УДК 681.3

ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Т. М. Леденева, Д. С. Татаркин

Воронежский государственный университет

Статья посвящена исследованию методов нечеткого логического вывода на основе комбинации функционального представления нечетких логических операций, схем агрегирования и методов дефазификации.

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие системы используются для моделирования, анализа данных, прогнозирования или управления. Необычайно актуально применение нечетких систем в медицине и экономике. Важнейшим классом нечетких систем являются нечеткие системы управления. Нечеткое управление — одно из перспективных направлений современной теории управления. Методика нечеткого моделирования систем реализована в пакетах MatLab и FuzzyTech. Однако они позволяют реализовать лишь простейшие модели. Известно [1], что любую сложную систему можно аппроксимировать с любой заданной точностью, если подходящим образом подобрать функциональное представление нечетких логических связок, которые участвуют в модели. Цель статьи заключается в исследовании методов нечеткого логического вывода на основе комбинации функционального представления нечетких логических операций, схем агрегирования и методов дефазификации.

1. ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Нечеткая система управления (НСУ) — это интеллектуальная система, использующая нечеткое описание управляемого процесса и системы его управления в виде базы нечетких правил для генерации последовательности управляющих решений, обеспечивающих достижение целей управления [1]. Основой для построения НСУ является схема управления с участием эксперта, который на основе опыта и знаний об управлении объектом формирует описание процесса управления. Затем это описание преобразуется в базу правил и в дальнейшем используется в системе управления уже без участия эксперта. Нечеткие правила — это нечеткие продукционные правила, которые при фиксированной цели управления (например, сохранение значений управляемого параметра в некоторой области допустимых значений) описывают стратегии управления на качественном уровне. Алгоритмы нечеткого управления используются в нечетких контроллерах, под которыми подразумеваются программно-аппаратные системы, управляющие некоторым процессом. Нечеткие контроллеры актуальны для тех прикладных задач, где классические стратегии управления не применимы, а именно в случае нелинейности системы управления, в условиях значительной неопределенности, а также в системах управления, основанных на использовании экспертной информации.

Пусть X и Y — множества значений входной и выходной переменных соответственно, тогда функционирование НСУ описывается функцией $f : X \to Y$. Важнейший этап моделирования нечетких систем — восстановление неизвестной функции f, после чего для каждого конкретного значения входной переменной $x \in X$ становится возможным найти конкретное значение выходной переменной $y \in Y$. Для описания связи между множествами входных и выходных переменных будем использовать *логическую модель* [2]. Это означает, что входные и выходные переменные являются лингвистическими, а функция $f(x)$ приближенно описывается совокупностью нечетких продукционных правил вида

если (посылка), ***то*** (заключение),

которые составляют базу правил НСУ.

Рассмотрим схему функционирования НСУ (рис. 1).

База знаний содержит информацию, которая подразделяется на базу данных и базу правил, и является единственной компонентой НСУ, которая напрямую зависит от специфики приложений.

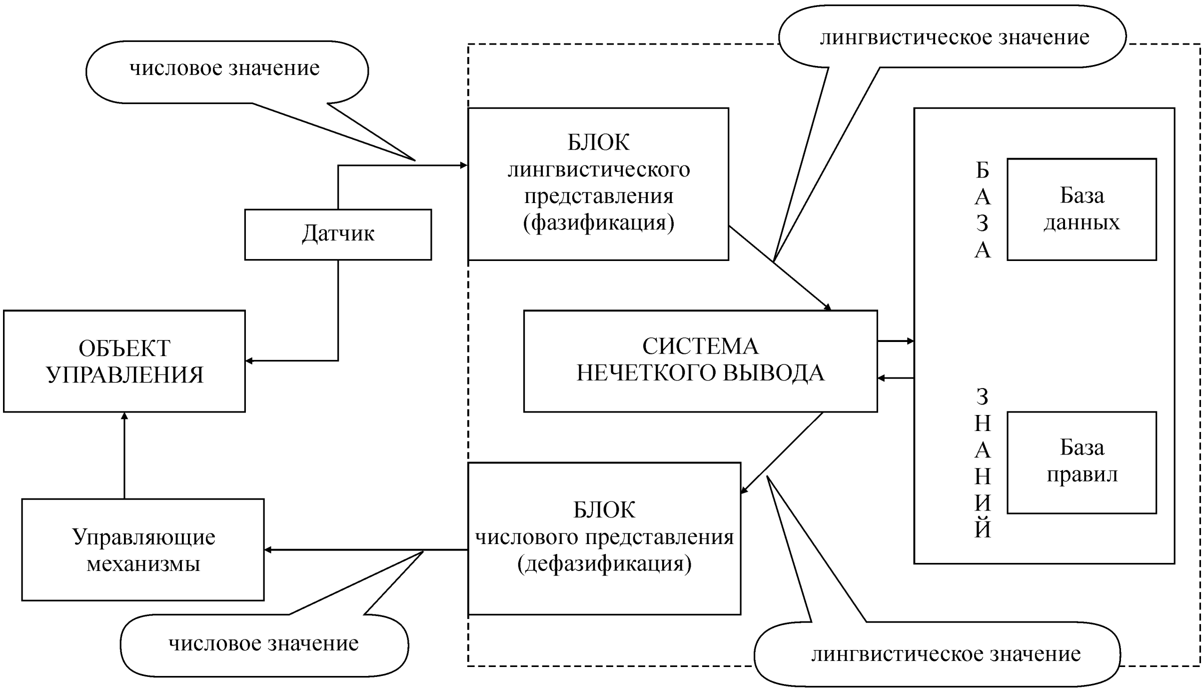


Рис. 1

Блок фазификации преобразует четкие значения входных переменных в нечеткие множества, которые в дальнейшем наряду с базой правил используются системой нечеткого логического вывода. Его действие можно описать следующим образом:

$$A' = Fuzzy(x_0),$$

где x_0 значение входной переменной X , $Fuzzy$ — оператор фазификации, A' — нечеткое подмножество области определения входной переменной X . По сути, фазификация — это процедура перевода числового значения x_0 в нечеткий формат. Существуют две возможности, чтобы определить $Fuzzy$:

а) каждому x_0 ставится в соответствие функция принадлежности вида

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = x_0, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

называемая синглетоном;

б) каждому x_0 ставится в соответствие унимодальное нечеткое число треугольного или, в общем случае, $(L\text{–}R)$-типа с функцией принадлежности

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} L(x), \ x < x_0, \\ 1, \ x = x_0, \\ R(x), \ x > x_0. \end{cases}$$

Для определения конкретного числового значения выходной переменной Y используется процедура *дефазификации*, для реализации которой существует значительное число методов. К основным относятся методы центра тяжести, центра площади, центра максимумов, а также методы левого и правого модальных значений. В данной статье нами рассматривались:

метод центра тяжести (Center of Gravity — COG)

$$y = \frac{\int_{\min}^{\max} x \cdot \mu(x)dx}{\int_{\min}^{\max} \mu(x)dx}$$

или в случае дискретного представления множеств

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)};$$

метод центра максимумов (Middle of maxima — MOM)

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

где $y_1 = \min\{z \mid \mu_{B'}(z) = \max \mu_{B'}(x)\}$, $y_2 = \max\{z \mid \mu_{B'}(z) = \max \mu_{B'}(x)\}$. В приведенных формулах через

μ обозначена функция принадлежности выходного нечеткого множества, y — числовое значение, соответствующее этому множеству.

Практически все исследования по разработке НСУ сводятся к синтезу алгоритма управления, основу которого составляет нечеткий логический вывод, основанный на схеме правильных рассуждений modus ponens. Нечеткая интерпретация всех логических переменных позволяет перейти к *обобщенному modus ponens:*

$$\frac{\begin{array}{l}\text{предпосылка } \textbf{если } x \text{ есть } A, \ \textbf{то } y \text{ есть } B \\ \text{факт } x \text{ есть } A'\end{array}}{\text{заключение } y \text{ есть } B'},$$

где A, A', B, B' — нечеткие числа, определяемые своими функциями принадлежности на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Заметим, что правилу

$$\text{если } x \text{ есть } A, \ \text{то } y \text{ есть } B$$

соответствует нечеткая импликация $A \to B$, тогда заключение B' определяется на основе *операции композиции* $\circ$ в виде

$$B' = A' \circ (A \to B).$$

или в терминах функций принадлежности в виде

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \min \left\{ \mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x,y) \right\} \right).$$

Заметим, что вместо $(\sup - \min)$-композиции можно рассматривать $(\sup - T)$-композицию, где T представляет собой *треугольную норму*[1]. В этом случае

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T \left\{ \mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x,y) \right\} \right),$$

при этом T не зависит от оператора импликации. На окончательный результат значительное влияние оказывает выбор операций композиции и импликации.

[1] *Треугольной нормой (Т-нормой)* называется операция $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $T(x,y)=T(y,x)$ — коммутативность;

b) $T((x,y),z)=T(x,(y,z))$ — ассоциативность;

c) $T(0,0)=0,\ T(x,1)=T(1,x)=x$ — ограниченность;

d) $(x\le t)\wedge(y\le z)\Rightarrow T(x,y)\le T(t,z)$ — монотонность.

Треугольные нормы используются для моделирования пересечения нечетких множеств или конъюнкции. Двойственным понятием к Т-норме является треугольная *S-конорма*, которая моделирует объединение или дизъюнкцию нечетких множеств. Т-конорма также является коммутативной, ассоциативной, монотонной, но ограниченность задается в виде

$$S(1,1)=1,\ \ S(x,0)=S(0,x)=x.$$

Приведенные в литературе исследования по выбору оператора импликации свидетельствуют о значительной зависимости от специфики прикладной задачи. Наряду с интуитивным подходом определения импликации в приложениях существует и аксиоматический подход. В [2] отмечается, что в качестве импликации можно рассматривать следующие логические функции: $x \wedge y$, y, $x \leftrightarrow y$, $x \to y$. Заметим, что для их нечеткого определения важно, как задан базис. Пусть для моделирования конъюнкции используется T-норма, дизъюнкции — S-конорма, а операция отрицания $n(x)$ формализует закон де Моргана в виде $T(x,y) = n\left(S\left(n(x), n(y)\right)\right)$. В [1, 2] рассматриваются следующие основные классы нечетких импликаций: импликации, представимые в виде T-норм; импликации, полученные обобщением булевой импликации; импликации, полученные на основе нечеткой эквиваленции; импликации, полученные с помощью функции расстояния. Для исследования нами были выбраны импликации, относящиеся к первому и второму классам, а именно

$$I_1 = \min(x,y) \ \text{(Mamdani)},$$

$$I_2 = x \cdot y \ \text{(Larsen)},$$

$$I_3 = \min\{1, 1-x+y\} \ \text{(Lukasiewicz)},$$

$$I_4 = \max\{1-x, y\} \ \text{(Kleene—Dienes)},$$

$$I_5 = 1 - x + xy \ \text{(Kleene—Dienes—Lukasiewicz)}.$$

Заметим, что первые две импликации являются T-нормами, а последние три получены с помощью операции отрицания $n(x) = 1 - x$ и соответственно следующих S-конорм: $S_m(x,y) = \min\{x+y, 1\}$, $S(x,y) = \max\{x,y\}$, $S_p = x + y - x \cdot y$.

Пусть база знаний содержит совокупность правил, тогда

$$\frac{\begin{array}{l} R_1: \ \textbf{если } x \text{ есть } A_1, \ \textbf{то } y \text{ есть } B_1 \\ R_2: \ \textbf{если } x \text{ есть } A_2, \ \textbf{то } y \text{ есть } B_2 \\ \qquad \cdots \\ R_N: \ \textbf{если } x \text{ есть } A_n, \ \textbf{то } y \text{ есть } B_N \\ \hfill x \text{ есть } A \end{array}}{\hfill y \text{ есть } B.}$$

Каждому правилу R_i соответствует импликация $A_i \to B_i$. Существуют несколько подходов к формированию функции принадлежности заключения $\mu_{B'}(y)$.

Схема 1. Вначале осуществляется агрегирование всех правил с помощью подходящего оператора агрегирования Agg, в результате чего получается некоторое обобщенное правило $R = Agg(R_1, R_2, ..., R_n)$, а затем применяется оператор композиции $B' = A' \circ R = A' \circ Agg(R_1, R_2, ..., R_n)$.

Схема 2. Вначале формируется заключение для каждого правила вывода $\forall i = \overline{1, N}$ $(B_i' = A' \circ R_i)$, , а затем к полученным компонентам B_i' применяется оператор агрегирования, т.е. полагается $B' = Agg(B_1', B_2', ..., B_n')$.

Схема 3. В рамках схемы 2 после получения нечетких множеств B_i' к каждому из них применяется процедура дефазификации, после чего осуществляется агрегирование.

Таким образом, в НСУ процедуры агрегирования используются либо для агрегирования нечетких продукционных правил в обобщенное правило, либо для агрегирования нечетких выходных множеств в обобщенное выходное множество, либо для агрегирования дефазифицированных значений выходной переменной, соответствующих каждому из правил. В данной статье нами рассматривались первые две схемы.

Следует отметить, что в настоящее время существует значительный арсенал операторов агрегирования [3]. Под оператором агрегирования будем понимать оператор, который векторной оценке ставит в соответствие скалярную величину. Различают конъюнктивную, дизъюнктивную и компромиссную стратегии агрегирования. Каждой стратегии соответствует свой оператор агрегирования. Важнейший класс операторов агрегирования составляют операторы осреднения. Дизъюнктивная стратегия моделируется T-нормами, конъюнктивная — S-конормами. Перспективный класс для приложений составляют порядковые операторы агрегирования ($OWA, LOWA$), поскольку с помощью весовых коэффициентов, ассоциированных с данными операторами, можно моделировать стратегии агрегирования, отношение к риску и энтропию, а также формировать принципы согласования решений (например, при агрегировании учитывать не все правила, а *большинство*, *почти все*, *как можно больше* и т.д. — такой принцип согласования решений называется *принципом нечеткого большинства*).

Проектирование НСУ опирается на решение задачи выбора функционального представления нечетких логических связок, операции композиции, схемы и операции агрегирования, методов фазификации и дефазификации. Исследователи отмечают, что успешное решение этих проблем во многом определяет эффективность НСУ.

2. О ВЛИЯНИИ СХЕМ АГРЕГИРОВАНИЯ И ОПЕРАЦИЙ КОМПОЗИЦИИ НА РЕЗУЛЬТАТ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Пусть $R_1, R_2 \in F(X \times X)$ — нечеткие отношения, заданные на множестве X. Так как нечеткое бинарное отношение — это подмножество специального универсального множества, то для нечетких отношений можно определить те же операции, что и для нечетких множеств. В частности, произведение отношений можно ввести на основе треугольных норм. Различные типы произведений над отношениями R_1 и R_2 представлены в табл. 1.

Здесь ля фиксированного элемента $(x, y) \in X \times X$ используются обозначения $r_1 = \mu_{R_1}(x, y)$ и $r_2 = \mu_{R_2}(x, y)$.

Определим $(\max - T)$-композицию с помощью треугольных норм, представленных в табл. 1, формулой

Таблица 1

№	Произведение отношений	Функция принадлежности
1	Логическое	$T_л(r_1, r_2) = \min\{r_1, r_2\}$
2	Алгебраическое	$T_а(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2$
3	Граничное	$T_з(r_1, r_2) = \max\{r_1 + r_2 - 1, 0\}$
4	Драстическое	$T_д(r_1, r_2) = \begin{cases} r_1, \text{ если } r_2 = 1, \\ r_2, \text{ если } r_1 = 1, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$
5	Нормированное	$T_н(r_1, r_2) = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2 - r_1 \cdot r_2}$

$$\mu_{(\max - T_{\text{indtx}})}(x,y) = \max_z T_{\text{index}} \left\{ \mu_R(x,z), \mu_R(z,y) \right\},$$

где $\text{index} \in \{\text{л}, \text{а}, \text{г}, \text{д}, \text{н}\}$ определяет тип T-нормы.

Обозначим через $R^2_{\text{index}} = T_{\text{index}}(R,R)$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $R \in F(X \times X)$ — нечеткое бинарное отношение, $T_{\text{index}}(x,y)$ — треугольная T-норма, тогда справедлива цепочка включений

$$R^2_{\text{д}} \subseteq R^2_{\text{г}} \subseteq R^2_{\text{а}} \subseteq R^2_{\text{н}} \subseteq R^2_{\text{л}}.$$

Для доказательства достаточно проверить выполнение следующей цепочки неравенств:

$$\begin{cases} \mu_R(x,z), \mu_R(z,y) = 1, \\ \mu_R(z,y), \mu_R(x,z) = 1, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \overset{(1)}{\le} \max\{\mu_R(x,z) +$$

$$+\mu_R(z,y) - 1, 0\} \overset{(2)}{\le} \mu_R(x,z)\mu_R(z,y) \overset{(3)}{\le}$$

$$\overset{(3)}{\le} \frac{\mu_R(x,z)\mu_R(z,y)}{\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y)} \overset{(4)}{\le}$$

$$\overset{(4)}{\le} \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}.$$

1. Пусть $\mu_R(x,z) = 1$. Тогда $\mu_R(x,z) \le \max\{\mu_R(x,z), 0\}$. Аналогично доказывается, если $\mu_R(z,y) = 1$. Неравенство (1) доказано.

2. Пусть $\max\{\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - 1, 0\} = 0$. Тогда $0 \le \mu_R(x,z)\mu_R(z,y)$. Если $\max\{\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - 1, 0\} = \mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - 1$, то

$$\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - 1 - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y) \le 0.$$

Неравенство (2) доказано.

3. Разделим левую часть неравенства (3) на правую часть. Получим

$$\frac{\mu_R(x,z)\mu_R(z,y)(\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y))}{\mu_R(x,z)\mu_R(z,y)} =_2$$

$$= \mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y) \le 1.$$

Если $\mu_R(x,z) = \mu_R(z,y) = 0$, то неравенство превращается в равенство. Неравенство (3) доказано.

4. Пусть $\min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} = \mu_R(x,z)$. Вычтем из левой части неравенства правую часть. Получим

$$\frac{\mu_R(x,z)\mu_R(z,y)}{\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y)} - \mu_R(x,z) =$$

$$= \frac{\mu_R(x,z)\mu_R(z,y) - \mu_R^2(x,z) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y) - \mu_R^2(x,z)\mu_R(z,y)}{\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y)} =$$

$$= \frac{\mu_R^2(x,z)(\mu_R(x,z) - \mu_R(z,y))}{\mu_R(x,z) + \mu_R(z,y) - \mu_R(x,z)\mu_R(z,y)} \ge 0.$$

Аналогично доказывается, если $\min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} = \mu_R(z,y)$. Неравенство (4) доказано.

Из доказанного утверждение непосредственно следует следующее.

Утверждение 2. Пусть $Agg = \max$ и B'_{index} — выходное нечеткое множество, полученное с помощью $(\max - T_{\text{index}})$-композиции, тогда

$$B'_{\text{д}} \subseteq B'_{\text{г}} \subseteq B'_{\text{а}} \subseteq B'_{\text{н}} \subseteq B'_{\text{л}}.$$

Пусть $B'_1 = A' \circ Agg(R_1, R_2, ..., R_n)$, $B'_2 = Agg(A' \circ R_1, A' \circ R_2, ..., A' \circ R_n)$. Каждому правилу R_i соответствует импликация $A_i \to B_i$.

Утверждение 3. Пусть $Agg = \max$, $\circ$ соответствует $(\sup - \min)$-композиции, тогда

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B'_1}(y) = \mu_{B'_2}(y) \right),$$

где

$$\mu_{B'_1}(y) = \sup_x \min\left\{ \mu_{A'}(x), \max_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_{R_i}(x,y) \right) \right\},$$

$$\mu_{B'_2}(y) = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \sup_x \min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{R_i}(x,y) \right) \right\}.$$

Доказательство немедленно вытекает из свойства дистрибутивности min относительно max.

$$\mu_{B'_1}(y) = \sup_{x\in X} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left(\min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{R_i}(x,y) \right) \right) \right\} =$$

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \sup_{x\in X} \left(\mu_{A'}(x), \mu_{R_i}(x,y) \right) \right\} = \mu_{B'_2}(x),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Пусть $Agg = \max$, $\circ$ соответствует $(\sup - \bullet)$-композиции, тогда

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B'_1}(y) = \mu_{B'_2}(y) \right).$$

В основе доказательства лежит дистрибутивный закон алгебраического произведения $(\bullet)$ относительно max.

Утверждение 5. Пусть $Agg = \min$, $\circ$ соответствует $(\sup - \min)$-композиции, тогда

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B'_1}(y) \le \mu_{B'_2}(y) \right) \Leftrightarrow B'_1 \subset B'_2.$$

Доказательство. Заметим, что $\forall i = \overline{1,n} \left(A' \circ \bigcap_{i=1}^n R_i \subset A' \circ R_i \right)$ влечет $A' \circ \bigcap_{i=1}^n R_i \subset \bigcap_{i=1}^n (A' \circ R_i)$, откуда следует утверждение.

Можно показать [4], что имеет место более общее

[2] Если $0 \le a$, $b \le 1$, то верно следующее неравенство $a + b - ab - 1 \le 0$.

В самом деле, так как $b \le 1$, то $1 - b \ge 0$. Умножим неравенство $a \le 1$ на $(1-b)$. Получим $a(1-b) \le 1 - b \Leftrightarrow a - ab - 1 + b \le 0 \Leftrightarrow a + b - ab - 1 \le 0$.

Утверждение 6. Пусть $Agg = \min$, $\circ$ соответствует $(\sup - T)$-композиции, тогда

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B_1'}(y) \le \mu_{B_2'}(y)\right) \Leftrightarrow B_1' \subset B_2'.$$

Теперь предположим, что значение входной переменной X задается синглетоном $\hat{x}_0$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{x}_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае функция принадлежности выходного нечеткого множества запишется в виде

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \min \left\{ \mu_{\widehat{X_0}}(x), \mu_{A \to B}(x, y) \right\} \right) = \forall y \in Y \left(\min \mu_{A \to B}(x_0, y) \right).$$

Справедливо следующее

Утверждение 7. Пусть нечеткая система описывается совокупностью нечетких продукционных правил $\{R_i\}_{i=\overline{1,n}}$, входная переменная задается синглетоном $\hat{x}_0$, тогда независимо от оператора агрегирования

$$\forall y \in Y \left(\mu_{B_1'}(y) = \mu_{B_2'}(y)\right).$$

Доказательство. С одной стороны,

$$\mu_{B_1'}(y) = \sup_{x \in X} \min \left\{ \mu_{A'}(x), \mu_{Agg(R_1, \ldots R_n)}(x, y) \right\} = = \mu_{Agg(R_1, \ldots R_n)}(x_0, y).$$

С другой стороны,

$$\mu_{B_2'}(y) = \mu_{Agg(A' \circ R_1, \ldots, A' \circ R_n)}(y) = = \mu_{Agg(R_1, \ldots, R_n)}(x_0, y).$$

Таким образом, проведенные теоретические исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. В случае дизъюнктивной стратегии агрегирования $(Agg = \max)$ и максминной или максмультипликативной операций композиции схема агрегирования не оказывает влияния на результирующее выходное нечеткое множество.

2. В случае конъюнктивной стратегии агрегирования и $(\sup - T)$-композиции для каждой треугольной нормы T выходное нечеткое множество, полученное по схеме 1, включено в нечеткое множество, полученное по схеме 2.

3. Оператор агрегирования (max или min) не существен при $(\sup - \min)$-композиции и фазификации с помощью синглетона.

4. Выходные нечеткие множества, полученные с помощью различных $(\sup - T)$-композиции, упорядочены отношением включения. Это означает, что качество аппроксимации зависит от выбора метода дефазификации.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Пусть X, Y — соответственно входная и выходная лингвистические переменные, принимающие свои значения в лингвистической шкале S, каждому терму которой сопоставим треугольное нечеткое число (a, l, r), где a — модальное значение, l, r — левый и правый коэффициенты нечеткости соответственно.

Для представления продукционных правил будем использовать логическую модель, т.е. каждое правило имеет вид

$$R_i : \text{если } x \text{ есть } A_i, \text{то } y \text{ есть } B_i \ \ (i = \overline{1, K}),$$

где $A_i, B_i \in S$ — значения входной и выходной лингвистических переменных. Каждому правилу R_i соответствует импликация $A_i \to B_i$ с функциональным представлением $I_1 - I_5$. Комбинируя функциональное нечеткие логические операции $(\circ, \to)$, схемы агрегирования и методы дефазификации, получим различные методы нечеткого логического вывода (табл. 2).

Таблица 2

Импликация	Композиция		Схема агрегирования		Оператор агрегирования		Метод дефазификации	
I_1	max—min	max—•	Схема 1	Схема 2	min	max	*MOM*	*COG*
I_2								
I_3								
I_4								
I_5								

Например, можно рассматривать следующие методы:

$$M_1 = (I_1, \max - \min, \text{ схема } 1, \min, MOM),$$

$$M_2 = (I_4, \max - \min, \text{ схема } 2, \min, COG),$$

По результатам, полученным в ходе вычислительного эксперимента, были сделаны следующие выводы:

1. Оператор импликации оказывает существенное влияние на форму выходного нечеткого множества (рис. 2).

Для характеристики формы выходного нечеткого множества можно ввести следующие показатели: а) площадь, ограниченная функцией принадлежности; б) высота выходного нечеткого множества, равная максимальному значению функции принадлежности; в) центр

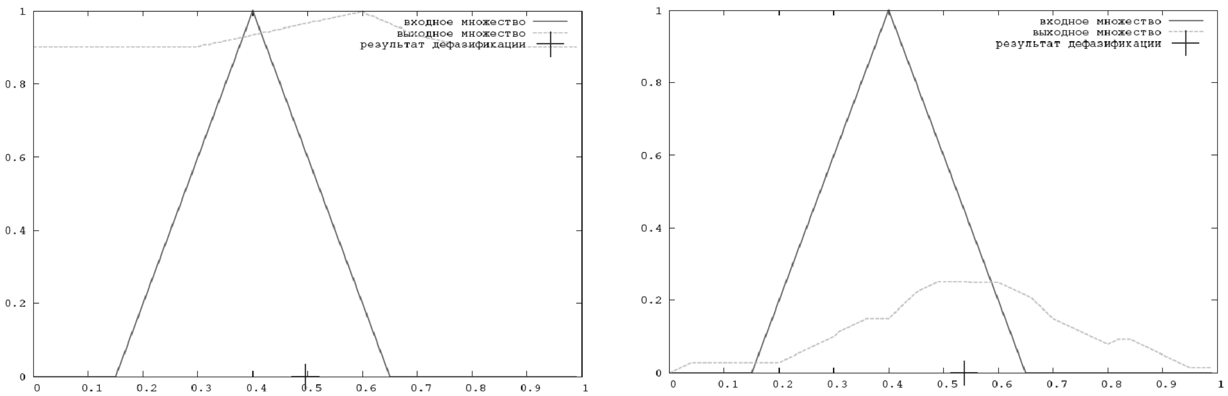


Рис. 2

тяжести выходного нечеткого множества. Заметим, что некоторые из них лежат в основе методов дефазификации.

2. При использовании треугольных нечетких чисел результирующее выходное нечеткое множество может не удовлетворять условию нормальности (что также видно по рис. 2). Это означает, что максимальное значение функции принадлежности меньше единицы. Из этого следует, что дефазификация методом *COG* и методом *MOM* дает различные результаты.

3. Схема агрегирования при использовании метода дефазификации *COG* практически не влияет на выходное значение.

4. Если в качестве импликации рассматривать $I_1 - I_4$, то тип композиции в схеме нечеткого логического вывода влияет на результирующее выходное значение. Если берется импликация I_5 то тип композиции не существен.

5. Для импликаций I_1 и I_2 нецелесообразно использовать в качестве оператора агрегирования $\min$, поскольку выходное нечеткое множество может оказаться пустым (т. е. с нулевой функцией принадлежности). По этой же причине I_3, I_4, I_5 не совместимы с оператором агрегирования max. Если импликация совместима с операцией агрегирования, то важно правильно выбрать метод дефазификации, поскольку результирующие выходные нечеткие множества могут сильно различаться.

6. При использовании в качестве операции агрегирования среднего арифметического выходное нечеткое множество не удовлетворяет условию нормальности. Это означает, что нужно в качестве метода дефазификации выбрать такие, которые не учитывают максимального значения функции принадлежности выходного нечеткого множества. В нашем случае таким методом является *COG*.

7. Лучшим методом дефазификации на наш взгляд является *COG*, поскольку даже при различных формах выходного нечеткого множества результат дефазификации в большинстве случаев не зависит от остальных параметров нечеткого логического вывода. Метод *MOM* учитывает максимум функции принадлежности выходного нечеткого множества, поэтому при его использовании определяемое значение выходной переменной в значительной степени зависит от выбранных операторов импликации и агрегирования.

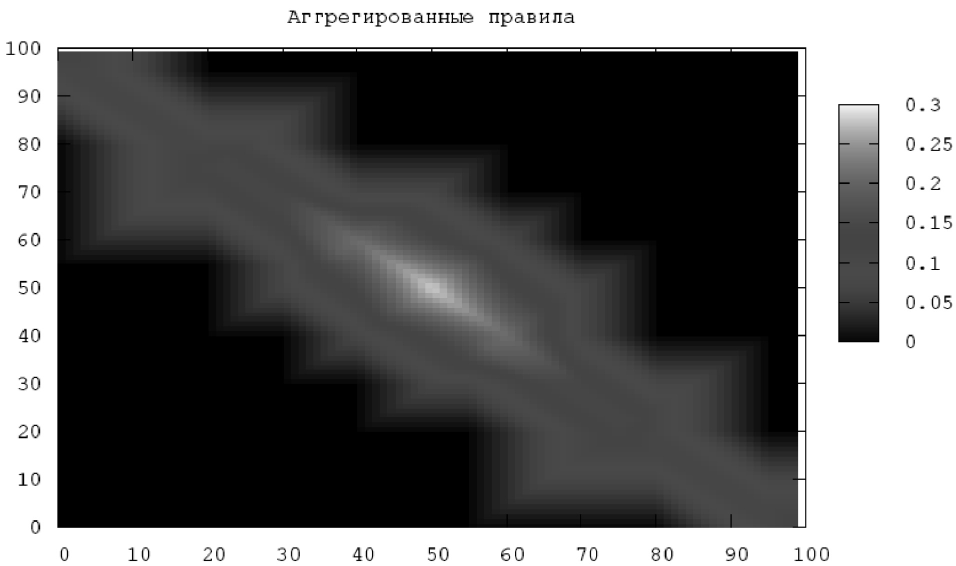
8. Выбор импликации и композиции оказывает существенное влияние на графическое представление базы правил (рис. 3).

Самыми существенными параметрами системы нечеткого логического вывода являются импликация и метод дефазификации. Для сравнения импликаций и методов дефазификации использовалась среднеквадратическую ошибку аппроксимации

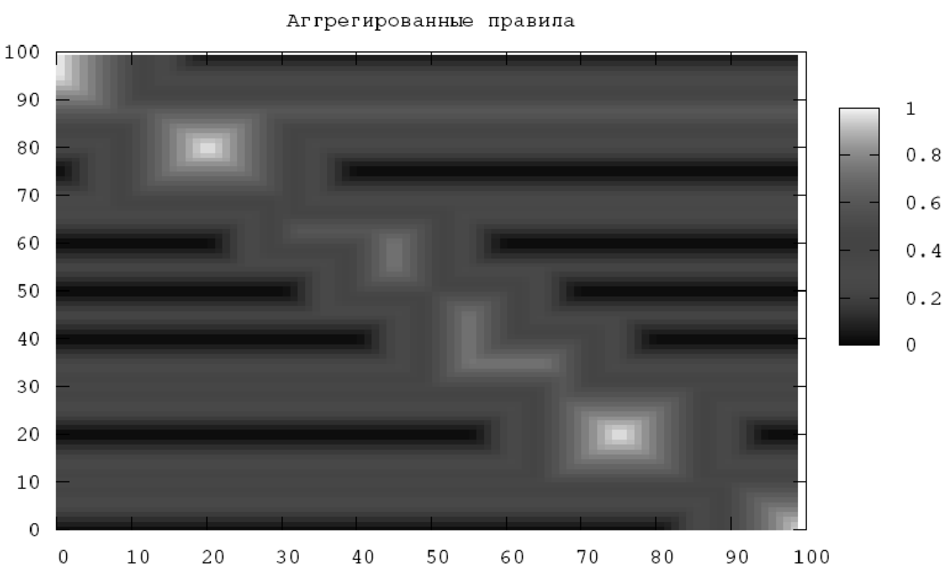
$$SE(FLC[i,j]) = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - FLC[i,j](x_k))^2}{N},$$

где $FLC[i,j]$ обозначает метод нечеткого логического вывода, в котором используется операция импликации I_i и метод дефазификации D_j. Здесь используется массив пар чисел $(x_k, y_k)_{k=\overline{1,N}}$, где x_k — значение входной переменной, y_k — значение выходной переменной. Для сравнения результатов, получаемых различными методами, целесообразно перейти к относительной среднеквадратической ошибке

$$\hat{SE}(FLC[i,j]) = \frac{SE(FLC[i,j]) - \min SE}{\max SE - \min SE} \in [0,1],$$



а)



б)

Рис. 3

где $\min SE = \min\limits_{i,j}(SE(FLC[i,j]))$, $\max SE = \max\limits_{i,j}(SE(FLC[i,j]))$.

Заметим, что качество аппроксимации с помощью метода нечеткого логического вывода тем хуже, чем больше среднеквадратическая ошибка. Поэтому можно ввести в рассмотрение показатель качества аппроксимации вида

$$AP(FLC[i,j]) = 1 - \hat{SE}(FLC[i,j]),$$

который также определен на $[0,1]$, что позволяет сравнивать различные методы нечеткого логического вывода.

На основе введенного показателя введем еще два новых для оценки оператора нечеткой импликации и метода дефазификации:

$$IAP(i) = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} AP(FLC[i,j]),$$

где N_1 — количество импликаций, рассматриваемых в рамках данного исследования.

$$DAP(j) = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} AP(FLC[i,j]),$$

где N_2 — количество методов дефазификации, рассматриваемых в рамках данного исследования.

Для сравнения импликаций I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 и методов дефазификации D_1 и D_2 был рассмотрен следующий пример. Пусть X, Y — соответственно входная и выходная переменные. Обе переменные принимают значение в лингвистической шкале

$$S = \{VS, S, M, L, VL\},$$

где VS = Very Small, S = Small, M = Medium, L = Large, VL = VeryLarge. Каждый терм задается треугольной функцией принадлежности (рис. 4).

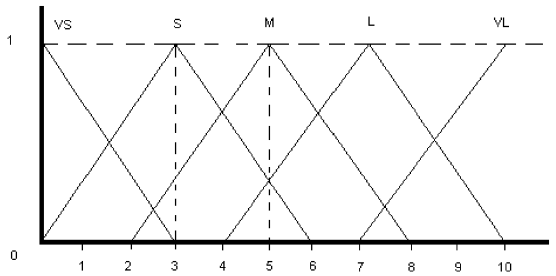


Рис. 4

Пусть моделируемая функция имеет вид $Y = X$ и описывается совокупностью правил:

если $X = VS$, *то* $Y = VS$;

если $X = S$, *то* $Y = S$;

если $X = M$, *то* $Y = M$;

если $X = L$, *то* $Y = L$;

если $X = VL$, *то* $Y = VL$.

Было проведено два эксперимента — с 25 и 100 точками дискретизации. Значения показателя $\hat{SE}(FLC[i, j])$ для обоих экспериментов представлены в табл. 3.

Анализ табл. 3 позволяет сделать следующие выводы:

а) самыми «хорошими» импликациями являются $I_1 = \min(x, y)$ и $I_3 = x \cdot y$. В сочетании с методом дефазификации COG они обеспечивают лучшую аппроксимацию, поскольку для них среднеквадратическая ошибка наименьшая;

б) метод дефазификации COG по сравнению с методом MOM демонстрирует лучшие качества;

в) увеличение количества узлов дискретизации улучшает качество аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zimmermann H.-J.* Fuzzy Set Theory and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1997. — 429 p.

2. *Леденева Т.М., Грибовский А.В.* О нечетких импликациях, полученных обобщением булевой функции // Вестник ВГУ. Математика, Воронеж: 2003. № 2. С. 189—196.

3. *Леденева Т.М., Недикова Т.Н.* Операторы агрегирования в оценочных моделях // Информационные технологии. — 2003. — № 2. — С. 2—9.

4. *Леденева Т.М., Татаркин Д.С.* О некоторых схемах правильных рассуждений // Матер. Международн. школы-семинара (Воронеж, 12—17 сентября 2005 г.) «Современные проблемы механики и прикладной математики», Воронеж: ВГУ, 2005. С. 18—24.

Таблица 3

	$N=25$					$N=100$				
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
D_1	0.0107	0.0381	0.0283	0.0861	0.0557	0.0064	0.0251	0.0174	0.0401	0.0324
D_2	0.0498	0.0565	0.0641	0.0759	0.0566	0.3047	0.0400	0.0290	0.0449	0.0294