы будем рассматривать бинарные отношения на булевой решетке $\mathbb{F}$. Заметим вначале, что отношение частичного порядка $\le$ на $\mathbb{F}$ по определению является рефлексивным и транзитивным. Сформулируем несколько базовых определений.

Определение 2.1. Бинарное отношение R на решетке с дополнениями называется контрапозиционным, если из $(a,b) \in R$ следует $(b',a') \in R$.

Определение 2.2. Бинарное отношение R на решетке $\mathbb{F}$ назовем дистрибутивным относительно операции $\wedge$ (или $\wedge$-дистрибутивным), если для любых пар вида $(a,b_1),(a,b_2) \in R$ справедливо $(a, b_1 \wedge b_2) \in R$.

Определение 2.3. Бинарное отношение R на решетке $\mathbb{F}$ назовем дистрибутивным относительно операции $\vee$ (или $\vee$-дистрибутивным), если для любых $(a_1, b), (a_2, b) \in R$ выполнено $(a_1 \vee a_2, b) \in R$.

Определение 2.4. Отношение R на решетке $\mathbb{F}$ называется вполне дистрибутивным (или просто дистрибутивным), если оно одновременно удовлетворяет определениям 2.2 и 2.3.

Определение 2.5. Отношение R на булевой решетке называется продукционно-логическим (в данной работе — просто логическим), если оно содержит $\leq$, а также является контрапозиционным, дистрибутивным и транзитивным.

Замечание 2.1. Для логического отношения R справедливо следующее утверждение: если $(a,b) \in R$, то $(a, a \wedge b) \in R$ и $(a \vee b, b) \in R$. Оно следует из дистрибутивности R и принадлежности $(a,a),(b,b)$ отношению R.

Из определения 2.5 также вытекает, что отношение $\leq$ на булевой решетке само является логическим.

Определение 2.6. Логическим замыканием некоторого отношения R, заданного на решетке $\mathbb{F}$, называется наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Два отношения R_1 и R_2, определенные на одной решетке, называются логически эквивалентными (в контексте данной работы — просто эквивалентными), если их логические замыкания совпадают. Этот факт будем обозначать $R_1 \sim R_2$.

Логической редукцией данного отношения R на решетке $\mathbb{F}$ называется эквивалентное ему минимальное отношение R_0.

В работах [4—5] исследованы свойства логических отношений, обладающих лишь свойствами транзитивности и дистрибутивности в смысле определения 2.1 (с учетом принятых в настоящей работе обозначений). Для такого случая доказаны теоремы о существовании логического замыкания и логической редукции данного произвольного отношения R, указаны способы их построения. Здесь мы попытаемся получить аналогичные результаты для логических отношений в смысле определений 2.1—2.6.

Следующее определение является рекурсивным.

Определение 2.7. Пусть задано произвольное отношение R на булевой решетке $\mathbb{F}$. Будем говорить, что упорядоченная пара $a, b \in \mathbb{F}$ логически связана отношением R (обозначим этот факт $a \xrightarrow{R} b$), если выполнено одно из следующих условий:

1) $(a,b) \in R$;
2) $a \leq b$;
3) $b' \xrightarrow{R} a'$.
4) существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \wedge b_2 = b$, причем $a \xrightarrow{R} b_1, a \xrightarrow{R} b_2$;
5) существуют такие $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, что $a_1 \vee a_2 = a$, причем $a_1 \xrightarrow{R} b, a_2 \xrightarrow{R} b$;
6) существует элемент $c \in \mathbb{F}$ такой, что $a \xrightarrow{R} c$ и $c \xrightarrow{R} b$;

Определение 2.7 по данному R задает новое отношение $\xrightarrow{R}$ на решетке $\mathbb{F}$, которое содержит отношения R, $\leq$, а также обладает некоторыми дополнительными свойствами, которые мы обсудим ниже.

Лемма 2.1. Пусть R — некоторое логическое отношение на булевой решетке $\mathbb{F}$ и $a, b \in \mathbb{F}$. Тогда, если справедливо $a \xrightarrow{R} b$, то $(a,b) \in R$.

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по m — уровню рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R} b$ в смысле определения 2.7. При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)—2) определения 2.7. Случай 1) означает требуемое утверждение. Если же справедливо 2), то и тогда $(a,b) \in R$, поскольку логическое отношение R содержит и $\leq$.

Предположим далее, что лемма верна для некоторого $m \geq 0$, и докажем ее утверждение при уровне рекурсии $m+1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты могут дать условия 3)—6) определения 2.7.

Если имеет место 3), то по предположению индукции уровень рекурсии в соответствующем соотношении $b' \xrightarrow{R} a'$ не превосходит m, поэтому $(b', a') \in R$. Тогда, в силу контрапозиционности логического отношения R, получим $(a,b) \in R$.

Рассмотрим вариант, когда соотношение $a \xrightarrow{R} b$ происходит из условия 4) определения 2.7. При этом по предположению индукции соотношения $a \xrightarrow{R} b_1, a \xrightarrow{R} b_2$ имеют уровень рекурсии $\leq m$, т.е. $(a, b_1), (a, b_2) \in R$. Тогда, в силу $\wedge$-дистрибутивности R, получим $(a,b) \in R$. Если же выполнено 5), то аналогичный факт $(a,b) \in R$ следует из свойства $\vee$-дистрибутивности отношения R.

Наконец, пусть справедливо 6). И в этом случае по предположению индукции базовые соотношения $a \xrightarrow{R} c$ и $c \xrightarrow{R} b$ имеют уровень рекурсии $\leq m$. Следовательно, $(a,c), (c,b) \in R$. Отсюда, в силу транзитивности логического отношения R, имеем $(a,b) \in R$. $\square$

Теорема 2.1. Для произвольного отношения R на булевой решетке $\mathbb{F}$ логическое замыкание существует и совпадает с множеством $\xrightarrow{R}$ всех упорядоченных пар, логически связанных отношением R.

Доказательство. Заметим вначале, что при произвольном R соответствующее отношение $\xrightarrow{R}$ является логическим. Действительно, в силу п.2) определения 2.7 оно содержит $\le$, из п.3) следует его контрапозиционность, из п.п. 4)—5) — дистрибутивность, а п.6) означает транзитивность данного отношения. Далее, в силу п. 1) определения 2.7, отношение $\xrightarrow{R}$ содержит R. Для доказательства теоремы осталось показать, что это – наименьшее из таковых отношений.

Пусть R' — любое другое логическое отношение, содержащее R. Тогда очевидно, что если $a \xrightarrow{R} b$, то $a \xrightarrow{R'} b$. Отсюда по лемме 2.1 имеем $(a,b) \in R'$. Следовательно, отношение $\xrightarrow{R}$ содержится в произвольно выбранном R', и, таким образом, является наименьшим логическим отношением, содержащим R. $\square$

Далее займемся вопросами, связанными с возможностью эквивалентных преобразований рассматриваемых логических структур. Пусть дано произвольное бинарное отношение R на решетке $\mathbb{F}$. Его эквивалентным преобразованием называется такая замена всего множества упорядоченных пар R или его части, что полученное в результате новое отношение P логически эквивалентно R, т.е. $P \sim R$.

Теорема 2.2. Пусть R_1, R_2, R_3, R_4 — отношения на общей решетке $\mathbb{F}$. Если при этом $R_1 \sim R_2$ и $R_3 \sim R_4$, то $R_1 \cup R_3 \sim R_2 \cup R_4$.

Доказательство. Итак, требуется доказать равенство $\xrightarrow{R_1 \cup R_3} = \xrightarrow{R_2 \cup R_4}$ как соотношение двух множеств. Пусть $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$. Докажем, что при этом справедливо $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Для этого, как и выше, применим метод индукции по m — уровню рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$.

При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)—2) определения 2.7. Если справедливо 2), то тогда $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$, поскольку логическое отношение $\xrightarrow{R_2 \cup R_4}$ содержит и $\le$. Если выполнено условие 1), то имеем $(a,b) \in R_1 \cup R_3$. Пусть, для определенности, $(a,b) \in R_1$ (вариант $(a,b) \in R_3$ симметричен). В этом случае имеет место $a \xrightarrow{R_1} b$, откуда в силу условия эквивалентности $R_1 \sim R_2$ получим $a \xrightarrow{R_2} b$. Следовательно, справедливо и $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Таким образом, при $m = 0$ требуемое утверждение доказано.

Предположим далее, что оно верно для некоторого $m \ge 0$, и докажем его при уровне рекурсии $m+1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты для $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$ могут дать условия 3)—6) определения 2.7.

Если имеет место 3), то по предположению индукции уровень рекурсии в соответствующем соотношении $b' \xrightarrow{R_1 \cup R_3} a'$ не превосходит m, поэтому $b' \xrightarrow{R_2 \cup R_4} a'$. В этом случае, в силу контрапозиционности логического отношения $\xrightarrow{R_2 \cup R_4}$, получим $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$.

Рассмотрим вариант, когда соотношение $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$ происходит из условия 4) определения 2.7. Тогда по предположению индукции соотношения $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b_1, a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b_2$ имеют уровень рекурсии $\le m$, поэтому $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b_1$, $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b_2$. Тогда, в силу $\wedge$-дистрибутивности $\xrightarrow{R_{21} \cup R_4}$, получим $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Если же выполнено 5), то требуемый факт аналогично следует из предположения индукции и свойства $\vee$-дистрибутивности логического отношения $\xrightarrow{R_{21} \cup R_4}$.

Наконец, пусть справедливо 6). И в этом случае базовые соотношения $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} c$ и $c \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$ имеют уровень рекурсии $\le m$. Следовательно, по предположению индукции получаем $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} c$ и $c \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Отсюда, в силу транзитивности логического отношения $\xrightarrow{R_{21} \cup R_4}$, имеем $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. $\square$

Следствие 2.1. Пусть R_1, R_2, R — отношения на общей булевой решетке $\mathbb{F}$. Если при этом $R_1 \sim R_2$, то $R_1 \cup R \sim R_2 \cup R$.

Это следствие обосновывает принцип локальности эквивалентных преобразований логических отношений.

В работах [4—5], посвященных структурам с более простой логикой, было доказано, что логическое замыкание произвольного отношения R совпадает с транзитивным замыканием некоторого другого отношения $\tilde{R} \supseteq R$, построенного по данному R в виде «дистрибутивного многообразия». Это позволяет свести изучение некоторых важных вопросов, касающихся логических отношений, к соответствующим проблемам транзитивных отношений. В частности, построение логического замыкания или редукции можно осуществить с помощью быстрых алгоритмов (типа Уоршолла), разработанных для транзитивных отношений [8]. В нашем случае, основанном на определениях 2.1—2.6, также удается разделить процесс построения логического замыкания на два этапа, второй из которых соответствует транзитивному замыканию.

С целью получения указанного результата докажем предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.2. Пусть R — некоторое бинарное отношение на булевой решетке $\mathbb{F}$. Тогда при выводе произвольной логической связи $a \xrightarrow{R} b$ все применения дистрибутивных правил 4)-5) определения 2.7 могут быть произведены без участия правила 2) со строгим неравенством. Роль последнего можно свести исключительно к присутствию в качестве компонента для транзитивного правила 6).

Доказательство. Предположим, что при получении вывода $a \xrightarrow{R} b$ использовалось условие 4): существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \wedge b_2 = b$, причем $a \xrightarrow{R} b_1, a \xrightarrow{R} b_2$. Если оба из этих соотношений порождены неравенствами вида $a \le b_1, a \le b_2$, то по свойствам решетки сразу имеем $a \le b_1 \wedge b_2$, и применение правила 4) не требуется. Предположим, что лишь первое из этих соотношений реализуется неравенством, причем строгим ($a < b_1$). Тогда поступим следующим образом: применим правило 4) к соотношениям $a \xrightarrow{R} a, a \xrightarrow{R} b_2$, при этом получим $a \xrightarrow{R} a \wedge b_2$. Возвращаясь к имеющемуся неравенству $a < b_1$, замечаем, что в силу свойств решетки $\mathbb{F}$ из него следует неравенство $a \wedge b_2 \le b_1 \wedge b_2$. Поэтому, применяя правило 6), получим соотношение $a \xrightarrow{R} b_1 \wedge b_2$, т.е. $a \xrightarrow{R} b$. Таким образом, для правила 4) утверждение леммы доказано.

Рассмотрим другой вариант, когда при выводе $a \xrightarrow{R} b$ было применено правило 5): существуют такие $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, что $a_1 \vee a_2 = a$ и $a_1 \xrightarrow{R} b, a_2 \xrightarrow{R} b$. Если оба эти соотношения получены из неравенств $a_1 \le b, a_2 \le b$, то по свойствам решетки справедливо $a_1 \vee a_2 \le b$, и для получения связи $a \xrightarrow{R} b$ применение правила 5) необходимым не является. Предположим, что лишь первое из имеющихся соотношений реализуется строгим неравенством $a_1 < b$.

В данном случае применим к соотношениям $b \xrightarrow{R} b, a_2 \xrightarrow{R} b$ правило 5), соответственно получим $b \vee a_2 \xrightarrow{R} b$. Возвращаясь к имеющемуся неравенству $a_1 < b$, заметим, что в силу свойств решетки $\mathbb{F}$ из него следует неравенство $a_1 \vee a_2 \le b \vee a_2$. Применяя к соотношениям $a_1 \vee a_2 \le b \vee a_2$ и $b \vee a_2 \xrightarrow{R} b$ транзитивное правило 6), получим справедливость $a_1 \vee a_2 \xrightarrow{R} b$, т.е. $a \xrightarrow{R} b$. Теперь утверждение леммы доказано и для случая применения правила 5). □

Лемма 2.3. Пусть R – бинарное отношение на булевой решетке $\mathbb{F}$. Тогда при выводе любой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ все применения контрапозиционного правила 3) определения 2.7 могут быть исключены либо перенесены в начальную стадию этого процесса.

Доказательство. Достаточно показать, что любое применение правила 3) можно исключить либо поменять местами с предшествующим ему применением каждого из правил 2), 4)—6), получив при этом аналогичную логическую связь. Рассмотрим все возможные здесь случаи.

Предположим, что вывод $a \xrightarrow{R} b$ получен из соотношения $b' \le a'$ применением правила 3). Поскольку $b' \le a'$, то в силу свойств булевой решетки $\mathbb{F}$ справедливо $a \le b$, откуда сразу следует $a \xrightarrow{R} b$. Таким образом, в данном случае применение правила 3) можно исключить.

Рассмотрим вариант, когда при получении вывода $a \xrightarrow{R} b$ перед правилом 3) использовалось условие 4): существуют такие $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, что $a_1 \wedge a_2 = a'$, причем $b' \xrightarrow{R} a_1, b' \xrightarrow{R} a_2$. Вместо указанного последовательного применения правил 4) и 3) поступим по-другому – сразу применим к имеющимся соотношениям $b' \xrightarrow{R} a_1, b' \xrightarrow{R} a_2$ правило 3). Тогда получим, что справедливо $a_1' \xrightarrow{R} b, a_2' \xrightarrow{R} b$. Применяя далее правило 5), приходим к соотношению $a_1' \vee a_2' \xrightarrow{R} b$, откуда с помощью закона де Моргана ($a_1' \vee a_2' = a$) получим $a \xrightarrow{R} b$. Таким образом, в данном случае применение правила 3) удается переместить в начало, получив при этом тот же результат $a \xrightarrow{R} b$.

Рассмотрим ситуацию, в которой при получении вывода $a \xrightarrow{R} b$ перед правилом 3) было применено условие 5): существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \vee b_2 = b'$, причем $b_1 \xrightarrow{R} a'$, $b_2 \xrightarrow{R} a'$. В этом случае вместо применения правил 5) и 3) применим к имеющимся соотношениям $b_1 \xrightarrow{R} a', b_2 \xrightarrow{R} a'$ правило 3). При этом получим связи $a \xrightarrow{R} b_1', a \xrightarrow{R} b_2'$. Применяя теперь правило 4), приходим к соотношению $a \xrightarrow{R} b_1' \wedge b_2'$, откуда по закону де Моргана ($b_1' \wedge b_2' = b$) получим $a \xrightarrow{R} b$. И в этом случае применение правила 3) удалось переместить в начало вывода с сохранением результата $a \xrightarrow{R} b$.

Наконец, остается случай, когда при получении $a \xrightarrow{R} b$ перед правилом 3) было применено транзитивное правило 6): существует элемент $c \in \mathbb{F}$ такой, что $b' \xrightarrow{R} c$ и $c \xrightarrow{R} a'$. Как и выше, к этим базовым соотношениям сразу применим правило 3). В результате получим, что $c' \xrightarrow{R} b$, $a \xrightarrow{R} c'$. Отсюда по правилу 6) приходим к соотношению $a \xrightarrow{R} b$.

Таким образом, в каждой возможной ситуации вывода применение правила 3) определения 2.7 можно произвести до применений остальных его правил. □

Для произвольного отношения R на булевой решетке $\mathbb{F}$ рассмотрим отношение $\tilde{R}$, построенное по данному R последовательным выполнением следующих шагов:

- добавить к R все пары вида (a,a), где $a \in \mathbb{F}$ (рефлексивные пары) и обозначить новое отношение R_1;
- добавить к R_1 все пары (a,b), для которых $(b',a') \in R$, и обозначить новое отношение R_2;
- добавить к R_2 всевозможные пары вида $(a_1 * a_2 * ..., \ b_1 * b_2 * ...)$, где $(a_1,b_1),(a_2,b_2),...$ принадлежат R_2; символ $*$ обозначает операцию $\wedge$ либо $\vee$, причем каждый a_i записывается с той же операцией, что и b_i;
- объединить полученное отношение с отношением $\leq$.

Пользуясь следствием 2.1, нетрудно показать, что отношение $\tilde{R}$ логически эквивалентно R.

Теорема 2.3. Логическое замыкание данного отношения R на булевой решетке $\mathbb{F}$ совпадает с транзитивным замыканием $\tilde{R}^*$ соответствующего ему отношения $\tilde{R}$.

Доказательство. Покажем вначале, что построенное отношение $\tilde{R}$ содержится в $\xrightarrow{R}$. Пусть $(a,b) \in \tilde{R}$. Тогда, если $a \leq b$, то по условию 2) определения 2.7 имеем $a \xrightarrow{R} b$. Если справедливо $(b',a') \in R$, то $a \xrightarrow{R} b$ в силу п.3) определения 2.7. Остается случай, когда $a = a_1 * ... * a_m; b = b_1 * ... * b_m$, где $(a_i,b_i) \in R$, $(b_i',a_i') \in R$ либо $a_i = b_i$, $i = 1,...,m$. Здесь для доказательства соотношения $a \xrightarrow{R} b$ воспользуемся методом индукции по $m \geq 1$.

При $m = 1$ оно очевидно. Предположим, что оно верно для некоторого m и рассмотрим его при значении $m+1$. Обозначим $\tilde{a} = a_1 * ... * a_m$, $\tilde{b} = b_1 * ... * b_m$. Тогда наша пара (a,b) может быть записана в виде $(\tilde{a} * a_{m+1}, \tilde{b} * b_{m+1})$, где $a_{m+1} \xrightarrow{R} b_{m+1}$ выполнено по определению, а $\tilde{a} \xrightarrow{R} \tilde{b}$ справедливо по предположению индукции. Рассмотрим отдельно случаи конкретных значений символа $*$.

Пусть вначале это будет операция $\wedge$, т.е. $a = \tilde{a} \wedge a_{m+1}$, $b = \tilde{b} \wedge b_{m+1}$. Поскольку в этом случае $a \leq \tilde{a}, a \leq a_{m+1}$, то в силу транзитивности отношения $\xrightarrow{R}$ имеем $a \xrightarrow{R} \tilde{b}$ и $a \xrightarrow{R} b_{m+1}$. Применяя далее $\wedge$-дистрибутивность $\xrightarrow{R}$, приходим к соотношению $a \xrightarrow{R} b$.

Если же символ $*$ обозначает операцию $\vee$, то $a = \tilde{a} \vee a_{m+1}$, $b = \tilde{b} \vee b_{m+1}$. В этом случае выполнены неравенства $\tilde{b} \leq b, b_{m+1} \leq b$, и свойство транзитивности отношения $\xrightarrow{R}$ дает соотношения $\tilde{a} \xrightarrow{R} b$ и $a_{m+1} \xrightarrow{R} b$. Применяя к ним $\vee$-дистрибутивность отношения $\xrightarrow{R}$, вновь получим $a \xrightarrow{R} b$.

Таким образом, $\tilde{R} \subseteq \xrightarrow{R}$. Отсюда, поскольку отношение $\xrightarrow{R}$ транзитивно, получаем, что $\tilde{R}^* \subseteq \xrightarrow{R}$.

Докажем теперь обратное включение. Предположим, что $a \xrightarrow{R} b$. Если это соотношение происходит непосредственно из условия 1) или 2) определения 2.7, то сразу имеем $(a,b) \in \tilde{R} \subseteq \tilde{R}^*$. Нетривиальным является случай, когда связь $a \xrightarrow{R} b$ получается последовательным применением цепочки правил вида 2)—6) определения 2.7. По лемме 2.2 роль правила 2) в указанной цепочке может быть сведена исключительно к компонентам для правила 6), поэтому отдельно правило 2) можно не рассматривать. Кроме того, по лемме 2.3 все применения контрапозиционного правила 3) могут быть осуществлены в начале рассматриваемого процесса. В такой ситуации нам достаточно показать, что также все применения транзитивного правила 6) можно перенести в заключительную стадию вывода $a \xrightarrow{R} b$. Тогда, очевидно, начальное применение правила 3) и последующее применение правил 4)-5) можно будет рассматривать как получение некоторого подмножества отношения $\tilde{R}$ (см. последовательность его построения). Заключительная же серия применений правил вида 6) будет соответствовать построению части транзитивного замыкания $\tilde{R}$. Другими словами, построение отношения $\tilde{R}^*$ будет включать и построение логической связи $a \xrightarrow{R} b$, т.е. из $a \xrightarrow{R} b$ следует $(a,b) \in \tilde{R}^*$.

Итак, нам осталось установить, что все применения правила 6) можно перенести в заключительную стадию указанного вывода $a \xrightarrow{R} b$.

С этой целью рассмотрим ситуацию, когда при выводе $a \xrightarrow{R} b$ после серии применений правила 6), проводимой непосредственно за реализацией всех необходимых контрапозиций, на следующем шаге некоторое соотношение $c \xrightarrow{R} d$ получено из правила 4): существуют такие $d_1, d_2 \in \mathbb{F}$, что $d_1 \wedge d_2 = d$, причем $c \xrightarrow{R} d_1, c \xrightarrow{R} d_2$. При этом предполагается (как наиболее общий случай), что оба вывода $c \xrightarrow{R} d_1$ и $c \xrightarrow{R} d_2$ основаны на правиле 6): нашлись две группы элементов $c = c_1^0, c_1^1, \ldots, c_1^n = d_1$ и $c = c_2^0, c_2^1, \ldots, c_2^m = d_2$, для которых выполнены соотношения $(c_1^{i-1}, c_1^i) \in \tilde{R}$, $i = 1, \ldots, n$ и $(c_2^{j-1}, c_2^j) \in \tilde{R}$, $j = 1, \ldots, m$. Пусть для определенности $n \geq m$. По своему построению, наряду с вышеперечисленными парами, отношение $\tilde{R}$ должно также содержать и пары $(c_1^0 \wedge c_2^0, c_1^1 \wedge c_2^1), \ldots, (c_1^{m-1} \wedge c_2^{m-1}, c_1^m \wedge c_2^m), (c_1^m \wedge c_2^m, c_1^{m+1} \wedge c_2^m), \ldots, (c_1^{n-1} \wedge c_2^m, c_1^n \wedge c_2^m)$. Отсюда следует, что пара $(c_1^0 \wedge c_2^0, c_1^n \wedge c_2^m) = (c, d)$ принадлежит транзитивному замыканию $\tilde{R}^*$ отношения $\tilde{R}$. Используя указанное свойство, при получении связи $a \xrightarrow{R} b$ любое применение правила 4) определения 2.7 можно осуществить раньше, чем применение правила 6), и таким образом свести процесс к получению $\tilde{R}$-транзитивной связи (a, b).

Осталось рассмотреть аналогичную ситуацию для правила 5). Предположим, что при получении связи $a \xrightarrow{R} b$, после серии применений правила 6), проводимой сразу после реализации всех нужных контрапозиций, на следующем шаге некоторое соотношение $c \xrightarrow{R} d$ получено из правила 5): существуют такие $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$, что $c_1 \vee c_2 = c$ и $c_1 \xrightarrow{R} d$, $c_2 \xrightarrow{R} d$. При этом нашлись две группы элементов $c_1 = c_1^0, c_1^1, \ldots, c_1^n = d$ и $c_2 = c_2^0, c_2^1, \ldots, c_2^m = d$, для которых справедливы включения $(c_1^{i-1}, c_1^i) \in \tilde{R}$, $i = 1, \ldots, n$ и $(c_2^{j-1}, c_2^j) \in \tilde{R}$, $j = 1, \ldots, m$. Вновь предположим, что $n \geq m$. По определению отношение $\tilde{R}$ должно также содержать пары $(c_1^0 \vee c_2^0, c_1^1 \vee c_2^1), \ldots, (c_1^{m-1} \vee c_2^{m-1}, c_1^m \vee c_2^m)$ и $(c_1^m \vee c_2^m, c_1^{m+1} \vee c_2^m), \ldots, (c_1^{n-1} \vee c_2^m, c_1^n \vee c_2^m)$. Отсюда получаем, что пара $(c_1^0 \vee c_2^0, c_1^n \vee c_2^m) = (c, d)$ принадлежит транзитивному замыканию $\tilde{R}^*$ отношения $\tilde{R}$. Следовательно, при получении связи $a \xrightarrow{R} b$ любое применение правила 5) определения 2.7 также можно выполнить раньше, чем применение правила 6) к парам отношения $\tilde{R}$.

Таким образом, мы доказали и обратное включение, т.е. $\xrightarrow{R} \subseteq \tilde{R}^*$. Итак, $\xrightarrow{R} = \tilde{R}^*$. □

Рассмотрим далее вопрос о существовании и построении логической редукции отношений рассматриваемого класса.

Лемма 2.4. Пусть R — бинарное отношение на булевой решетке $\mathbb{F}$. Для того чтобы R являлось логической редукцией, необходимо и достаточно, чтобы R не содержало ни одной такой пары (b, a), что выполнено соотношение $a \xrightarrow{R} b$, реализуемое условиями 2)—6) определения 2.7.

Доказательство. Пусть отношение R представляет собой логическую редукцию, т.е. является минимальным логически эквивалентным себе отношением. Предположим противное, что существует пара $(a, b) \in R$, логически связанная отношением R, и эта связь может быть реализована одним из условий 2)—6) определения 2.7. Если это так, то в силу следствия 2.1 пару (a, b) можно исключить из R, получив при этом меньшее эквивалентное отношение. Таким образом, при сделанном предположении отношение R не может быть логической редукцией.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что не существует ни одной пары $(a, b) \in R$, о которой сказано в формулировке леммы. Требуется доказать, что в этом случае R — логическая редукция. Вновь предположим противное — пусть существует отношение $R_0 \subset R$, эквивалентное R, и $(a, b) \in R \setminus R_0$. Тогда, поскольку $(a, b) \in R$, в силу эквивалентности рассматриваемых отношений справедливо $a \xrightarrow{R_0} b$. Так как отношение R_0 не содержит пару (a, b), то по определению 2.7 логическая связь $a \xrightarrow{R_0} b$ может быть реализована лишь условиями вида 2)—6), что противоречит сделанному предположению — таких пар в R и, следовательно, в R_0 нет. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Следующая теорема указывает достаточное условие существования и способ построения логической редукции данного отношения.

Теорема 2.4. Пусть для данного отношения R на булевой решетке $\mathbb{F}$ построено соответствующее отношение $\tilde{R}$ (см. выше). Тогда, если для $\tilde{R}$ существует транзитивная редукция $\tilde{R}_0$, то отношение $R_0 = \tilde{R}_0 \setminus \leq$ после удаления из него контрапозиционных пар (если $(a, b), (b', a') \in R_0$, то удалить одну из двух пар) представляет собой логическую редукцию исходного отношения R.

Доказательство. Поскольку отношение $\tilde{R}$ логически эквивалентно R, то по следствию 2.1 и отношение R_0, полученное удалением из $\tilde{R}$ транзитивных, подчиненных ($\leq$) и контрапозиционных пар, эквивалентно R. Осталось показать, что R_0 является логической редукцией. Для этого достаточно проверить выполнение для R_0 условия леммы 2.4.

Отсутствие в множестве R_0 пар $a \xrightarrow{R_0} b$, обусловленных п.п. 2), 3) или 6) определения 2.7, очевидно по построению R_0. Требуется также установить, что нет и пар с выводом на основе свойства дистрибутивности (п.п. 4—5).

Предположим противное: существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \wedge b_2 = b$, $a \xrightarrow{R_0} b_1, a \xrightarrow{R_0} b_2$, причем $(a,b) \in R_0$. В этом случае имеем, что каждая из пар $(a,b_1),(a,b_2) \in R_0$ транзитивна в $R_0 \bigcup \leq$, чего не может быть по построению R_0 — транзитивной редукции.

Предположим, что имеет место второй «неправильный» случай, когда имеются такие $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, что $a_1 \vee a_2 = a$, причем $a_1 \xrightarrow{R} b$, $a_2 \xrightarrow{R} b$ и $(a,b) \in R_0$. В этом случае пары $(a_1,b),(a_2,b) \in R_0$ оказываются транзитивными в $R_0 \bigcup \leq$, что также является противоречием. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Представление и использование знаний: Пер. с япон. / Под ред. Х. Уэно, М. Исидзука. — М.: Мир, 1989. — 220 с.

2. *Люгер Дж. Ф.* Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем: Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2003. — 864 с.

3. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. Пер. с англ. — М.: Наука, 1972. — 591 с.

4. *Махортов С.Д.* Логические отношения на решетках // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — Воронеж, 2003, № 2. — С. 203—209.

5. *Махортов С.Д.* О редукции логических отношений на решетках // Вестник факультета ПММ: Вып. 5. — Воронеж: ВГУ, 2004. — С. 172—179.

6. *Тейз А., Грибомон П. и др.* Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию: Пер. с франц. — М.: Мир, 1990. — 432с.

7. *Davis R., King J.* An overwiew of production systems // Machine Intelligence, vol. 8, Ellis Horwood Limited, Chichester, P. 300—332 (1977).

8. *Aho A.V., Garey M.R., Ulman J.D.* The transitive reduction of a directed graph. SIAM J. Computing 1:2, P. 131—137 (1972).

9. *Биркгоф Г.* Теория решеток: Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 568с.

Статья принята к опубликованию 25 декабря 2006 г.