

# БИФУРКАЦИЯ МАЛЫХ СИНХРОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЛИЗКИМИ ЧАСТОТАМИ

В. В. Стрыгин, Г. Ю. Северин

Воронежский государственный университет

Рассматривается новая математическая проблема о бифуркации малых синхронных автоколебаний двух динамических систем. Линейные члены систем имеют близкие частоты. С помощью проекторов на инвариантные подпространства исходная многомерная система сводится к скалярной четырёхмерной системе на инвариантном интегральном гладком многообразии. В свою очередь, эта четырёхмерная система приводится к трёхмерной с  $2\pi$ -периодическими коэффициентами. При исследовании одного положения равновесия этой трёхмерной системы получены достаточные условия синхронизации малых автоколебаний.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Триста лет назад Х. Гюйгенс открыл явление синхронизации двух маятниковых часов, закреплённых на общей балке. Позже многие авторы обнаружили это явление в электротехнике, оптике, радиофизике и т.д. Ван-дер Поль [1], А. А. Андронов, А. А. Витт [2, 3] развили теорию нелинейных колебаний синхронизирующих систем. И. И. Блехман [4, 5] применил идеи синхронизации к анализу вибросистем. Исследованию синхронизации посвящено множество публикаций.

В данной работе исследуется математическая задача о бифуркации Хопфа малых синхронных автоколебаний двух динамических систем произвольных размерностей с близкими частотами. Мы существенно используем метод устойчивых гладких интегральных многообразий [6, 7] и идеи метода усреднения Боголюбова—Митропольского [8—10]. Следует особо подчеркнуть, что в работе анализируется структура обратных связей общего вида, приводящая к бифуркации устойчивых автоколебаний. При анализе явления синхронизации получены достаточные условия на обратные связи, гарантирующие бифуркацию малых автоколебаний.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О БИФУРКАЦИИ

Пусть  $\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R}^{m+2}$  — евклидовы пространства,  $B^{n+2}(r) = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : |x_i| < r \ (i = 1, \dots, n+2)\}$ ,  $B^{m+2}(r) = \{(y_1, \dots, y_{m+2}) \in \mathbb{R}^{m+2} : |y_j| < r \ (j = 1, \dots, m+2)\}$ . Будем считать, что  $\varepsilon_0 > 0$ , функция  $F_1(x_1, \dots, x_{n+2}, \varepsilon)$  определена в  $B^{n+2}(r) \times [0, \varepsilon_0]$  и принимает значения в  $\mathbb{R}^{n+2}$ , а  $F_2(y_1, \dots, y_{m+2}, \varepsilon)$

определена в  $B^{m+2}(r) \times [0, \varepsilon_0]$  и принимает значения в  $\mathbb{R}^{m+2}$ . Эти функции имеют по первой переменной непрерывные производные Фреше до 3-го порядка включительно, непрерывную производную первого порядка по  $\varepsilon$  и принимают значения в  $\mathbb{R}^{n+2}$  и в  $\mathbb{R}^{m+2}$  соответственно. Рассмотрим вначале две вспомогательные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_1(\varepsilon)x + X(x, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = A_2(\varepsilon)y + Y(y, \varepsilon), \quad (1')$$

где  $x = (x_1, \dots, x_{n+2})^T$ ,  $y = (y_1, \dots, y_{m+2})^T$ , линейные операторы

$$A_1(\varepsilon) : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}, \quad A_2(\varepsilon) : \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2},$$

причём  $A_1(\varepsilon) = A_1^0 + \varepsilon A_1^1 + \dots$ ,  $A_2(\varepsilon) = A_2^0 + \varepsilon A_2^1 + \dots$ . Нелинейные члены  $X(x, \varepsilon)$  и  $Y(y, \varepsilon)$  имеют по своим первым аргументам порядок малости не ниже третьего:

$$X(x, \varepsilon) = X_3(x, \varepsilon) + X_4(x, \varepsilon) + \dots,$$

$$Y(y, \varepsilon) = Y_3(y, \varepsilon) + Y_4(y, \varepsilon) + \dots$$

Пусть операторы  $A_1^0$  и  $A_2^0$  имеют по два простых мнимых характеристических числа  $\pm i$ , а остальные характеристические числа лежат в левой открытой комплексной полуплоскости.

Будем говорить (см., например, [18]), что при  $\varepsilon = 0$  имеет место бифуркация малых автоколебаний, если при малых  $\varepsilon > 0$  у системы (1)–(1') существует малое ненулевое решение, стремящееся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , период которого стремится к  $2\pi$ .

Пусть  $A_1^*(\varepsilon)$  и  $A_2^*(\varepsilon)$  — сопряжённые к  $A_1(\varepsilon)$  и  $A_2(\varepsilon)$  операторы,  $e_1^1(\varepsilon)$  и  $e_2^1(\varepsilon)$  — векторы из  $\mathbb{R}^{n+2}$ , для которых  $A_1(\varepsilon)e_1^1(\varepsilon) = e_2^1(\varepsilon)$  и  $A_1(\varepsilon)e_2^1(\varepsilon) =$

$= -e_1^1(\varepsilon)$ ,  $e_1^2(\varepsilon)$  и  $e_2^2(\varepsilon)$  — векторы из  $\mathbb{R}^{m+2}$ , для которых  $A_2(\varepsilon)e_1^2(\varepsilon) = e_2^2(\varepsilon)$  и  $A_2(\varepsilon)e_2^2(\varepsilon) = -e_1^2(\varepsilon)$ . Тогда можно указать векторы  $g_1^1(\varepsilon), g_2^1(\varepsilon)$  из  $\mathbb{R}^{n+2}$  и  $g_1^2(\varepsilon), g_2^2(\varepsilon)$  из  $\mathbb{R}^{m+2}$ , для которых  $A_1^*(\varepsilon)g_1^1(\varepsilon) = -g_2^1(\varepsilon)$ ,  $A_1^*(\varepsilon)g_2^1(\varepsilon) = g_1^1(\varepsilon)$ ,  $A_2^*(\varepsilon)g_1^2(\varepsilon) = -g_2^2(\varepsilon)$ ,  $A_2^*(\varepsilon)g_2^2(\varepsilon) = g_1^2(\varepsilon)$  и, кроме того,  $(e_i^1(\varepsilon), g_j^1(\varepsilon)) = (e_i^2(\varepsilon), g_j^2(\varepsilon)) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

### 3. ПЕРЕХОД К КАНОНИЧЕСКИМ ПЕРЕМЕННЫМ $\xi, u, \eta, v$

Пусть  $E_i^2(\varepsilon) = L(e_i^1(\varepsilon), e_i^2(\varepsilon))$  — линейные оболочки векторов  $e_i^1(\varepsilon), e_i^2(\varepsilon)$  ( $i = 1, 2$ ),  $E^n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : (x, g_1^1(\varepsilon)) = (x, g_2^1(\varepsilon)) = 0\}$ ,  $E^m(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^{m+2} : (y, g_1^2(\varepsilon)) = (y, g_2^2(\varepsilon)) = 0\}$ . Очевидно, что  $\mathbb{R}^{n+2} = E_1^2 \oplus E^n$ ,  $\mathbb{R}^{m+2} = E_2^2 \oplus E^m$ . Далее рассмотрим проекторы  $P_1(\varepsilon) : \mathbb{R}^{n+2} \mapsto E_1^2(\varepsilon)$ ,  $P_2(\varepsilon) : \mathbb{R}^{m+2} \mapsto E_2^2(\varepsilon)$  и  $Q_1(\varepsilon) : \mathbb{R}^{n+2} \mapsto E^n(\varepsilon)$ ,  $Q_2(\varepsilon) : \mathbb{R}^{m+2} \mapsto E^m(\varepsilon)$ , определённые следующим образом

$$P_1(\varepsilon)x = (x, g_1^1(\varepsilon))e_1^1(\varepsilon) + (x, g_2^1(\varepsilon))e_2^1(\varepsilon),$$

$$Q_1(\varepsilon)x = x - P_1(\varepsilon)x,$$

$$P_2(\varepsilon)y = (y, g_1^2(\varepsilon))e_1^2(\varepsilon) + (y, g_2^2(\varepsilon))e_2^2(\varepsilon),$$

$$Q_2(\varepsilon)y = y - P_2(\varepsilon)y.$$

Легко заметить, что  $P_1(\varepsilon)(E_1^2(\varepsilon)) = E_1^2(\varepsilon)$ ,  $P_2(\varepsilon)(E_2^2(\varepsilon)) = E_2^2(\varepsilon)$ ,

$$Q_1(\varepsilon)(E^n(\varepsilon)) = E^n(\varepsilon), \quad Q_2(\varepsilon)(E^m(\varepsilon)) = E^m(\varepsilon),$$

$$P_1(\varepsilon)(E^n(\varepsilon)) = 0, \quad Q_1(\varepsilon)(E^2(\varepsilon)) = 0,$$

$$P_2(\varepsilon)(E^m(\varepsilon)) = 0, \quad Q_2(\varepsilon)(E_2^2(\varepsilon)) = 0.$$

Пусть  $\xi_1 = (x, g_1^1(\varepsilon))$ ,  $\xi_2 = (x, g_2^1(\varepsilon))$  — координаты вектора  $P_1(\varepsilon)x$  в базисе  $e_1^1(\varepsilon), e_2^1(\varepsilon)$  пространства  $E_1^2(\varepsilon)$ ,  $\eta_1 = (y, g_1^2(\varepsilon))$ ,  $\eta_2 = (y, g_2^2(\varepsilon))$  — координаты вектора  $P_2(\varepsilon)y$  в базисе  $e_1^2(\varepsilon), e_2^2(\varepsilon)$  пространства  $E_2^2(\varepsilon)$ . Зафиксируем теперь в пространстве  $E^n(\varepsilon)$  некоторый базис  $h_1(\varepsilon), \dots, h_n(\varepsilon)$ , а в пространстве  $E^m(\varepsilon)$  некоторый базис  $f_1(\varepsilon), \dots, f_m(\varepsilon)$ . Пусть  $u_1, \dots, u_n$  — координаты вектора  $Q_1(\varepsilon)x$  в базисе  $h_1(\varepsilon), \dots, h_n(\varepsilon)$ ,  $v_1, \dots, v_m$  — координаты вектора  $Q_2(\varepsilon)y$  в базисе  $f_1(\varepsilon), \dots, f_m(\varepsilon)$ . Тогда  $\xi_1, \xi_2, u_1, \dots, u_n, \eta_1, \eta_2, v_1, \dots, v_m$  — новые канонические координаты в пространстве  $E_1^2(\varepsilon) \oplus E^n(\varepsilon) \oplus E_2^2(\varepsilon) \oplus E^m(\varepsilon)$ . Очевидно,

$$x = \xi_1 e_1^1(0) + \xi_2 e_2^1(0) + u_1 h_1(0) + \dots + u_n h_n(0), \quad (2)$$

$$y = \eta_1 e_1^2(0) + \eta_2 e_2^2(0) + v_1 f_1(0) + \dots + v_m f_m(0). \quad (2')$$

Базисные векторы  $h_i(\varepsilon), f_j(\varepsilon)$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ) — класса  $C^1$  по  $\varepsilon$ .

В [3, 4, 17] отмечается, что, как правило, синхронизирующее воздействие очень мало в сравнении с мощностью генераторов. Мы также введём малые линейные связи между уравнениями (1) и (1'). Будем исследовать векторную систему

$$\frac{dx}{dt} = A_1(\varepsilon)x + v\varepsilon K_1 y + X(x, \varepsilon), \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = A_2(\varepsilon)y + v\varepsilon K_2 x + Y(y, \varepsilon), \quad (3')$$

где  $K_1 : \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ ,  $K_2 : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ ,  $v \in [0, v_0]$ ,  $0 < \varepsilon \ll v \ll 1$ . Спроектируем операторами  $P_1(0)$  и  $Q_1(0)$  уравнение (1) на подпространства  $E_1^2(0)$  и  $E^n(0)$ , а операторами  $P_2(0)$  и  $Q_2(0)$  — уравнение (1') на подпространства  $E_2^2(0)$  и  $E^m(0)$

$$\begin{aligned} P_1(0) \frac{d}{dt} [P_1(0)x + Q_1(0)x] = \\ = P_1(0)A_1(\varepsilon)[P_1(0)x + Q_1(0)x] + \\ + v\varepsilon P_1(0)K_1[P_2(0)y + Q_2(0)y] + P_1(0)X(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q_1(0) \frac{d}{dt} [P_1(0)x + Q_1(0)x] = \\ = Q_1(0)A_1(\varepsilon)[P_1(0)x + Q_1(0)x] + \\ + v\varepsilon Q_1(0)K_1[P_2(0)y + Q_2(0)y] + Q_1(0)X(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4')$$

$$\begin{aligned} P_2(0) \frac{d}{dt} [P_2(0)y + Q_2(0)y] = \\ = P_2(0)A_2(\varepsilon)[P_2(0)y + Q_2(0)y] + \\ + v\varepsilon P_2(0)K_2[P_1(0)x + Q_1(0)x] + P_2(0)Y(y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Q_2(0) \frac{d}{dt} [P_2(0)y + Q_2(0)y] = \\ = Q_2(0)A_2(\varepsilon)[P_2(0)y + Q_2(0)y] + \\ + v\varepsilon Q_2(0)K_2[P_1(0)x + Q_1(0)x] + Q_2(0)Y(y, \varepsilon). \end{aligned} \quad (5')$$

Введём обозначения

$$\mathcal{A}_1(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2(0) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = (A_1'(0)e_1^1(0), g_1^1(0)), \quad a_{12} = (A_1'(0)e_2^1(0), g_1^1(0)),$$

$$a_{21} = (A_1'(0)e_1^1(0), g_2^1(0)), \quad a_{22} = (A_1'(0)e_2^1(0), g_2^1(0));$$

$$b_{11} = (A_2'(0)e_1^2(0), g_1^2(0)), \quad b_{12} = (A_2'(0)e_2^2(0), g_1^2(0)),$$

$$b_{21} = (A_2'(0)e_1^2(0), g_2^2(0)), \quad b_{22} = (A_2'(0)e_2^2(0), g_2^2(0)).$$

Операторы  $P_i(0)A_i(\varepsilon)P_i(0)$  в базисе  $e_i^1(\varepsilon), e_i^2(\varepsilon)$  ( $i = 1, 2$ ), очевидно, имеют матрицы

$$\mathcal{A}_i(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \frac{\mathcal{A}_i'(0)}{1!} + \varepsilon^2 \frac{\mathcal{A}_i''(0)}{2!} + \dots,$$

Легко заметить, что характеристические числа операторов  $\mathcal{A}_i(\varepsilon)$  находятся из уравнений

$$\lambda_i^2 - \varepsilon \alpha_i \lambda_i + 1 + O(\varepsilon) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

где

$$\alpha_1 = a_{11} + a_{22}, \quad \alpha_2 = b_{11} + b_{22}.$$

Нас будет интересовать тот случай, когда эти собственные числа лежат справа от мнимой оси:

$$a_{11} + a_{22} > 0, \quad b_{11} + b_{22} > 0. \quad (I)$$

Пусть операторы  $K_1$  и  $K_2$  таковы, что при всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+2} \otimes \mathbb{R}^{m+2}$

$$\begin{aligned} P_1(0)K_1Q_2(0)y &= Q_1(0)K_1P_2(0)y = \\ &= P_2(0)K_2Q_1(0)x = Q_2(0)K_2P_1(0)x = 0. \end{aligned} \quad (II)$$

Запишем это условие для базисных векторов  $e_1^1(0), e_2^1(0), h_1, \dots, h_n, e_1^2(0), e_2^2(0), f_1, \dots, f_m$ :

$$(g_1^1(0), K_1 f_l) = (g_2^1(0), K_1 f_l) = 0,$$

$$K_1 f_l - (g_1^1(0), K_1 f_l) e_1^1(0) - (g_2^1(0), K_1 f_l) e_2^1(0) = 0,$$

$$(g_1^2(0), K_2 h_p) = (g_2^2(0), K_2 h_p) = 0,$$

$$K_2 h_p - (g_1^2(0), K_2 h_p) e_1^2(0) - (g_2^2(0), K_2 h_p) e_2^2(0) = 0,$$

где  $l = 1, \dots, n, p = 1, \dots, m$ . Неизвестные в этих уравнениях — элементы  $k_{ij}^1$  и  $k_{ji}^2$  матриц  $K_1$  и  $K_2$  соответствующих операторов. Таким образом, условие (II) есть алгебраическая линейная однородная система из  $(4n + 4m)$  уравнений относительно  $2(n + 2)(m + 2)$  неизвестных  $k_{ij}^1$  и  $k_{ji}^2$ . Её пространство решений имеет размерность  $2nm + 8$ .

Итак, с учетом условия (II), в канонических координатах  $\xi_1, \xi_2, u_1, \dots, u_n, \eta_1, \eta_2, v_1, \dots, v_m$  уравнения (2) — (2') имеют вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}_1(\varepsilon)\xi + v\varepsilon L_1 \eta + \Xi(\xi, u, \varepsilon), \quad (6)$$

$$\frac{du}{dt} = C_1(\varepsilon)u + v\varepsilon D_1 u + H(\xi, u, \varepsilon), \quad (6')$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathcal{A}_2(\varepsilon)\eta + v\varepsilon L_2 \xi + \Psi(\eta, v, \varepsilon), \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = C_2(\varepsilon)v + v\varepsilon D_2 v + N(\eta, v, \varepsilon) \quad (7')$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T, \eta = (\eta_1, \eta_2)^T, u = (u_1, \dots, u_n)^T, v = (v_1, \dots, v_m)^T,$

$$C_1(\varepsilon) = A_1(\varepsilon)Q_1(0),$$

$$C_2(\varepsilon)v = A_2(\varepsilon)Q_2(0) = A_2(\varepsilon)Q_2(0),$$

$$D_1 u = Q_1(0)K_1 u = K_1 u -$$

$$-(K_1 u, g_1^1(0))e_1^1(0) - (K_1 u, g_2^1(0))e_2^1(0),$$

$$D_2 v = Q_2(0)K_2 v = K_2 v -$$

$$-(K_2 v, g_1^2(0))e_1^2(0) - (K_2 v, g_2^2(0))e_2^2(0),$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Из (4) — (5') следует, что элементы этих матриц вычисляются следующим образом

$$p_{11} = (K_1 e_1^2(0), g_1^1(0)), \quad p_{12} = (K_1 e_1^2(0), g_2^1(0)),$$

$$p_{21} = (K_1 e_2^2(0), g_1^1(0)), \quad p_{22} = (K_1 e_2^2(0), g_2^1(0));$$

$$q_{11} = (K_2 e_1^1(0), g_1^2(0)), \quad q_{12} = (K_2 e_1^1(0), g_2^2(0)),$$

$$q_{21} = (K_2 e_2^1(0), g_1^2(0)), \quad q_{22} = (K_2 e_2^1(0), g_2^2(0)).$$

Из (2) — (2') вытекает, что

$$\begin{aligned} \Xi(\xi, u, \varepsilon) &= P_1(0)X(x, \varepsilon) = \\ &= (X(x, \varepsilon), g_1^1(0))e_1^1(0) + (X(x, \varepsilon), g_2^1(0))e_2^1(0), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H(\xi, u, \varepsilon) &= Q_1(0)X(x, \varepsilon) = \\ &= X(x, \varepsilon) - \Xi(\xi, u, \varepsilon), \end{aligned} \quad (8')$$

$$\begin{aligned} \Psi(\psi, v, \varepsilon) &= P_2(0)Y(y, \varepsilon) = \\ &= (Y(y, \varepsilon), g_1^2(0))e_1^2(0) + (Y(y, \varepsilon), g_2^2(0))e_2^2(0), \end{aligned} \quad (9)$$

$N(\psi, v, \varepsilon) = Q_2(0)Y(y, \varepsilon) = Y(y, \varepsilon) - \Psi(\eta, v, \varepsilon)$ , (9') очевидно, имеют по  $\xi_1, \xi_2, u_1, \dots, u_n, \eta_1, \eta_2, v_1, \dots, v_m$  не менее чем третий порядок малости:

$$\Xi(\xi, u, \varepsilon) = \Xi_3(\xi, u, \varepsilon) + \Xi_4(\xi, u, \varepsilon) + \dots, \quad (10)$$

$$H(\xi, u, \varepsilon) = H_3(\xi, u, \varepsilon) + H_4(\xi, u, \varepsilon) + \dots, \quad (10')$$

$$\Psi(\psi, v, \varepsilon) = \Psi_3(\eta, v, \varepsilon) + \Psi_4(\eta, v, \varepsilon) + \dots, \quad (11)$$

$$N(\psi, v, \varepsilon) = N_3(\eta, v, \varepsilon) + N_4(\eta, v, \varepsilon) + \dots, \quad (11')$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_i(\xi, u, \varepsilon) &= (X_i(x, \varepsilon), g_1^1(0))e_1^1(0) + \\ &+ (X_i(x, \varepsilon), g_2^1(0))e_2^1(0), \end{aligned} \quad (12)$$

$$H_i(\xi, u, \varepsilon) = X_i(x, \varepsilon) - \Xi_i(\xi, u, \varepsilon), \quad (12')$$

$$\begin{aligned} \Psi_i(\eta, v, \varepsilon) &= (Y_i(y, \varepsilon), g_1^2(0))e_1^2(0) + \\ &+ (Y_i(y, \varepsilon), g_2^2(0))e_2^2(0), \end{aligned} \quad (13)$$

$$N_i(\eta, v, \varepsilon) = Y_i(y, \varepsilon) - \Psi_i(\eta, v, \varepsilon), \quad (13')$$

а  $X_i(x, \varepsilon), Y_i(y, \varepsilon)$  — члены 3-го порядка малости по  $x, y$  соответственно.

**4. УСТОЙЧИВЫЕ ГЛАДКИЕ  
ДВУМЕРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ  
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ**

$$(v = 0)$$

В [6] приведён удобный алгоритм для исследования устойчивости нулевого решения двумерной системы, имеющей пару чисто мнимых собственных чисел. Т. к. у операторов  $\mathcal{A}_i(\varepsilon)$  характеристические числа лежат вблизи мнимой оси, а собственные значения  $\lambda_i$  матриц  $C_i(\varepsilon)$  удовлетворяют оценке  $\text{Re } \lambda_i < -\rho$  ( $\rho > 0$ ), то (см. [6]) система (8) — (11) имеет вблизи нуля локальное устойчивое инвариантное интегральное многообразие размерности 4. Точные формулировки можно найти в [6—7], [11—14].

Вначале рассмотрим частный случай  $\varepsilon = 0$ . При этом система (4), (4'), (5), (5') распадается на две независимые системы

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + \Xi(\xi, u, 0), \tag{14}$$

$$\frac{du}{dt} = C_1(0)u + H(\xi, u, 0),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = A_2\eta + \Psi(\eta, v, 0), \tag{14'}$$

$$\frac{dv}{dt} = C_2(0)v + N(\eta, v, 0).$$

Построим асимптотическое приближение к интегральному многообразию для системы (14). Итак, пусть  $U$  — некоторая малая окрестность нуля в  $E_1^2$ . Для сведения исходной системы к двумерной строится  $n$ -мерная локальная поверхность  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , т. е.

$$\Phi(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \Phi^1(\xi_1, \xi_2, 0) \\ \Phi^2(\xi_1, \xi_2, 0) \\ \dots \\ \Phi^n(\xi_1, \xi_2, 0) \end{pmatrix}.$$

Итак, пусть  $\xi_1(t), \xi_2(t), \Phi(\xi_1(t), \xi_2(t), 0)$  — некоторое решение системы (14), лежащее на многообразии  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + \Xi(\xi, \Phi(\xi, 0), 0), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\xi}(\xi, 0)(A_1\xi + \Xi(\xi, \Phi(\xi, 0), 0)) = \\ = C_1(0)\Phi(\xi, 0) + H(\xi, \Phi(\xi, 0), 0). \end{aligned} \tag{15'}$$

В равенстве (15') выражение  $\frac{d\Phi}{d\xi}$  следует понимать как

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Phi^n}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Гладкость  $F_1(x, 0)$  в системе (1) — (1'), как показано в [6, 7], гарантирует гладкость многообразия  $\Phi(\xi, 0)$ . В нашем случае оно имеет третий порядок малости по  $\xi$  в окрестности нуля  $U$ . Неизвестное отображение  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  будем искать в виде

$$\Phi(\xi, 0) = \Phi_3(\xi, 0) + \Phi_4(\xi, 0) + \dots,$$

где  $\Phi_i(\xi, 0)$  имеет  $i$ -ый порядок малости по  $\xi$ . Равенство (15') примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}[\Phi_3 + \Phi_4 + \dots](A_1\xi + \\ + \Xi(\xi, [\Phi_3 + \Phi_4 + \dots], 0)) = \\ = C_1(0)[\Phi_3 + \Phi_4 + \dots] + \\ + H(\xi, [\Phi_3 + \Phi_4 + \dots], 0), \end{aligned} \tag{16}$$

где  $\Phi_i = \Phi_i(\xi_1, \xi_2, 0)$ ,  $i = 3, 4, \dots$ . Пусть  $\Xi_3, H_3$  — известные кубические члены в разложениях (10) и (10')

$$\begin{aligned} H_3(\xi, 0) = X_3(\xi_1 e_1^1(0) + \xi_2 e_2^1(0), 0) - \\ - \Xi_3(\xi_1 e_1^1(0) + \xi_2 e_2^1(0), 0, 0) = \\ = H_{30}\xi_1^3 + 3H_{21}\xi_1^2\xi_2 + 3H_{12}\xi_1\xi_2^2 + H_{03}\xi_2^3. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь  $H_{ij}$  — известные векторы из  $\mathbb{R}^n$ . Выделим в равенстве (16) слагаемые третьего порядка по  $\xi$ .

$$\frac{d\Phi_3(\xi, 0)}{d\xi} A_1\xi = C_1(0)\Phi_3(\xi, 0) + H_3(\xi, 0). \tag{18}$$

На практике функцию  $\Phi_3(\xi, 0)$  нужно искать в виде формы с неизвестными векторными коэффициентами  $\Phi_{ij}$

$$\begin{aligned} \Phi_3(\xi, 0) = \Phi_{30}\xi_1^3 + 3\Phi_{21}\xi_1^2\xi_2 + \\ + 3\Phi_{12}\xi_1\xi_2^2 + \Phi_{03}\xi_2^3. \end{aligned} \tag{19}$$

Записывая уравнение (19) в координатах  $\xi_1, \xi_2$ , имеем

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi_3(\xi, 0)}{d\xi_1}\xi_2 + \frac{d\Phi_3(\xi, 0)}{d\xi_2}\xi_1 = \\ = C_1(0)\Phi_3(\xi, 0) + H_3(\xi, 0). \end{aligned}$$

Подставляя (17) в (20) и приравнявая соответствующие слагаемые при  $\xi_1^3, \xi_1^2\xi_2, \xi_1\xi_2^2, \xi_2^3$ ,

получим для неизвестных векторов  $\Phi_{ij}$  ( $i, j = 0, \dots, 3$ ) линейную систему

$$\begin{aligned} -C_1(0)\Phi_{30} + 3\Phi_{21} &= H_{30}, \\ 3\Phi_{30} + 3C_1(0)\Phi_{21} - 6\Phi_{12} &= -H_{21}, \\ -6\Phi_{21} - 3C_1(0)\Phi_{12} + 3\Phi_{03} &= H_{12}, \\ 3\Phi_{12} + C_1(0)\Phi_{03} &= -H_{03} \end{aligned} \quad (21)$$

с известными правыми частями. Легко видеть, что однозначная разрешимость этой линейной системы эквивалентна обратимости матрицы  $C_1^4(0) + 10C_1^2(0) + 9I$ . После того, как коэффициенты  $\Phi_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ) в (20) определены, от  $(n+2)$ -мерной системы (15) перейдём к двумерной системе, описывающей движение по  $\Phi_3(\xi, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -\xi_2 + \Xi_3^1(\xi_1, \xi_2, 0) + \dots, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \xi_1 + \Xi_3^2(\xi_1, \xi_2, 0) + \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\Xi_3(\xi_1, \xi_2, 0, 0) = P_1(0)X_3(\xi_1 e_1^1(0) + \xi_2 e_2^1(0), 0)$ , а функции  $\Xi_3^1(\xi_1, \xi_2, 0)$  и  $\Xi_3^2(\xi_1, \xi_2, 0)$  обозначающие соответственно первую и вторую координаты вектора  $\Xi_3(\xi_1, \xi_2, 0)$ , имеют по  $(\xi_1, \xi_2)$  третий порядок малости.

### 5. УСТОЙЧИВОЕ ГЛАДКОЕ 4-Х МЕРНОЕ ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Нетрудно видеть, что и в более общем случае (при  $\varepsilon > 0$ ) можно полностью аналогично построить устойчивое инвариантное гладкое многообразие  $\Phi(\xi, \eta, \varepsilon, \nu) = (\Phi^u(\xi, \varepsilon, \nu), \Phi^v(\xi, \varepsilon, \nu))^T$ , сводящее  $n+m+4$ -мерную систему (4) — (5') в некоторой малой окрестности нуля к четырёхмерной:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}^1(\varepsilon)\xi + \nu \varepsilon L_1 \eta + \Xi_3(\xi, 0, 0) + \dots, \quad (22)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathcal{A}^2(\varepsilon)\eta + \nu \varepsilon L_2 \xi + \Psi_3(\eta, 0, 0) + \dots, \quad (23)$$

Двумерные векторы  $\Xi_3(\xi, 0, 0)$  и  $\Psi_3(\eta, 0, 0)$  определяются из равенств

$$\begin{aligned} \Xi(\xi, 0, 0) &= \Xi(\xi, \Phi^u(\xi, \varepsilon, \nu), \varepsilon) |_{(\xi, 0, 0)} = \\ &= \Xi_3(\xi, 0, 0) + \Xi_4(\xi, 0, 0) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, 0, 0) &= \Psi(\eta, \Phi^v(\eta, \varepsilon, \nu), \varepsilon) |_{(\eta, 0, 0)} = \\ &= \Psi_3(\eta, 0, 0) + \Psi_4(\eta, 0, 0) + \dots \end{aligned}$$

Перепишем систему (22), (23) в координатной форме

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -\xi_2 + \varepsilon(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) + \\ &+ \nu \varepsilon(p_{11}\eta_1 + p_{12}\eta_2) + \Xi_3^1(\xi, 0, 0) + \dots, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \xi_1 + \varepsilon(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) + \\ &+ \nu \varepsilon(p_{21}\eta_1 + p_{22}\eta_2) + \Xi_3^2(\xi, 0, 0) + \dots, \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_2 + \varepsilon(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2) + \\ &+ \nu \varepsilon(q_{11}\xi_1 + q_{12}\xi_2) + \Psi_3^1(\eta, 0, 0) + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \eta_1 + \varepsilon(b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2) + \\ &+ \nu \varepsilon(q_{21}\xi_1 + q_{22}\xi_2) + \Psi_3^2(\eta, 0, 0) + \dots, \end{aligned}$$

где теперь уже при  $i, j = 1, 2$  известны кубические нелинейности

$$\Xi_3^i(\xi, 0, 0) = d_{30}^i \xi_1^3 + 3d_{21}^i \xi_1^2 \xi_2 + 3d_{12}^i \xi_1 \xi_2^2 + d_{03}^i \xi_2^3, \quad (24)$$

$$\Psi_3^j(\eta, 0, 0) = f_{30}^j \eta_1^3 + 3f_{21}^j \eta_1^2 \eta_2 + 3f_{12}^j \eta_1 \eta_2^2 + f_{03}^j \eta_2^3. \quad (25)$$

### 6. ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ И ТРЁХМЕРНОЙ СИСТЕМЕ

Для получения условий синхронизации перейдём к полярным координатам  $r, \alpha$  и  $\rho, \beta$  (см. например [15])

$$\xi_1 = r \cos \alpha, \quad \xi_2 = r \sin \alpha,$$

$$\eta_1 = \rho \cos \beta, \quad \eta_2 = \rho \sin \beta.$$

Имеем

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon r \mathcal{D}_1 + \nu \varepsilon \rho \mathcal{D}_2 + r^3 \mathcal{D}_3 + \dots, \quad (26)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 1 + \varepsilon \mathcal{D}_4 + \nu \varepsilon \frac{\rho}{r} \mathcal{D}_5 + r^2 \mathcal{D}_6 + \dots, \quad (26')$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon \rho \mathcal{F}_1 + \nu \varepsilon r \mathcal{F}_2 + \rho^3 \mathcal{F}_3 + \dots, \quad (27)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 1 + \varepsilon \mathcal{F}_4 + \nu \varepsilon \frac{r}{\rho} \mathcal{F}_5 + \rho^2 \mathcal{F}_6 + \dots, \quad (27')$$

где коэффициенты  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_6, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_6$   $2\pi$ -периодически зависят от углов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\mathcal{D}_1 = a_{11} \cos^2 \alpha + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \sin 2\alpha + a_{22} \sin^2 \alpha, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 &= p_{11} \cos \alpha \cos \beta + p_{12} \cos \alpha \sin \beta + \\ &+ p_{21} \sin \alpha \cos \beta + p_{22} \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 &= d_{30}^1 \cos^4 \alpha + 3d_{21}^1 \cos^3 \alpha \sin \alpha + \\ &+ 3d_{12}^1 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + d_{03}^1 \cos \alpha \sin^3 \alpha + \\ &+ d_{30}^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha + 3d_{21}^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \\ &+ 3d_{12}^2 \cos \alpha \sin^3 \alpha + d_{03}^2 \sin^4 \alpha, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \sin 2\alpha - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{21} \cos^2 \alpha, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_5 = & -p_{11} \sin \alpha \cos \beta - p_{12} \sin \alpha \sin \beta + \\ & + p_{21} \cos \alpha \cos \beta + p_{22} \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_6 = & -d_{30}^1 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 3d_{21}^1 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \\ & - 3d_{12}^1 \cos \alpha \sin^3 \alpha - d_{03}^1 \sin^4 \alpha + \\ & + d_{30}^2 \cos^4 \alpha + 3d_{21}^2 \cos^3 \alpha \sin \alpha + \\ & + 3d_{12}^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + d_{03}^2 \cos \alpha \sin^3 \alpha, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\mathcal{F}_1 = b_{11} \cos^2 \beta + \frac{b_{12} + b_{21}}{2} \sin 2\beta + b_{22} \sin^2 \beta, \quad (28')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 = & q_{11} \cos \beta \cos \alpha + q_{12} \cos \beta \sin \alpha + \\ & + q_{21} \sin \beta \cos \alpha + q_{22} \sin \beta \sin \alpha, \end{aligned} \quad (29')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 = & f_{30}^1 \cos^4 \beta + 3f_{21}^1 \cos^3 \beta \sin \beta + \\ & + 3f_{12}^1 \cos^2 \beta \sin^2 \beta + f_{03}^1 \cos \beta \sin^3 \beta + \\ & + f_{30}^2 \sin \beta \cos^3 \beta + 3f_{21}^2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta + \\ & + 3f_{12}^2 \cos \beta \sin^3 \beta + f_{03}^2 \sin^4 \beta, \end{aligned} \quad (30')$$

$$\mathcal{F}_4 = \frac{b_{22} - b_{11}}{2} \sin 2\beta - b_{12} \sin^2 \beta + b_{21} \cos^2 \beta, \quad (31')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_5 = & -q_{11} \sin \beta \cos \alpha - q_{12} \sin \beta \sin \alpha + \\ & + q_{21} \cos \beta \cos \alpha + q_{22} \cos \beta \sin \alpha, \end{aligned} \quad (32')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_6 = & -f_{30}^1 \cos^3 \beta \sin \beta - 3f_{21}^1 \cos^2 \beta \sin^2 \beta - \\ & - 3f_{12}^1 \cos \beta \sin^3 \beta - f_{03}^1 \sin^4 \beta + \\ & + f_{30}^2 \cos^4 \beta + 3f_{21}^2 \cos^3 \beta \sin \beta + \\ & + 3f_{12}^2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta + f_{03}^2 \cos \beta \sin^3 \beta. \end{aligned} \quad (33')$$

Введём в рассмотрение разность фаз  $\phi = \alpha - \beta$ . Чертой сверху будем обозначать результат усреднения по  $\beta \in [0, 2\pi)$  функции  $Z(\beta)$

$$\bar{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\beta) d\beta$$

и вычислим средние значения от  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_6, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_6$

$$\bar{\mathcal{D}}_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_2 = & \frac{1}{2} [p_{11} \cos \phi - p_{12} \sin \phi + \\ & + p_{21} \sin \phi + p_{22} \cos \phi], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_3 = \frac{3}{8} [d_{30}^1 + d_{12}^1 + d_{21}^1 + d_{03}^1], \quad (36)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_4 = \frac{-a_{12} + a_{21}}{2}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_5 = & \frac{1}{2} [-p_{11} \sin \phi - p_{12} \cos \phi + \\ & + p_{21} \cos \phi - p_{22} \sin \phi], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_6 = \frac{3}{8} [-d_{21}^1 - d_{03}^1 + d_{30}^2 + d_{12}^2], \quad (39)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_1 = \frac{b_{11} + b_{22}}{2}, \quad (34')$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_2 = & \frac{1}{2} [q_{11} \cos \phi + q_{12} \sin \phi - \\ & - q_{21} \sin \phi + q_{22} \cos \phi], \end{aligned} \quad (35')$$

$$\bar{\mathcal{F}}_3 = \frac{3}{8} [f_{30}^1 + f_{12}^1 + f_{21}^1 + f_{03}^1], \quad (36')$$

$$\bar{\mathcal{F}}_4 = \frac{-b_{12} + b_{21}}{2}, \quad (37')$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_5 = & \frac{1}{2} [q_{11} \sin \phi - q_{12} \cos \phi + \\ & + q_{21} \cos \phi + q_{22} \sin \phi], \end{aligned} \quad (38')$$

$$\bar{\mathcal{F}}_6 = \frac{3}{8} [-f_{21}^1 - f_{03}^1 + f_{30}^2 + f_{12}^2]. \quad (39')$$

Эти усреднённые по  $\beta$  коэффициенты  $\bar{\mathcal{D}}_1, \dots, \bar{\mathcal{D}}_6, \bar{\mathcal{F}}_1, \dots, \bar{\mathcal{F}}_6$  зависят только от  $\phi$ , причём периодически. Как показано в [18], малые автоколебания систем (1) и (1') имеют амплитуды порядка  $\varepsilon^{1/2}$ . Поэтому, для дальнейшего исследования системы (26) — (27') естественно ввести новый масштаб  $r = \varepsilon^{1/2} S, \rho = \varepsilon^{1/2} T$ . Это соображение, кроме того, объясняет, почему в равенствах (25) — (26') мы ограничились лишь линейными членами порядка  $\varepsilon$  и кубическими членами нелинейности, имеющими по  $\varepsilon$  нулевую степень. Итак, перейдём к новым масштабам

$$\frac{dS}{dt} = \varepsilon [S\mathcal{D}_1 + vT\mathcal{D}_2 + S^3\mathcal{D}_3] + \dots, \quad (40)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 1 + \varepsilon \left[ \mathcal{D}_4 + v \frac{T}{S} \mathcal{D}_5 + S^2 \mathcal{D}_6 \right] + \dots, \quad (40')$$

$$\frac{dT}{dt} = \varepsilon [T\mathcal{F}_1 + vS\mathcal{F}_2 + T^3\mathcal{F}_3] + \dots, \quad (41)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 1 + \varepsilon \left[ \mathcal{F}_4 + v \frac{S}{T} \mathcal{F}_5 + T^2 \mathcal{F}_6 \right] + \dots \quad (41')$$

Переходя в уравнениях (40) — (41') от времени  $t$  к быстрой угловой переменной  $\beta$ , получим трёхмерную систему для  $S, T, \phi$  в стандартной форме Боголюбова

$$\frac{dS}{d\beta} = \varepsilon [S\mathcal{D}_1 + vT\mathcal{D}_2 + S^3\mathcal{D}_3] + \dots, \quad (42)$$

$$\frac{dT}{d\beta} = \varepsilon[T\mathcal{F}_1 + vS\mathcal{F}_2 + T^3\mathcal{F}_3] + \dots, \quad (43)$$

$$\frac{d\phi}{d\beta} = \varepsilon \left[ \mathcal{D}_4 - \mathcal{F}_4 + v\frac{T}{S}\mathcal{D}_5 - v\frac{S}{T}\mathcal{F}_5 + S^2\mathcal{D}_6 - T^2\mathcal{F}_6 \right] + \dots \quad (44)$$

Многоточие здесь означает члены порядка  $O(v\varepsilon), O(\varepsilon^2)$  и т.д. Переходя, наконец, к медленному углу  $\theta = \varepsilon\beta$ , имеем

$$\frac{dS}{d\theta} = [S\mathcal{D}_1 + vT\mathcal{D}_2 + S^3\mathcal{D}_3] \times [1 - \varepsilon(\mathcal{F}_4 + v\frac{S}{T}\mathcal{F}_5 + T^2\mathcal{F}_6) + \dots], \quad (45)$$

$$\frac{dT}{d\theta} = [T\mathcal{F}_1 + vS\mathcal{F}_2 + T^3\mathcal{F}_3] \times [1 - \varepsilon(\mathcal{F}_4 + v\frac{S}{T}\mathcal{F}_5 + T^2\mathcal{F}_6) + \dots], \quad (46)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \mathcal{D}_4 - \mathcal{D}_4 + v\frac{T}{S}\mathcal{D}_5 - v\frac{S}{T}\mathcal{F}_5 + S^2\mathcal{F}_6 - T^2\mathcal{F}_6 + \dots \quad (47)$$

Далее, усредняя правые части этих уравнений по  $\beta$  и используя (34—39'), получим систему

$$\frac{dS}{d\theta} = G_1(S, T, \phi, \varepsilon, v), \quad (48)$$

$$\frac{dT}{d\theta} = G_2(S, T, \phi, \varepsilon, v), \quad (49)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = G_3(S, T, \phi, \varepsilon, v). \quad (50)$$

Очевидно,

$$G_1(S, T, \phi, \varepsilon, v) = S\bar{\mathcal{D}}_1 + vT\bar{\mathcal{D}}_2 + S^3\bar{\mathcal{D}}_3 + \dots, \quad (51)$$

$$G_2(S, T, \phi, \varepsilon, v) = T\bar{\mathcal{F}}_1 + vS\bar{\mathcal{F}}_2 + T^3\bar{\mathcal{F}}_3 + \dots, \quad (52)$$

$$G_3(S, T, \phi, \varepsilon, v) = \frac{-a_{12} + a_{21} + b_{12} - b_{21}}{2} + v\frac{T}{S}\bar{\mathcal{D}}_5 - v\frac{S}{T}\bar{\mathcal{F}}_5 + \frac{3S^2}{8}[-d_{21}^1 - d_{03}^1 + d_{30}^2 + d_{12}^2] - \frac{3T^2}{8}[-f_{21}^1 - f_{03}^1 + f_{30}^2 + f_{12}^2] + \dots \quad (53)$$

Многоточие в равенствах (51)—(53) означает члены, имеющие по  $\varepsilon$  положительную степень. Правая часть системы (48)—(50) не зависит от быстрого угла  $\beta$ . Легко видеть, что положения равновесия  $(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))$  усреднённой системы (48)—(50) имеют вид

$$S^*(v, \varepsilon) = S_0 + \alpha_{10}v + \alpha_{01}\varepsilon + \alpha_{20}v^2 + \dots,$$

$$T^*(v, \varepsilon) = T_0 + \beta_{10}v + \beta_{01}\varepsilon + \beta_{20}v^2 + \dots,$$

$$\phi^*(v, \varepsilon) = \delta_{10}v + \delta_{01}\varepsilon + \delta_{20}v^2 + \dots,$$

где  $S_0 > 0, T_0 > 0$ . Полагая в правых частях уравнений (48)—(50)  $\varepsilon = 0, v = 0$  и  $\phi = 0$ , без труда вычисляем

$$S_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{22}}{d_{30}^1 + d_{12}^1 + d_{21}^2 + d_{03}^2}}, \quad (54)$$

$$T_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{b_{11} + b_{22}}{f_{30}^1 + f_{12}^1 + f_{21}^2 + f_{03}^2}}.$$

Если положение равновесия  $(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))$  системы (48)—(50) обладает свойством грубой устойчивости, то любая траектория системы (42)—(44) с начальными условиями, близкими к  $(S^*, T^*, \phi^*)$  экспоненциально стремится при  $\beta \rightarrow \infty$  в малую  $v$ -окрестность точки  $(S_0, T_0, 0)$ .

Нас будет интересовать ситуация, когда имеет место малый фазовый сдвиг  $\phi \approx 0$  (см. [17]). Очевидно, что автоколебания систем (1) и (1') с амплитудами  $S^*(v)$  и  $T^*(v)$  соответственно могут возникнуть лишь при выполнении условий

$$\bar{\mathcal{D}}_3 > 0, \bar{\mathcal{F}}_3 > 0. \quad (III)$$

Достаточное условие малости сдвига фаз получим из (53) и (54)

$$\frac{-a_{12} + a_{21} + b_{12} - b_{21}}{2} + v\frac{T_0}{S_0} \frac{(-p_{12} + p_{21})}{2} - v\frac{S_0}{T_0} \frac{(-q_{12} + q_{21})}{2} + \frac{3S_0^2}{8}[-d_{21}^1 - d_{03}^1 + d_{30}^2 + d_{12}^2] - \frac{3T_0^2}{8}[-f_{21}^1 - f_{03}^1 + f_{30}^2 + f_{12}^2] = 0. \quad (IV)$$

Наконец, положение равновесия  $(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))$  усреднённой системы (48)—(50) должно быть устойчивым при всех достаточно малых  $v$ , т.е. все характеристические корни  $\lambda_1(v, \varepsilon), \lambda_2(v, \varepsilon), \lambda_3(v, \varepsilon)$  матрицы

$$G' = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial S} & \frac{\partial G_1}{\partial T} & \frac{\partial G_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial G_2}{\partial S} & \frac{\partial G_2}{\partial T} & \frac{\partial G_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial G_3}{\partial S} & \frac{\partial G_3}{\partial T} & \frac{\partial G_3}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

в точке  $(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))$  должны иметь отрицательные реальные части. Элементы этой матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_1}{\partial S} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{3}{4} S^*(v)^2 [d_{30}^1 + d_{12}^1 + d_{21}^2 + d_{03}^2] + \dots, \\ & \frac{\partial G_1}{\partial T} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{v}{2} [p_{11} + p_{22} + (p_{21} - p_{12}) \phi^*(v)] + \dots, \\ & \frac{\partial G_1}{\partial \phi} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{T^*(v)v}{2} [p_{21} - p_{12} - (p_{11} + p_{22}) \phi^*(v)] + \dots; \\ & \frac{\partial G_2}{\partial S} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{b_{11} + b_{22}}{2} + \frac{3}{4} T^*(v)^2 [f_{30}^1 + f_{12}^1 + f_{21}^2 + f_{03}^2] + \dots, \\ & \frac{\partial G_2}{\partial T} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{v}{2} [q_{11} + q_{22} + (q_{21} - q_{12}) \phi^*(v)] + \dots, \\ & \frac{\partial G_2}{\partial \phi} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{S^*(v)v}{2} [q_{12} - q_{21} - (q_{11} + q_{22}) \phi^*(v)] + \dots; \\ & \frac{\partial G_3}{\partial S} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= -\frac{vT^*(v)}{2S^*(v)^2} [p_{21} - p_{12} - (p_{11} + p_{22}) \phi^*(v)] - \\ & - \frac{v}{2T^*(v)} [q_{21} - q_{12} + (q_{11} + q_{22}) \phi^*(v)] + \\ & + \frac{3}{4} S^*(v)^2 [-d_{21}^1 - d_{03}^1 + d_{30}^2 + d_{12}^2] + \dots, \\ & \frac{\partial G_3}{\partial T} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= \frac{vS^*(v)}{2T^*(v)^2} [q_{21} - q_{12} + (q_{11} + q_{22}) \phi^*(v)] + \\ & + \frac{v}{2S^*(v)} [p_{21} - p_{12} - (p_{11} + p_{22}) \phi^*(v)] + \\ & + \frac{3}{4} T^*(v)^2 [f_{21}^1 + f_{03}^1 - f_{30}^2 - f_{12}^2] + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_3}{\partial \phi} \Big|_{(S^*(v, \varepsilon), T^*(v, \varepsilon), \phi^*(v, \varepsilon))} = \\ &= v \frac{T^*(v)}{2S^*(v)} [-p_{11} - p_{22} + (p_{12} - p_{21}) \phi^*(v)] + \\ & + v \frac{S^*(v)}{2T^*(v)} [-q_{11} - q_{22} + (q_{21} - q_{12}) \phi^*(v)] + \dots \end{aligned}$$

Под многоточием здесь понимаются члены порядка  $O(\varepsilon)$ . Будем искать  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  в виде рядов:

$$\begin{aligned} \lambda_1(v, \varepsilon) &= \lambda_1^0 + \lambda_1^{10}v + \lambda_1^{01}\varepsilon + \lambda_1^{20}v^2 + \dots, \\ \lambda_2(v, \varepsilon) &= \lambda_2^0 + \lambda_2^{10}v + \lambda_2^{01}\varepsilon + \lambda_2^{20}v^2 + \dots, \\ \lambda_3(v, \varepsilon) &= \lambda_3^0 + \lambda_3^{10}v + \lambda_3^{01}\varepsilon + \lambda_3^{20}v^2 + \dots \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= -2a_1, \quad \lambda_2^0 = -2a_2, \quad \lambda_3^0 = 0, \\ \lambda_3^{10} &= \frac{T_0}{2S_0} (p_{11} + p_{22}) - \frac{S_0}{2T_0} (q_{11} + q_{22}) + \\ & + \frac{3S_0T_0[-d_{21}^1 - d_{03}^1 + d_{30}^2 + d_{12}^2](p_{12} - p_{21})}{8\bar{D}_1 + 24S_0^2\bar{D}_3} + \\ & + \frac{3T_0S_0[f_{21}^1 + f_{03}^1 - f_{30}^2 - f_{12}^2](q_{21} - q_{12})}{8\bar{F}_1 + 24T_0^2\bar{F}_3}, \end{aligned}$$

где  $p_{ij}, q_{ij}, d_{ij}^k, f_{ij}^k, S_0, T_0$ , определены формулами (27) — (32'), (44). Очевидно, что все три корня — вещественные, и при выполнении условия (I)  $\lambda_1(v, \varepsilon), \lambda_2(v, \varepsilon) < 0$  при всех достаточно малых  $v, \varepsilon$ . Условие, гарантирующее отрицательность третьего корня  $\lambda_3(v, \varepsilon)$ , т. е. устойчивость синхронизационного процесса, можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} & \frac{T_0}{2S_0} (p_{11} + p_{22}) - \frac{S_0}{2T_0} (q_{11} + q_{22}) + \\ & + \frac{3S_0T_0[-d_{21}^1 - d_{03}^1 + d_{30}^2 + d_{12}^2](p_{12} - p_{21})}{8\bar{D}_1 + 24S_0^2\bar{D}_3} + \quad (V) \\ & + \frac{3T_0S_0[f_{21}^1 + f_{03}^1 - f_{30}^2 - f_{12}^2](q_{21} - q_{12})}{8\bar{F}_1 + 24T_0^2\bar{F}_3} < 0. \end{aligned}$$

Это есть ограничение в виде неравенства на элементы  $p_{ij}, q_{ij}$  матриц обратных связей.

Таким образом, при выполнении условий (I) — (V) у системы (3) — (3') существует локальное 4-х мерное устойчивое интегральное многообразие, движение по которому описывается 4-х мерной системой (24) — (24'). Последняя при малых  $\varepsilon, v$  имеет не только нулевое решение, но и малое устойчивое автоколебание, близкое к гармоническим автоколебаниям ав-

тономной системы (1)–(1'), с амплитудами  $\varepsilon^{1/2}S_0, \varepsilon^{1/2}T_0$  и фазами

$$\alpha = \arccos \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}},$$

$$\beta = \arccos \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}},$$

где  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  определены равенствами (2)–(2'). И, наконец,

$$\alpha - \beta = O(\nu).$$

В этом случае, как предложено в [17], будем называть исследуемые автоколебания синхронными.

### 7. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим 4-х мерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon x_1 + \nu \varepsilon p y_2 + x_2, \tag{55}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - \nu \varepsilon y_2 + dx_2^3,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \varepsilon y_1 - y_2 + y_1^3, \tag{55'}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + \varepsilon y_2 + y_1^3$$

при  $\varepsilon = \nu = 0.001, d > 0$ . Очевидно, условие I сдвига корней вправо выполнено:

$$a_{11} + a_{22} = \varepsilon = 0.001 > 0, \tag{56}$$

$$b_{11} + b_{22} = \varepsilon + \varepsilon = 0.002 > 0.$$

Условие II проверять не нужно. Проверим условие III вещественности амплитуд. Очевидно,

$$d_{30}^1 + d_{12}^1 + d_{21}^2 + d_{03}^2 =$$

$$= d, f_{30}^1 + f_{12}^1 + f_{21}^2 + f_{03}^2 = 1.$$

Т.е., в силу (54) и (56),  $S^*$  вещественно, если  $d > 0$ . Потребуем теперь выполнение достаточного условия сближения фаз (IV):  $p = \sqrt{2d}$ . И, наконец, в этом примере условие устойчивости процесса синхронизации (V) выполнено при всех  $p$  и  $d$ . Действительно:

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{d}} < 0.$$

Перейдём к полярным координатам

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha,$$

$$y_1 = \rho \cos \beta, \quad y_2 = \rho \sin \beta$$

и, затем, поменяем масштаб радиусов  $r = \varepsilon^{1/2}S, \rho = \varepsilon^{1/2}T$ . Получим 4-х мерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $S(t), T(t), \alpha(t), \beta(t)$ :

новенных дифференциальных уравнений для функций  $S(t), T(t), \alpha(t), \beta(t)$ :

$$\frac{dS}{dt} = \varepsilon[S \cos^2 \alpha - \nu T \sin \alpha \sin \beta + \nu T p \cos \alpha \sin \beta + dS^3 \sin^4 \alpha],$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 1 - \varepsilon \cos \alpha \sin \alpha - \varepsilon \nu \frac{\rho}{r} \sin \beta \cos \alpha + \varepsilon \nu p \frac{\rho}{r} \sin \beta \sin \alpha + \tag{57}$$

$$+ dr^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha;$$

$$\frac{dT}{dt} = \varepsilon[T + T^3 \cos^4 \beta + T^3 \cos^3 \beta \sin \beta],$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 1 + \rho^2 \cos^3 \beta \sin \beta - \rho^2 \cos^4 \beta.$$

Зададим естественные начальные условия:

$$S(0) = T(0) = 1, \quad \alpha(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \beta(0) = \frac{\pi}{4}. \tag{58}$$

Решим приближённо систему (57) с начальными условиями (58) численным методом (Maple 10.5) и построим график функции  $\Phi(t) = \alpha(t) - \beta(t)$  при  $p = 1, d = 0.5$  на отрезке  $t \in [0, 500]$ .

Очевидно, что здесь  $\alpha(t) - \beta(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

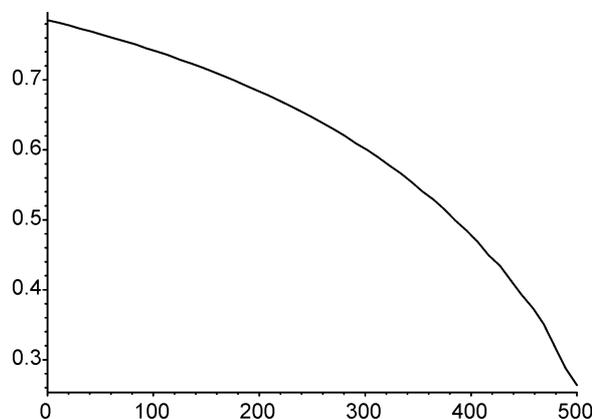


Рис.1. Асимптотическое поведение разности фаз  $\alpha(t) - \beta(t)$  при выполнении условий синхронизации I–V

Рассмотрим теперь случай  $p = 2, d = 1$ . Здесь  $p \neq \sqrt{2d}$  и, следовательно, условие IV не выполнено! Фазы могут не сближаться. Приведём численный пример с теми же начальными условиями (58).

Из рис. 2 видно, что фазы расходятся при  $t \rightarrow \infty$ .

Авторы выражают искреннюю признательность проф. Ю. И. Сапронову и проф. Б. Н. Са-

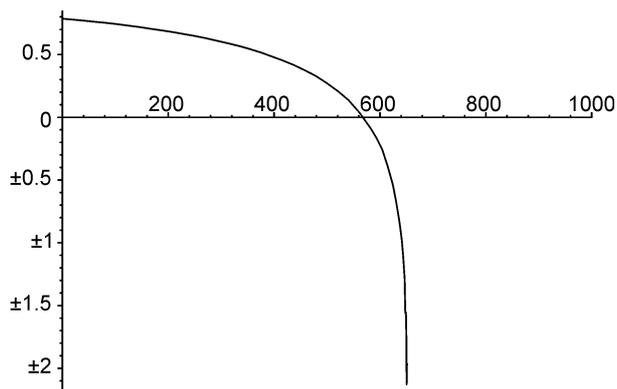


Рис. 2. График  $\alpha(t) - \beta(t)$  при невыполнении условия IV сближения фаз

довскому за внимание к работе и ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Pol*. A Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations, // *Radio review*, 1, 1920, P. 701—754.
2. *Андронов А.А., Витт А.А.* К математической теории захватывания // *Журнал прикладной физики*, 7(4):3, 1930 а.
3. *Андронов А.А., Витт А.А.* Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol // *Archiv fur Elektrotechnik*, 24(1), 1930b, S. 99—110, Русский перевод: *Андронов А.А., Собрание трудов* // М., изд-во АН СССР, 1956, С. 70—84.
4. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем // М., Наука, 1971.
5. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике // М., Наука, 1981.
6. *Плисс В.А.*, Принцип сведения в теории устойчивости движения // *Известия АН СССР*, 28, 1964, С. 1297—1324.

7. *Бибиков Ю.Н., Плисс В.А.* О существовании инвариантных торов в окрестности нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения*, 3, Т. 11, 1967, С. 1864—1881.

8. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику // Киев, Изд-во АН СССР, 1930.

9. *Bogolubov N.N., Mitropolski Yu. A.* The Method of Integral manifolds in Nonlinear Mechanics, In *Contributions to Differential Equations.* // New York, J. Wiley and Sons Inc., 1963, P. 123—196.

10. *Mitropolski Yu.* Averaging Method in Nonlinear Mechanics // *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 2, 1967, P. 69—96.

11. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах // М., Мир, 1966.

12. *Kelley A.* Changes of variables near a periodic surface or invariant manifold // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2, Т. 131, 1968, P. 356—364.

13. *Kelley A.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // *J. Different. Equations*, № 4, 1967, P. 546—570.

14. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий // М., Наука, 1988.

15. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения // М., Наука, 1966.

16. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний // М., гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956.

17. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление // М., изд-во Этносфера, 2003.

18. *Стрыгин В.В.* Смена устойчивостей и бифуркация малых автоколебаний систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // *ДАН СССР*, № 1, Т. 199, 1971.