УДК 007:519.876.5

ПРОСТРАНСТВА СИСТЕМНЫХ ОТНОШЕНИЙ В СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Д. В. Сысоев*, Е. Н. Десятирикова**

** Воронежский институт высоких технологий*
*** Воронежский государственный университет*

Рассматриваются вопросы формирования пространств действий в условиях отношений и взаимодействия подсистем на уровне структурного (параметрического) представления множеств входов и выходов системы.

Необходимость моделирования пространств действий в условиях отношений и взаимодействия подсистем инициировало разработку математических методов, базирующихся на основе логико-лингвистического и структурно-параметрического подходов. Логико-лингвистический подход исходит из гипотезы: раз человек способен, используя естественный язык, анализировать и разрешать конфликтные проблемы, то должны существовать некие искусственные языковые средства и нечисловые компьютерные процедуры, с помощью которых можно имитировать конфликтные процессы и находить пути их компромиссного урегулирования. Эта гипотеза претворяется в жизнь использованием формализованных языков, близких по выразительности к естественному языку, но в тоже время обладающих развитыми средствами формальных эквивалентных преобразований. К ним относятся: нечеткие множества, реляционные и ролевые языки. Модели, построенные на базе языков такого типа, получили название логико-лингвистических, а вычислительные процедуры, реализующие их, названы мягкими вычислениями.

При структурно-параметрическом подходе конфликт рассматривается как специфический способ взаимоотношения систем, в результате которого происходит формирование надсистемы, обладающей уже другими свойствами, чем каждая из конфликтующих систем в отдельности. Следовательно, проблема построения модели взаимодействия систем сводится к разработке способов формального описания отношений, связывающих участников конфликта, а именно таких как действие, влияние, воздействие, независимость, содействие, противодействие, безразличие, подобие и других.

Системная формализация. Так же как и в [2, 3, 5], формально представим описание системы тройкой $S = \{S, G, R\}$, $S \subset X(t) \times Y(t)$, $X(t) = \times\{X(t)\}_m$ — входной объект системы $Y(t) = \times\{Y(t)\}_p$ — выходной объект системы ($t \in T = [0, T]$ — время, $\times$ — символ декартова произведения); $S = \{S_i\}_N$ — множество элементов (подсистем), $S_i \subset X_i(t) \times Y_i(t)$, $X_i(t) = \times\{X_{ik}(t)\}$, $X_{ik}(t) = \{x_{ik}(t)\}$, $k = \overline{1, m_i}$, $Y_i(t) = \times\{Y_{ir}(t)\}$, $Y_{ir} = \{y_{ir}(t)\}$, $r = \overline{1, \rho_i}$; $G = (S, E)$ — ориентированный граф с множеством вершин S, $|S| = N$ и множеством дуг $E = \{e_{ij}\}$, $|E| = M$, характеризующий $\forall i, j = \overline{1, N}$ наличие связей между подсистемами $S_i \subset S$; $R = <R, F>$ — алгебра, где $R(t) = \{R(C(t), X(t))\}_N$ $(R_i(t) : (C_i(t) \times X_i(t)) \to Yi(t)$ — отображение, $C(t) = \times\{C_i(t)\}, Ci(t) = \{C_{i_\nu}(t)\}$, $\nu = \overline{1, m_i}$ — множество глобальных состояний i-й подсистемы) — множество носитель; $F(t) = \{f_1, f_2, \dots, f_\xi\}$ — сигнатура алгебры. И если $R(t)_i$ — функция, такая, что $(x_i(t), y_i(t)) \subset S_i \Leftrightarrow \exists(c_i(t) \in C_i(t))$, то

$$y_i = R_i(c_i(t), x_i(t)). \qquad (1)$$

Здесь $R_i(t)$ называется глобальной реакцией подсистемы S_i [1]. Через $x_i(t), y_i(t), c_i(t)$ обозначены соответствующие реализации множеств $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $C_i(t)$.

В таком представлении, с каждой подсистемой S_i однозначно связаны цель функционирования W_i, полезность достижения цели в виде вещественной функции $q_i = q_i(x_i(t), R_i(c_i(t), x_i(t)))$ и производная по системе $q_j'(s_i) = q_j'(s_i, t) = \lim\limits_{\Delta Xi(Si) \to 0} q_j(x_j(t) + \Delta x_j(s_i, t)) - q_j(x_j(t))) / \Delta x_i(s_i, t)$, где $\Delta x_i(s_i, t)$ — сложный вектор-приращение, полученный входом подсистемы S_j в результате действия элемента S_i в момент времени t (действие элемента задается возмущением $\Delta x_i(s_i, t)$ [4]. Это относится и к системе S в целом.

Пространство взаимных системных отношений в структурно-параметрическом пред-

ставлении. Применяя аналогичную формализацию для каждой из подсистем S_i так же как и в [6], представим ее структуру в виде ориентированного графа $G_i = (V_i, E_i)$. Граф G_i, $i = \overline{1,N}$ имеет множество вершин $V_i = \{X_{ik}(t)\}_{m_i} \cup \cup \{C_i(t)\}_{\eta_i} \cup \{Y_{ir}(t)\}_{p_i}$ и множество дуг E_i, где $\{X_{ik}(t)\}_{m_i}, \{C_{i_v}(t)\}_{\eta_i}, \{Y_{ir}(t)\}_{p_i} \neq \varnothing$ — множества входов, состояний и выходов подсистемы S_i. В графе отсутствуют смежные вершины из множеств $\{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ и $\{Y_{ir}(t)\}_{p_i}$, а также взаимосвязи внутри этих множеств. Вершины $\{Y_{ir}(t)\}_{p_i}$ достижимы из вершин $\{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ только через вершины множества состояний $\{C_{i_v}(t)\}_{\eta_i}$. Это вполне отражает наше представление о взаимодействии входов и выходов в подсистеме.

Это позволяет рассматривать граф системы $G = (S, E)$ в виде некоторого агрегированного графа, вершины которого представляются графами $G_i = (V_i, E_i)$ — из вершины G_i в вершину G_j идет дуга тогда и только тогда, когда имеется хотя бы одна дуга, направленная из вершины $v_i \in V_i$ графа $G_i = (V_i, E_i)$ в вершину $v_j \in V_j$ графа $G_j = (V_j, E_j)$. Агрегированный граф отображает укрупненную структуру взаимодействия подсистем. Для того, чтобы получить более подробное описание, этот граф следует развернуть в некоторый исходный граф $G^s = (V^s, E^s)$ с вершинами $V^s = \left\{\bigcup_{i=1}^{N}\{X_{ik}(t)\}_{m_i}\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{N}\{C_{i_v}(t)\}_{\eta_i}\} \cup \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{N}\{Y_{ir}(t)\}_{p_i}\right\}$ и дугами $E^s = E \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right\}$, позволяющий описывать взаимодействие подсистем на уровне структурного (параметрического) представления множеств входов и выходов. Заметим, что здесь множество дуг исходного графа распадается как бы на два подмножества: E — подмножество внешних дуг, концы которых соединяют графы G_i и $\bigcup_{i=1}^{N} E_i$ — подмножество внутренних дуг, соединяющих вершины графов G_i, причем $E \cap \left\{\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right\} = \varnothing$.

Из теории графов известно, что вершина $v_j^s \in V^s$ достижима из вершины $v_j^s \in V^s$ если существует в графе $G^s = (V^s, E^s)$ путь из v_j^s в v_j^s. Тогда можно сформировать множество достижимости $V_j^s(v_j^s)$ вершин v_j^s как множество вершин $v_j^s \in V_j^s \subseteq V^s$, достижимых из вершины v_j^s, и определить множество достижимости $V_j^s(v_j^s)$ множества V_i^s как объединение множеств вершин $\bigcup_{i=1}^{CardV_i^s} V_j^s(v_j^s) = V_j^s(v_j^s) \subseteq V^s$, достижимых из каждой вершины $v_j^s \in V_j^s$, где $CardV_i^s$ — мощность множества V_j^s.

Отношение достижимости будем обозначать через $v_j^s\vec{d}v_j^s$ или $(v_j^s, v_j^s) \in \vec{d}$, контрдостижимости через $v_j^s\overleftarrow{d}v_j^s$ или $(v_j^s, v_j^s) \in \overleftarrow{d}$, взаимной достижимости $((v_j^s\vec{d}v_j^s) \wedge (v_j^s\overleftarrow{d}v_j^s))$ через $v_j^s\overleftrightarrow{d}v_j^s$ или $(v_j^s, v_j^s) \in \overleftrightarrow{d}$.

Введем ряд определений для $S_i, S_j \subset S$; $i, j = \overline{1,N}$.

Определение 1. В системе S с графом $G^s = (V^s, E^s)$ подсистема S_j с графом $G_j = (V_j, E_j)$ достижима по входу из подсистемы S_i с графом $G_i = (V_i, E_i)$, если существуют непустые подмножества $X_i^{o_j}(t) \subseteq \{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ $\{Y_i^{o_j}(t) \subseteq \{Y_{ir}(t)\}_{p_i}\}$ и $X_i^{o_j}(t) \subseteq \{X_{jk}(t)\}_{m_i}$ такие, что $X_i^d(t)$ является множеством достижимости множества $X_i^{o_j}(t)(Y_i^{o_j}(t))$.

Определение 2. В системе S с графом $G^s = (V^s, E^s)$ подсистема S_j с графом $G_j = (V_j, E_j)$ достижима по выходу из подсистемы S_i с графом $G_i = (V_i, E_i)$, если существуют непустые подмножества $X_i^{o_j}(t) \subseteq \{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ $\{Y_i^{o_j}(t) \subseteq \{Y_{ir}(t)\}_{p_i}\}$ и $\{Y_i^{o_j}(t) \subseteq \{Y_{jk}(t)\}_{p_i}\}$ такие, что $Y_i^d(t)$ является множеством достижимости множества $X_i^{o_j}(t)(Y_i^{o_j}(t))$.

Определение 3. В системе S с графом $G^s = (V^s, E^s)$ подсистема S_j с графом $G_j = (V_j, E_j)$ и подсистема S_i с графом $G_i = (V_i, E_i)$ взаимодостижимы по входу, если существуют непустые подмножества $X_i^{o_j}(t) \subseteq \{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ $\{Y_i^{o_j}(t) \subseteq \subseteq \{Y_{ir}(t)\}_{p_i}\}$ и $X_i^{o_j}(t) \subseteq \{X_{jk}(t)\}_{m_i}$ $\{Y_j^{o_j}(t) \subseteq \subseteq \{Y_{jr}(t)\}_{p_i}\}$; $X_i^{d_i}(t) \subseteq \{X_{jk}(t)\}_{m_i}$ и $X_i^{d_j}(t) \subseteq \subseteq \{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ такие, что $X_i^d(t)$ является множеством достижимости множества $X_i^d(t)(Y_i^d(t))$, а $X_i^{d_j}(t)$ — множеством достижимости множества $X_i^{o_j}(t)(Y_i^{o_j}(t))$.

Определение 4. В системе S с графом $G^s = (V^s, E^s)$ подсистема S_j с графом $G_j = (V_j, E_j)$ и подсистема S_i с графом $G_i = (V_i, E_i)$ взаимодостижимы по выходу, если существуют непустые подмножества $X_i^d(t) \subseteq \{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ $\{Y_i^d(t) \subseteq \{Y_{ir}(t)\}_{p_i}\}$ и $X_i^{o_i}(t) \subseteq \{X_{jk}(t)\}_{m_i}$ $\{Y_j^{o_i}(t) \subseteq \{Y_{jr}(t)\}_{p_i}\}$; $Y_i^{d_i}(t) \subseteq \subseteq \{Y_{jk}(t)\}_{m_i}$ и $Y_i^{d_j}(t) \subseteq \{Y_{ik}(t)\}_{m_i}$ такие, что $Y_i^d(t)$ является множеством достижимости множества $X_i^d(t)(Y_i^d(t))$, а $Y_i^{d_j}(t)$ — множеством достижимости множества $X_j^{o_i}(t)(Y_j^{o_i}(t))$.

Определения позволяют ввести в рассмотрение различные типы достижимости для двух произвольных подсистем. Назовем их соответственно: «вход—вход» — $S_i^{\text{вх}}\vec{d}S_j^{\text{вх}}(X_i^{o_j}(t)\vec{d}X_j^{d_i}(t))$; «вход—выход» — $S_i^{\text{вх}}\vec{d}\ S_j^{\text{вых}}(X_i^{o_j}(t)\vec{d}Y_j^{d_i}(t))$; «выход—вход» — $S_i^{\text{вых}}\vec{d}\ S_j^{\text{вх}}(Y_i^{o_j}(t)\vec{d}X_j^{d_i}(t))$; «выход—выход» — $S_i^{\text{вых}}\vec{d}\ S_j^{\text{вых}}(Y_i^{o_j}(t)\vec{d}Y_j^{d_i}(t))$.

Сделаем несколько замечаний к определениям:

1. Отношение $S_i^{вх}\vec{d}S_j^{вх}(X_i^{o_j}(t)\vec{d}X_j^{d_i}(t))$ является сюръекцией, т. к. любой элемент из $X_j^{d_i}(t)$ есть образ, по крайней мере, одного элемента из $X_i^{o_j}(t)$. Это относится и к отношениям $S_i^{вх}\vec{d}S_j^{вых}$, $S_i^{вых}\vec{d}S_j^{вх}$, $S_i^{вых}\vec{d}S_j^{вых}$.

2. Множество достижимости по входу $X_j^{d_i}(t)$ для самой подсистемы S_i из $X_j^{d_i}(t)$ равно множеству входов $\{X_{ik}(t)\}_{m_i}$, т. к. и $X_j^{o_i}(t) = \{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ (это не противоречит понятиям теории графов, т. к. здесь считается, что каждая вершина достижима из себя самой), а из $Y_i^{o_i}(t)$ — определяется наличием обратной связи (петли для вершины S_i в графе G).

3. Множество достижимости по выходу $Y_i^{d_i}(t)$ для самой подсистемы S_i из $X_i^{o_i}(t)$ определяется матрицей достижимости графа G_i, а из $Y_i^{o_i}(t)$ равно самому этому множеству, т.е. $Y_i^{d_i}(t) = Y_i^{o_i}(t)$ по тому же свойству достижимости вершины из себя самой.

4. Для взаимной достижимости совсем не обязательно, чтобы $X_i^{o_i}(t) = X_i^{d_j}(t)$ и $Y_i^{o_i}(t) = Y_i^{d_j}(t)$ или $X_i^{o_j}(t) \cap X_i^{d_j}(t) \neq \varnothing$ и $Y_i^{o_j}(t) \cap Y_i^{d_j}(t) \neq \varnothing$. Вполне возможен случай, когда и (или) $X_i^{o_j}(t) \cap X_i^{d_j}(t) = \varnothing$ и (или) $Y_i^{o_j}(t) \cap Y_i^{d_j}(t) = \varnothing$ (рис 1).

Поскольку между входом и выходом подсистем имеется связь типа $R_i(t):(C_i(t)\times X_i(t)) \to$ $\to Y_i(t)$, которую структурно можно описать через матрицу достижимости графа G_i, то, не теряя общности, всегда можно рассматривать лишь один тип введенных выше достижимостей, например, «вход—вход»или «выход—выход».

Определения (1)—(4) позволяют считать пространствами системного взаимодействия подсистем S_i и S_j, $i,j=\overline{1,N}$ подмножества $X_i^{o_j}(t)$, $X_j^{o_i}(t)$ для типов достижимости «вход—вход», «вход—выход» и $Y_i^{o_j}(t)$, $Y_j^{o_i}(t)$ для типов достижимости «выход—вход»; «выход—выход». Эти множества являются подпространствами

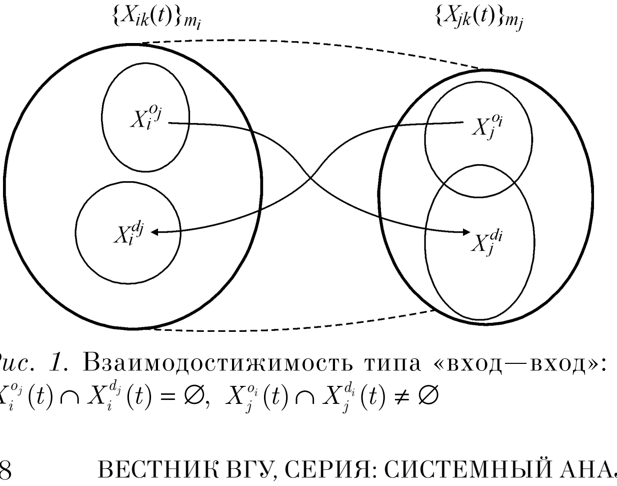

Рис. 1. Взаимодостижимость типа «вход—вход»: $X_i^{o_j}(t) \cap X_i^{d_j}(t) = \varnothing$, $X_j^{o_i}(t) \cap X_j^{d_i}(t) \neq \varnothing$

пространств входных и выходных переменных соответственно для подсистем S_i и S_j.

Для нахождения этих подпространств рассмотрим механизм их формирования , например, для типа достижимости «вход—вход».

Обозначим через $D_{x_i y_i} = [d_{rk}^i]_{P\times P}$, $P=\max\{m_i,p_i\}$ матрицу достижимости типа «вход—выход» для подсистемы S_i, $i=\overline{1,N}$. Элементы матрицы определяются следующим образом:

$$d_{rk}^i = \begin{cases} 1, \text{ если } (X_{ir},Y_{ik}) \in \vec{d}; \\ 0, \text{ если } (X_{ir},Y_{ik}) \notin \vec{d}. \end{cases} \tag{2}$$

В выражении (2) при условии $p_i \neq m_i$, с целью получения квадратной матрицы вводятся фиктивные строки или столбцы с нулевыми элементами.

Далее, как и в [4] введем квадратную матрицу $H_{y_i x_j} = [h_{rk}^{ij}]_{L\times L}$, $L=\max\{p_i,m_i\}$. Назовем ее матрицей связи выхода подсистемы S_i с входом подсистемы S_j. Будем считать, что элементы матрицы имеют значение 1 для всех r и k, для которых выполняется равенство $X_{jk}=Y_{ir}$ и значение 0, для которых $X_{jk}\neq Y_{ir}$, $k,r=\overline{1,L}$. Другими словами если соответствующая составляющая вектора Y_i становится составляющей вектора X_j, то соответствующий элемент матрицы равен 1. Следовательно, матрица $H_{y_i x_j}$ также как и $D_{x_i y_i}$ состоит из нулей и единиц (нуль — единичная матрица).

Заметим, что в нашем случае, если подсистема S_i связана с подсистемой S_j в выше рассмотренном случае (S_j является смежной вершиной для S_i в графе G) , то из (1) $x_j(t)=H_{y_i x_j} y_i(t)$ и $x_j(t)=H_{y_i x_j} R_i(c_i(t),x_i(t))$.

Построим теперь матрицу связи входа подсистемы S_i с входом подсистемы S_j как $H_{x_i x_j} = D_{x_i y_i} \wedge H_{y_i x_j} = [\upsilon_{rk}^i]_{L\times L}$. Напомним, что для двух нуль-единичных квадратных матриц $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ и $C=[c_{ij}]$ одной размерности s булевы операции определяются следующим образом: $c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{s}(a_{ik}\wedge b_{kj})$ для $C=A\wedge B$ и $c_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$ для $C=A\vee B$. Тогда по построению

$$\vartheta_{rk}^i = \begin{cases} 1, \text{ если } (X_{ir},Y_{ik}) \in \vec{d}; \\ 0, \text{ если } (X_{ir},Y_{ik}) \notin \vec{d}. \end{cases}$$

Построим матрицы $H_{x_i x_j}$ для всех i и j, $i,j=\overline{1,N}$, считая, что возможна связь между выходом и входом одного элемента (обратная связь). Причем если связь отсутствует, то

$H_{x_i x_j} = 0$. Таким образом матрицы связи образуют в совокупности квадратную матрицу $H_{xx} = [H_{x_i x_j}]_{N\times N}$. Матрица H_{xx} с одной стороны, описывает структуру системы S, которая формируется взаимодействием типовых соединений: каскадного (последовательного), параллельного, замыкания обратной связи, с другой стороны является матрицей смежности некоторого графа $G_{xx}(V_{xx}, E_{xx})$. По построению $V_{xx} = \bigcup_{i=1}^{N}\{X_{ik}(t)\}_{m_i}$ и $E_{xx} = \{e_{rk}^i\}$, таких что $e_{rk}^i = (X_{ir}(t), X_{jk}(t)) \in E_{xx}$ тогда и только тогда, когда $\vartheta_{rk}^i = 1$. Граф $G_{xx}(V_{xx}, E_{xx})$ эквивалентен исходному графу $G^s = (V^s, E^s)$ системы в смысле достижимости типа «вход—вход» по всем подсистемам $S_i \in S$ и, следовательно также как и матрица смежности H_{xx}, может использоваться для построения пространств системного взаимодействия $X_i^{o_j}(t)$, $X_j^{o_i}(t)$ подсистем S_i и $S_j \forall i, j = \overline{1, N}$. Алгоритмы построения матриц достижимости известны (именно эти матрицы позволяют сформировать искомые пространства), но следует отметить, что в нашем случае они могут оказаться не эффективными, т. к. граф G_{xx} имеет большую размерность.

Заметим, что если есть необходимость, аналогично можно построить и графы $G_{xy}(V_{xy}, E_{xy})$, $G_{yx}(V_{yx}, E_{yx})$, $G_{yy}(V_{yy}, E_{yy})$ с матрицами смежности H_{xy}, H_{yx}, H_{yy}, эквивалентные графу графу $G^s = (V^s, E^s)$ в смысле достижимости типов «вход—выход», «выход—вход», «выход—выход», и сформировать соответствующие пространства системного взаимодействия. Это обеспечивается наличием условия (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Месарович М., Такахара Я.* Обшая теория систем: математические основы. — М.: Мир, 1978. — 311 с.

2. *Сысоев В.В.* Бинарные отношения в структурно-параметрическом представлении систем. — Воронеж: ВО МАИ, 2001. — Вып. 4. — С. 5—15.

3. *Сысоев В.В.* Взаимные системные отношения в структурно-параметрическом представлении. — Воронеж, 2000. — С. 145—151.

4. *Сысоев В.В.* Конфликт. Сотрудничество. Независимость. Системное взаимодействие в структурно-параметрическом представлении. — М.: МАЭП, 1999. — 151 с.

5. *Сысоев В.В.* Многоместные отношения в структурно-параметрическом представлении систем. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 583—594.

6. *Шильяк Д.Д.* Децентрализованное управление сложными системами. — М.: Мир, 1994. — 576 с.