УДК 621.396.01

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ СИГНАЛОВ ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Е. Г. Жиляков, И. Ю. Мисливец, Т. Н. Созонова

Белгородский государственный университет

В статье рассматривается новый метод оценивания производной и интерполяции сигналов по эмпирическим данным. Интерполяция и оценивание производной осуществляется в классе целых функций. При этом для выбора конкретной интерполирующей функции используется вариационный принцип минимизации евклидовой нормы производной, трансформанта Фурье которой имеет финитную область определения.

Пусть в результате измерений в эквидистантных точках $t_i = i\Delta t \;\; i = 0,...,N,$ интервала

$$t \in [0, N\Delta t], \tag{1}$$

области определения некоторого характеризующего физический (природный) процесс параметра $u(t)$ (сигнал, эмпирическая функция) получен набор (вектор) эмпирических данных

$$\vec{u} = (u_0, ..., u_N)^T, \quad u_i = u(i\Delta t), \;\; i = 0,...,N, \tag{2}$$

где символ T означает транспонирование.

Эмпирические данные обычно регистрируются с целью установления свойств генерирующих их объектов, которые естественно описать на языке характеристик эмпирических функций $u(t)$, например с помощью ее первой и второй производных, определяющих, как известно, скорость и ускорение изменений наблюдаемого параметра.

Проблема заключается в том, что значения сигнала известны только в некотором наборе точек интервала изменений аргумента вида (1). Поэтому достаточно часто прибегают к построению так называемых интерполирующих функций $\widehat{u}(t)$, области определения которых включают интервал (1), причем в точках измерений (узлах интерполяции) должны выполняться равенства

$$\widehat{u}_i = \widehat{u}(i\Delta t) = u_i, \;\; i = 0,1,...,N. \tag{3}$$

Проблема построения функций по эмпирическим данным при выполнении интерполяционных условий вида (3) исследовалась в работах многих авторов на протяжении сотен лет. В результате этих исследований предложено достаточно много методов интерполяции и оценивания производных [1, 2, 3]. При этом, как правило, в качестве оценок производных предлагается использовать соответствующие производные интерполирующих функций. Указанные методы до определенной степени условно можно разделить на два направления: формально-математический и подход на основе учета некоторой содержательной сущности, которая в той или иной форме отражается в свойствах функции, порождающей эмпирические данные.

Формально-логическое направление базируется на априорном постулировании явного вида интерполирующих функций, например параметрических зависимостей в виде полиномов, сплайнов или использование разложений по некоторым базисам. Дальнейшее заключается в определении неизвестных параметров.

Не отрицая полезности такого подхода, все же отметим, что он скорее применим для синтеза функций с конечными областями определения, например в технике [4], где для достижения максимальной точности возможно варьировать узлами интерполяции и можно пренебречь требованиями существования и непрерывности производных высших порядков.

Методы интерполяции на основе учета содержательной сущности эмпирических данных развиты в меньшей мере. В качестве основного примера можно упомянуть интерполяцию с использованием целых функций [2], к числу которых относится интерполяционная формула Котельникова—Шеннона.

Очевидно, что в случае построения функций по эмпирическим данным целесообразно использовать классы интерполирующих функций, элементы которых удовлетворяют условиям, отражающим сущностную сторону. Это позволит повысить адекватность и достоверность интерпретации свойств интерполируемых сигналов в терминах решаемой прикладной задачи (моделирование поведения исследуемых процессов и объектов).

Наряду с этим следует отметить, что использование в качестве оценки производной сигнала производную интерполирующей функции является малообоснованным и в частности не позволяет применять те или иные естественные ограничения на скорость изменения значений функции.

В данной статье предлагается новый подход к интерполированию и оцениванию производных в классе целых функций. Из соображений адекватности представляется целесообразным областью определения сигнала считать всю числовую ось, т.е.

$$-\infty \le t \le \infty, \tag{4}$$

т. к. нет оснований полагать, что для эмпирических функций она ограничивается интервалом (1).

При этом на основе физических соображений можно утверждать, что эмпирические функции являются непрерывными со всеми своими производными. Таким образом, для достижения адекватности необходимо, чтобы в любой точке области определения существовали и были непрерывными производные

$$\widehat{u}^{(k)}(t) = \frac{d^k \widehat{u}(t)}{dt^k},$$

причем выполнялись неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{u}^{(k)}(t)\right|^2 dt < \infty, \;\; k = 0,1.... \tag{5}$$

В основе дальнейших построений используется представление

$$\widehat{u}(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau, \tag{6}$$

которое позволяет по производной

$$f(\tau) = d\widehat{u}(\tau)/d\tau \tag{7}$$

вычислить интерполирующую функцию.

Очевидно, что при этом должны выполняться равенства вида (3).

Такой подход дает возможность учитывать и другие ограничения, которым должна удовлетворять производная.

Для определения производной предлагается использовать класс непрерывных вещественных дифференцируемых функций с областью определения (4) и ограниченной евклидовой нормой (см. (5)), представимых в виде

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega\in\Omega} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \tag{8}$$

где $F(\omega)$ — трансформанта Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$$\Omega = \left[-\Omega_2, -\Omega_1\right) \cup \left[\Omega_1, \Omega_2\right); \tag{9}$$

$$\Omega_1 < \infty; \quad \Omega_2 < \infty.$$

Выбор области определения трансформанты Фурье Ω может быть продиктован априорными сведениями о свойствах сигнала.

Подстановка представления (8) в правую часть (6) позволяет получить соотношение для вычисления интерполирующей функции на основе трансформанты Фурье производной

$$\widehat{u}(t) = u_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega\in\Omega} F(\omega) \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega/2} e^{\frac{j\omega t}{2}} d\omega, \tag{10}$$

так что равенством (3) можно придать вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega\in\Omega} F(\omega) \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t i}{2}\right)}{\omega\Delta t/2} e^{\frac{j\omega\Delta t}{2} i} d\omega = v_i/\Delta t, \tag{11}$$

где

$$v_i = (u_i - u_0), i = 1,..., N. \tag{12}$$

Ясно, что такие интерполирующие функции тоже относятся к классу целых. Вместе с тем имеется возможность использовать дополнительные ограничения.

Можно привести достаточно много аргументов использования вариационного принципа

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega\in\Omega} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega = \min, \tag{13}$$

где использовано равенство Парсеваля [2].

Один из аргументов заключается в целесообразности построения функции с наименьшей в смысле евклидовой нормы производной скорости изменения значений.

Другим важным соображением может служить необходимость повышения устойчивости вычислений к воздействиям случайных ошибок измерений (регуляризация).

Таким образом, задача сводится к поиску решения вариационной изопериметрической задачи, определяемой условием (13) и ограничениями вида (11).

Нетрудно показать [5], что искомое решение представимо в виде

$$F(\omega) \equiv \sum_{i=1}^{N} \beta_i \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t i}{2}\right)}{\omega\Delta t/2} e^{-\frac{j\omega\Delta t}{2} i} d\omega, \qquad (14)$$

когда $\omega \in \Omega$ и нулю в противном случае.

Для вычисления вектора множителей Лагранжа $\vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_N)^T$ следует воспользоваться подстановкой представления (14) в левые части равенств (11). В результате нетрудно получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A\vec{\beta} = \vec{v} = (v_1, ..., v_N)^T, \qquad (15)$$

где

$$A = \{a_{ki}\};$$

$$a_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin\left(\frac{xk}{2}\right)\sin\left(\frac{xi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos\left[\frac{x}{2}(k-i)\right] dx; \quad (16)$$

$$\bar{\Omega}_r = \Delta t \Omega_r, r = 1, 2.$$

Нетрудно показать, что в строгом смысле симметричная матрица с элементами вида (16) является положительно определенной. Вместе с тем, если интервал интегрирования удовлетворяет условию

$$N(\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1) < \pi, \qquad (17)$$

то подынтегральная функция сохраняет знак и, в силу теоремы о среднем, получаем неравенство

$$a_{ik} = \frac{\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{x_c k}{2}\right)\sin\left(\frac{x_c i}{2}\right)}{\left(x_c/2\right)^2} \times \\ \times \cos\left[\frac{x_c(k-i)}{2}\right] < \frac{1}{N}. \qquad (18)$$

Здесь x_c — некоторая средняя точка интервала интегрирования, которая в рассматриваемом смысле будет слабо зависеть от сочетания индексов k, i. Поэтому значения элементов матрицы будут близки и ее определитель будет близок к нулю. Следовательно, решение СЛАУ вида (15) будет неустойчивым.

Используя тригонометрические тождества, подынтегральную функцию в (15) можно представить в следующем виде

$$\frac{\sin\left(\frac{xk}{2}\right)\sin\left(\frac{xi}{2}\right)\cos\left[\frac{x}{2}(k-i)\right]}{\left(x/2\right)^2} = \\ = \frac{1+\cos[x(k-i)] - \cos(xi) - \cos(xk)}{x^2}. \qquad (19)$$

Отсюда и из (16) следует, что если выполняется неравенство

$$\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = N\Delta t(\Omega_2 - \Omega_1) \geq 2\pi, \qquad (20)$$

то хотя бы одна из тригонометрических функций числителя (19) при изменениях $i, k = 1, ..., N$, на интервале интегрирования претерпит изменения на полном периоде. При этом гарантировано, что наименьшее из собственных чисел, а следовательно и определитель матрицы A будет заметно больше нуля. Такой вывод подтверждают многочисленные вычислительные эксперименты.

Отметим, что неравенство (20) отражает соотношение неопределенности применительно к преобразованиям Фурье [2]. Использование знака равенства в правой части (20) позволяет согласовать выбор ширены интервала области определения трансформанты Фурье с длительностью $N\Delta t$ отрезка сигнала.

С позиций рассматриваемой проблемы неравенство (20) позволяет управлять параметрами интерполяционного процесса, чем обеспечивается его сходимость при любом шаге дискретизации Δt.

После решения СЛАУ (15) для вычислений оценки производной и интерполирующей функции можно воспользоваться соотношениями (8) и (10), куда следует подставить представление (14). В результате нетрудно получить вычислительные формулы

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} i\right)}{\omega\Delta t/2} \times \\ \times \cos\left[\omega\left(\tau - i\Delta t/2\right)\right] d\omega; \qquad (21)$$

$$\widehat{u}(\tau) = u_0 + \frac{\tau}{\pi} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} i\right)}{\left(\omega\tau/2\right)\left(\omega\Delta t/2\right)} \times \\ \times \cos\left[\frac{\omega}{2}(\tau - i\Delta t)\right] d\omega. \qquad (22)$$

Отметим еще одну возможность организации вычислений. Пусть заранее известен набор $\tau_k, k = 1, ..., L$ интервала $[0, N\Delta t]$, в которых предполагается в дальнейшем вычисление интерполирующих функций и оценок производных. Тогда, используя (21) и (22) с учетом СЛАУ (16) можно получить следующие вычислительные формулы

$$\vec{f} = (f(\tau_1), ..., f(\tau_L))^T = BA^{-1}\vec{v} = G\vec{v}; \quad (23)$$

$$\hat{\vec{u}} = (\hat{u}(\tau_1),\dots,\hat{u}(\tau_L))^T = \\ = u_0\vec{e}_L + CA^{-1}\vec{v} = R\vec{v} + u_0\vec{e}_L; \tag{24}$$

где

$$\vec{e}_L = (1,\dots,1)^T;$$

$$B = \{b_{ki}\};\ k = 1,\dots,L;\ i = 1,\dots,N.$$

$$b_{ki} = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}i\right)}{\omega\Delta t/2}\cos\left[\omega\left(\tau_k - i\Delta t/2\right)\right]d\omega; \tag{25}$$

$$C = \{c_{ki}\};$$

$$c_{ki} = \frac{\tau_k}{\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau_k}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}i\right)}{\left(\omega\tau_k/2\right)\left(\omega\Delta t/2\right)}\times \\ \times\cos\left[\frac{\omega}{2}\left(\tau_k - i\Delta t\right)\right]d\omega; \tag{26}$$

Удобство применения этих формул заключается в том, что матрицы G и R могут быть вычислены заранее и многократно использоваться при каждом новом измерении вектора $\vec{v}$.

Рассмотрим представляющий практический интерес случай, когда значения интерполирующей функции и оценки производной вычисляются также в дискретном эквидистантном наборе

$$\tau_k = \frac{k}{M}\Delta t,\ k = 1,\dots,NM, \tag{27}$$

где M — количество дискрет на интервале длиной Δt.

При этом соотношения (25) и (26) легко преобразовать к виду

$$b_{ki} = \frac{1}{\pi\Delta e}\int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin\left(\frac{xi}{2}\right)}{x/2}\cos\left[\frac{x}{2}\left(\frac{2k}{M} - i\right)\right]dx, \tag{28}$$

$$c_{ki} = \frac{1}{\pi M}\int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin\left(\frac{xk}{2M}\right)\sin\left(\frac{xi}{2}\right)}{\left(x/2\right)^2}\times \\ \times\cos\left[\frac{x}{2}\left(\frac{k}{M} - i\right)\right]dx. \tag{29}$$

Таким образом, предложенный метод позволяет сохранить исходные значения сигнала, снизить вычислительные нагрузки за счет предварительного вычисления матриц G и R и многократного их использования для вновь поступивших данных. Заметим также, что интерполирующая функция обладает непрерывными производными любого порядка.

Таким образом, в работе получены основные соотношения, позволяющие вычислить значения оценки производных и интерполирующих функций по эмпирическим данным. Предлагаемый подход основывается на классе функций с финитными областями определения трансформанты Фурье (финитными спектрами) и в этом он близок к условиям применимости интерполяционной формулы Котельникова—Шенона.

Однако использование вариационного принципа минимизации нормы первой производной приводит к большей универсальности, т.е. кроме интерполяционных условий вида (5) можно ввести и дополнительные ограничения, отражающие априорные требования к интерполирующей функции, в том числе к производной.

Отметим также, что конечность области определения спектра не накладывает существенных ограничений, лишь бы выполнялось неравенство (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. / К. Ланцош; пер. с англ. М. З. Кайнера. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.

2. *Хургин Я.И.* Финитные функции в физике и технике. / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. — М.: Наука, 1971. — 408 с.

3. *Колесников А.П.* Введение в численный анализ. — М.: Изд-во РУДН, 2002. — 218 с.

4. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.

5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. / В. И. Смирнов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1974. — Т. 4, ч. 1. — 336 с.